

Un cadre a contrario anisotrope pour la détection de convergences de structures linéaires dans les images

Agnès DESOLNEUX¹, Fanny DORÉ²

¹CNRS, Laboratoire CMLA, ENS Cachan
61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France

²Laboratoire MAP5, Université Paris Descartes
45 rue des Saints-Pères, 75270 Paris Cedex 06, France

agnes.desolneux@cmla.ens-cachan.fr, fanny.dore@parisdescartes.fr

Résumé – La détection de convergences dans les images et notamment la détection des lésions stellaires dans les mammographies a récemment été abordée dans le cadre a contrario [PMBI09] sous le modèle uniforme. Nous proposons de reprendre cette méthode de détection contre un modèle paramétrique qui prend mieux en compte la répartition naturelle des structures linéaires dans les mammographies, ou celles des segments dans une image naturelle. Ce modèle est estimé directement à partir des résultats de la méthode a contrario dans le cadre uniforme. La détection a contrario contre ce nouveau modèle est plus riche et fait apparaître des convergences qui étaient masquées sous le modèle uniforme.

Abstract – The detection of points of convergence in images, in particular the detection of stellate lesions in mammograms, has recently been addressed ([PMBI09]), in the a contrario framework, against the uniform model. We propose in this paper a new use of the a contrario detection approach against a parametric model, which provides a better description of linear structures in mammograms or of line segments in natural images. This model is estimated directly from the results of the a contrario approach against the uniform model. This new model is more fruitful and reveals new points of convergence that were “masked” in the former detection against the uniform model.

1 Introduction

Nous nous intéressons dans cet article à la détection de convergences de structures linéaires dans les images vers des points qui peuvent se trouver aussi bien dans l’image qu’à l’extérieur du domaine de l’image. Une des applications visées est la détection de lésions dites stellaires ou étoilées dans les mammographies. La détection de ces lésions, responsables de certains cancers du sein a déjà suscité de nombreux travaux ([KtB96], [Kel93]). Récemment, ce problème a été abordé dans le cadre dit a contrario par [PMBI09]. Le principe général des méthodes a contrario est celui des tests statistiques multiples : étant donnée une structure observée dans une image (détection potentielle), on lui associe un nombre appelé Nombre de Fausses Alarmes qui est le produit de la probabilité de l’observation dans un modèle de bruit par le nombre de structures testées (ce qui permet de tenir compte de la correction de Bonferroni). Ce nombre de fausses alarmes est l’espérance du nombre de fois où une telle structure apparaît dans une image de bruit. Les méthodes a contrario sont largement utilisées pour des problématiques de détections dans les images : détection de segments [GJMR10], détection de points de fuite [ADV03], ainsi que dans bien d’autres cas (voir par exemple la monographie [DMM08] pour plus de détails). La méthode a contrario nécessite la définition préalable d’un modèle de bruit sur les objets étudiés. Ce modèle est pris dans la grande majorité des cas

comme étant le modèle uniforme et indépendant. Le défaut majeur d’utiliser un modèle de bruit uniforme sur les structures linéaires de l’image est que cela peut « masquer » certaines convergences. En effet, dans le cas des mammographies, les structures linéaires de l’image sont naturellement organisées suivant une convergence vers un point près du tétou, et cette convergence est normale, elle ne doit pas être détectée comme étant une lésion. Nous proposons dans cet article à la fois d’estimer cette convergence normale et ensuite de l’intégrer dans le cadre a contrario afin de mieux détecter des convergences secondaires qui étaient auparavant « masquées ».

2 Cadre a contrario anisotrope

Soit N le nombre de structures linéaires élémentaires dans l’image. Ce sont par exemple les segments obtenus par le détecteur LSD de [GJMR10] (accessible aussi en ligne sur IPOL : <http://www.ipol.im/pub/art/2012/gjmr-lsd/>). Chaque segment détermine une droite D dont les coordonnées polaires seront notées (ρ, φ) . A chaque point x de l’image, on associe le nombre de droites qui convergent vers lui à la précision r fixée près (c’est à dire on compte les droites qui rencontrent le disque $B(x, r)$ de centre x et de rayon r). Pour la précision r donnée, on partitionne le domaine extérieur à l’image en régions V (qui sont comprises entre deux arcs de

cercles concentriques) comme exposé dans [ADV03]. Les régions V sont repérées par leur centre x , et à chaque centre x d'une région V on associe le nombre de droites qui intersectent cette région. On se donne ensuite un modèle de bruit de la forme suivante : les N droites sont indépendantes et distribuées suivant une mesure de la forme $d\mu_f = f(\rho, \varphi)d\rho d\varphi$, où f est une fonction positive. On a alors la définition principale suivante.

Définition 2.1 La probabilité sous μ_f qu'une droite de l'image rencontre $B(x, r)$ (resp. V de centre x) est notée $p_f(x)$ et elle est donnée par $p_f(x) = \mu_f\{D \cap B(x, r) \neq \emptyset\} / \mu_f\{D \cap \Omega \neq \emptyset\}$ (resp. $p_f(x) = \mu_f\{D \cap V \neq \emptyset\} / \mu_f\{D \cap \Omega \neq \emptyset\}$) où Ω est le domaine de l'image. Le nombre de fausses alarmes associé à un point x par rapport au modèle de bruit μ_f est alors défini par :

$$\text{NFA}_f(x) = N_T \mathcal{B}(N, K(x), p_f(x)) \quad (1)$$

où N_T est le nombre de points testés, $K(x)$ est le nombre de droites de l'image (parmi les N) qui rencontrent $B(x, r)$

(resp. V de centre x) et $\mathcal{B}(l, k, p) := \sum_{j=k}^l \binom{l}{j} p^j (1-p)^{l-j}$ est

la queue de la loi binomiale de paramètres l et p .

Soit $0 < \varepsilon \leq 1$. Lorsque $\text{NFA}_f(x) \leq \varepsilon$, on dit que le point x est un point de convergence ε -significatif par rapport à la loi μ_f .

Le nombre de fausses alarmes mesure la significativité de chaque point x . Plus il est petit, plus la convergence observée a une faible probabilité d'être due au hasard. De plus on a la propriété suivante (voir [DMM08] pour la preuve) : l'espérance du nombre de points de convergence ε -significatif est inférieure à ε dans une image où les droites sont tirées de façon i.i.d. suivant le modèle de bruit. Rappelons aussi que le modèle uniforme sur les droites correspond à prendre $f = 1$ constante, et la mesure $d\mu_1 = d\rho d\varphi$ est alors la mesure de Poincaré sur les droites (voir [San04]) qui est l'unique mesure sur les droites, à constante multiplicative près, qui soit invariante par translation et rotation (i.e. isotrope). Dans ce cas $p_f(x) = p_1(x)$ est indépendant de x .

Pour tenir compte d'une convergence principale des structures linéaires, nous proposons de suivre la démarche suivante :

1. Détection du point de convergence principal M , défini comme étant le point tel que le $\text{NFA}_1(x)$ sous la loi uniforme $d\mu_1 = d\rho d\varphi$ est minimum.
2. Estimation paramétrique d'une mesure mélange sur les droites paramétrées par (ρ, φ) de la forme

$$f_{p,\sigma}(\rho, \varphi) = \mathbf{1}_{\{D_{(\rho,\varphi)} \cap \Omega \neq \emptyset\}} \times \left[(1-p) \frac{1}{|\partial\Omega|} + p \frac{1}{\mu_g(D_{(\rho,\varphi)} \cap \Omega \neq \emptyset)} e^{-(\rho - x_M^{(1)} \cos \varphi + x_M^{(2)} \sin \varphi)^2 / 2\sigma^2} \right] \quad (2)$$

où $(x_M^{(1)}, x_M^{(2)})$ sont les coordonnées cartésiennes du point M et $|\partial\Omega|$ est le périmètre de l'image. μ_g est la mesure

gaussienne sur (ρ, φ) donnée par

$$d\mu_g(\rho, \varphi) = e^{-(\rho - x_M^{(1)} \cos \varphi + x_M^{(2)} \sin \varphi)^2 / 2\sigma^2} d\rho d\varphi \quad (3)$$

Le terme $Z_\sigma = \mu_g(D_{(\rho,\varphi)} \cap \Omega \neq \emptyset)$ est la constante de normalisation du terme gaussien : c'est la mesure des droites sous la mesure gaussienne qui intersectent l'image. Cette constante Z_σ peut se calculer et est donnée par :

$$Z_\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi \left(\frac{R_I - r_M \cos(\varphi)}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{-R_I - r_M \cos(\varphi)}{\sigma} \right) d\varphi \quad (4)$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, R_I est le rayon de l'image (son domaine est assimilé à un disque) et où on a paramétré le point M par ses coordonnées polaires (r_M, θ_M) . Les deux paramètres p et σ sont estimés par maximum de vraisemblance. Pour cela on effectue un changement de variable sur les coordonnées (ρ, φ) des droites qui sont remplacées par $(\tilde{\rho}, \tilde{\varphi})$ avec $\tilde{\rho} = \rho - r_M \cos(\varphi - \theta_M)$ et $\tilde{\varphi} = \theta_M - \varphi$ afin de centrer le repère en M . La densité de probabilité marginale sur $\tilde{\rho}$ est notée $h_{p,\sigma}$ et est donnée par :

$$h_{p,\sigma}(t) = \left[\frac{1-p}{2\pi R_I} + \frac{p}{\mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)} e^{-t^2/2\sigma^2} \right] J(t) \quad (5)$$

où J est une fonction indépendante de p et de σ . La log-vraisemblance sur les observations $\tilde{\rho}^{(1)}, \dots, \tilde{\rho}^{(N)}$ s'écrit alors

$$\mathcal{L}\mathcal{L}(\tilde{\rho}^{(1)}, \dots, \tilde{\rho}^{(N)}; p, \sigma) = \sum_{i=1}^N \log h_{p,\sigma}(\tilde{\rho}^{(i)}) \quad (6)$$

Pour estimer les paramètres p et σ on cherche donc le maximum de la log-vraisemblance. L'algorithme *EM* n'est pas approprié ici car la dépendance de la constante de normalisation du terme gaussien de la densité $h_{p,\sigma}$ en σ est complexe, et il n'existe pas de formule close pour exprimer la valeur de σ en laquelle est atteint l'extremum. De plus, il est plus robuste de maximiser la log-vraisemblance sur $h_{p,\sigma}$, qui est la densité d'une variable de dimension 1 plutôt que sur $f_{p,\sigma}$ qui porte sur une variable de dimension 2 pour laquelle on ne dispose pas d'assez d'échantillons. Les deux paramètres estimés sont donc \hat{p} et $\hat{\sigma}$ pour lesquels le maximum de la log-vraisemblance est atteint.

3. Une fois le modèle estimé, on détecte des convergences secondaires qui sont les points significatifs pour la loi $d\mu_{f_{\hat{p},\hat{\sigma}}} = f_{\hat{p},\hat{\sigma}}(\rho, \varphi)d\rho d\varphi$, c'est à dire les points tels que $\text{NFA}_{f_{\hat{p},\hat{\sigma}}}(x) \leq 1$.

3 Exemples

Afin de montrer l'intérêt de cette procédure, nous présentons trois exemples (voir Figure 1). Dans le premier exemple,

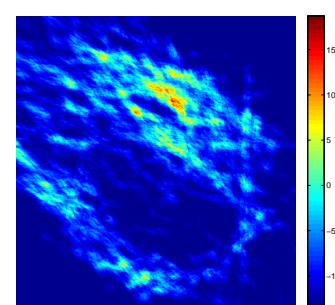
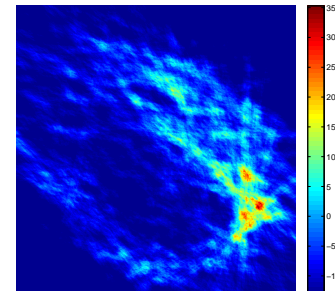
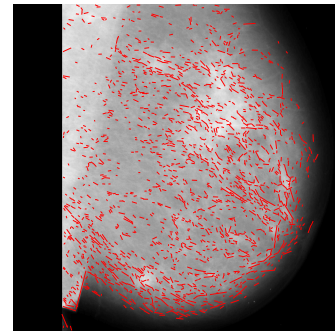
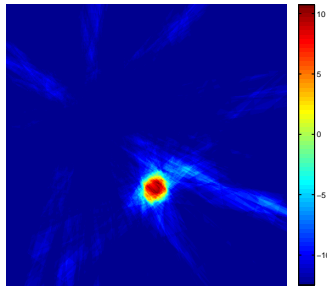
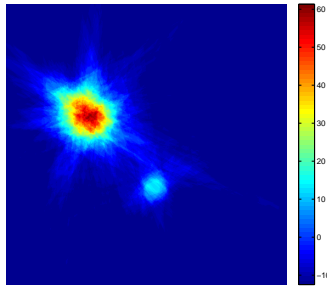
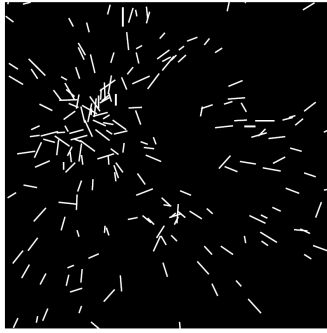


FIGURE 1 – De haut en bas : a) l’image originale avec $N = 200$ segments : la convergence principale a pour poids $p = 0.75$ et pour écart-type $\sigma = 30$, b) image montrant la valeur de $-\log(\text{NFA}_1(x))$ en tout point x , et c) image montrant la valeur de $-\log(\text{NFA}_{f_{\hat{p}, \hat{\sigma}}}(x))$ où $\hat{p} = 0.77$ et $\hat{\sigma} = 31$

qui est un exemple synthétique, des segments ont été tirés de façon i.i.d. selon un modèle de mélange qui comprend trois termes : un terme uniforme, un terme de convergence principale, et un terme de convergence secondaire. La convergence principale est significative contre le modèle uniforme, mais ne l’est plus contre le modèle estimé. La convergence secondaire est très peu significative contre le modèle uniforme, car elle est masquée par la convergence principale. Mais elle devient beaucoup plus significative contre le modèle estimé : elle a été « démasquée ».

Le deuxième exemple est une mammographie présentant une convergence « normale » principale des structures linéaires vers la région du tétou et des convergences secondaires dans les tissus. La convergence normale autour du tétou est bien détectée comme étant la plus significative contre le modèle uniforme. Quand on l’inclut au modèle en utilisant le modèle de mélange estimé, d’autres convergences apparaissent et sont des lésions potentielles.

FIGURE 2 – De haut en bas : a) l’image originale avec $N = 1736$ segments, b) image montrant la valeur de $-\log(\text{NFA}_1(x))$ en tout point x , le point le plus significatif a pour coordonnées $x_M = 619$ et $y_M = 516$, et c) image montrant la valeur de $-\log(\text{NFA}_{f_{\hat{p}, \hat{\sigma}}}(x))$ avec $\hat{p} = 0.25$ et $\hat{\sigma} = 99$.

Le troisième et dernier exemple est un exemple synthétique dans lequel des droites ont été tirées selon un mélange, comprenant deux termes, un terme uniforme et un terme de convergence principal centré en un point extérieur à l’image. Cette convergence principale est détectée contre le modèle uniforme, et elle n’est plus significative lorsqu’on l’intègre au modèle de mélange.

4 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé ici une procédure permettant de détecter de façon hiérarchique les convergences dans une image : on détecte d’abord le point de convergence principale comme étant le point le plus significatif par rapport au modèle de bruit isotrope. Et on intègre ensuite ce point dans un modèle de bruit qui est anisotrope et qui a une forme paramétrique de mélange entre une loi uniforme et une loi gaussienne centrée au point de

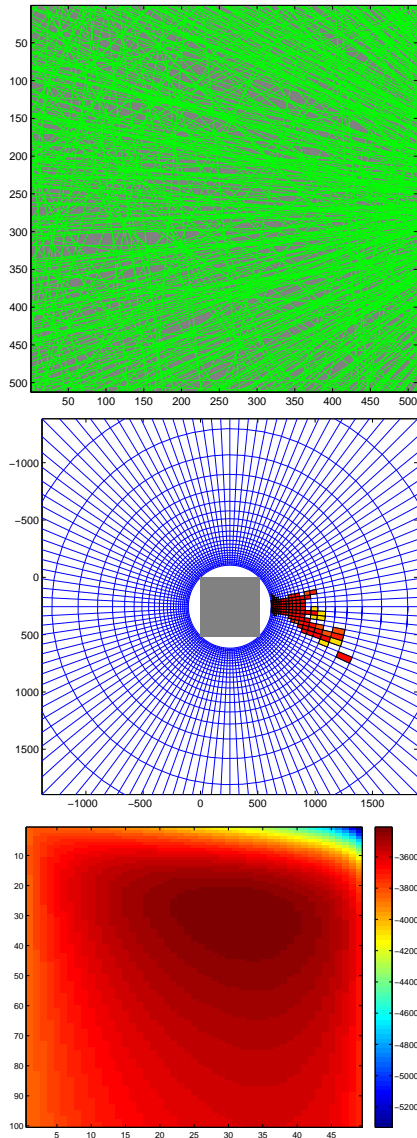


FIGURE 3 – De haut en bas : a) ensemble des droites simulées selon la loi $f_{0.6,30}$, le centre du terme gaussien a pour coordonnées $x_M = 712$, $y_M = 256$, b) détection des régions significatives contre le modèle uniforme, elles sont concentrées autour du point de convergence, la région la plus significative a pour centre $\widehat{x}_M = 695$, $\widehat{y}_M = 245$, et elle contient le point de coordonnées (x_M, y_M) c) log-vraisemblance contre $f_{p,\sigma}$ (le maximum est atteint pour $\hat{p} = 0.63$ et $\hat{\sigma} = 30$), aucune région n'est significative contre ce modèle.

convergence principale.

Ce travail est exploratoire, mais son application à des mammographies permet déjà de tester sa pertinence et montre l'effet sur les détections de la prise en compte d'une convergence principale normale. De plus, la procédure proposée ouvre de nombreuses perspectives, telles que :

- l'extension à des convergences locales. Les droites seraient remplacées par les segments dans l'image. Le modèle de bruit

pourrait alors être défini comme suit : les segments sont indépendants et répartis selon une loi (caractérisée par une densité) donnée. Pour un point x donné on compterait parmi les segments de son voisinage ceux qui convergent vers le point x à une certaine précision. On définirait alors un nouveau nombre de fausses alarmes sur les événements $K(x) \geq k$;

- la suite de la détection hiérarchique, avec des lois mélange à plus de deux termes. Ceci permettra d'obtenir une description hiérarchique complète de l'ensemble des points de convergence d'une image ;

- des questions de géométrie stochastique dans un cadre non uniforme ; en particulier l'extension de formules connues (telle que celle qui dit par exemple que la mesure sous μ_1 de l'ensemble des droites rencontrant un convexe donné est égale au périmètre de ce convexe - cf [San04]) à un cadre anisotrope est une piste de recherche théorique originale.

Références

- [ADV03] A. Almansa, A. Desolneux and S. Vamech. Vanishing point detection without any a priori information. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(4) :502–507, 2003.
- [DMM08] A. Desolneux, L. Moisan and J.-M. Morel. *From Gestalt Theory to Image Analysis : A Probabilistic Approach*. Springer-Verlag, 2008.
- [GJMR10] R. Grompone von Gioi, J. Jakubowicz, J.-M. Morel, and G. Randall. LSD : A fast line segment detector with a false detection control. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 32(4) :722–732, 2010.
- [KtB96] N. Karssemeijer and G. M te Brake. Detection of stellate distortions in mammograms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(5) :611–619, 1996.
- [Kel93] P. Kegelmeier. Evaluation of stellate lesion detection in a standard mammogram data set. *Proc. of the 1993 SPIE/SPSE Conference on Biomedical Image Processing IV and Biomedical Visualization*, volume 1905, 787–798, 1993.
- [PMBI09] G. Palma, S. Muller, I. Bloch, and R. Iordache. Convergence areas detection in digital breast tomosynthesis volumes using a contrario modeling. *In : SPIE Symposium on Medical Imaging, Lake Buena Vista, FL, USA, February 2009*.
- [San04] L. A. Santaló. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Cambridge University Press, October 2004.