

# Résolution limite dans un contexte de localisation active de sources

Mohammed Nabil EL KORSO<sup>1,3</sup>, Philippe FORSTER<sup>1</sup>, Frédéric PASCAL<sup>2</sup> et Pascal LARZABAL<sup>1</sup>

<sup>1</sup> SATIE-lab, UMR CNRS-8029, 61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France

<sup>2</sup> SONDRASupelec, 3 rue Joliot-Curie, F-91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

<sup>3</sup>Waves Material and Systems Group, LEME (EA- 4416), University Paris-Ouest Nanterre-La Defense, 50 rue de Sèvres, Ville d'Avray 92410, France

{melkorso, larzabal}@satie.ens-cachan.fr, {philippe.forster}@cva.u-paris10.fr,  
{frederic.pascal}supelec.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous étudions et analysons les performances ultimes, en termes de résolution limite, pour un problème d'estimation paramétrique dans un contexte MIMO radar. L'approche utilisée est basée sur la théorie de la détection et plus précisément en utilisant le test du rapport de vraisemblance généralisé. Cette analyse nous fournit des informations utiles quant au comportement de la résolution limite, du rapport signal à bruit minimal requis pour séparer deux sources ainsi que l'influence de la matrice de covariance du bruit et la connaissance préalable de la texture du bruit sur le pouvoir séparateur.

**Abstract** – In this paper, we study and analyze the ultimate performance in terms of resolution limit for a parametric estimation problem in a MIMO radar context. Our approach is based on the detection theory and more precisely using the generalized likelihood ratio test. This analysis provides us useful information about the behavior of the resolution limit, the minimum signal to noise ratio required to separate two sources and the influence of the noise covariance matrix and the prior knowledge of the noise texture on the sources resolvability.

## 1 Introduction

Bien qu'une multitude d'algorithmes d'estimation en traitement d'antenne soit disponible dans la littérature, leurs performances en termes de résolution limite n'ont pas été encore tout à fait traitées. La résolution limite est définie comme étant la distance minimale entre deux signaux permettant une estimation *précise* des paramètres d'intérêt [1–4].

Dans cet article, nous proposons d'étudier et d'analyser les performances ultimes, en termes de résolution limite angulaire, de l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) dans le contexte de la localisation active de sources. À cet effet, nous nous focaliserons sur la localisation de cibles à l'aide d'un radar MIMO. Dans la littérature, il existe principalement deux approches pour déterminer le seuil de résolution limite : (i) la première est basée sur la théorie de l'estimation en utilisant les bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne [5–8] (ii) la seconde est basée sur la théorie de la détection en utilisant des tests d'hypothèses binaires [9–11]. Notre choix se portera sur la seconde option car celle-ci définit un cadre statistique plus rigoureux [10].

Dans notre scénario nous considérons la présence de deux cibles proches entre elles. Une cible dont la direc-

tion d'arrivée est connue (cible alliée) et une autre cible dont la direction d'arrivée est inconnue (cible ennemie). L'objectif est alors de calculer le seuil de résolution limite ou de façon équivalente le rapport signal à bruit minimum, noté  $RSB_{\min}$ , requis permettant de distinguer les deux cibles en utilisant un radar MIMO co-localisé (c'est à dire, un radar MIMO dont l'émetteur et le récepteur sont étroitement espacés). La stratégie adoptée pour mener à bien cette étude est l'utilisation de la théorie de la détection, plus précisément, on utilisera le test du rapport de vraisemblance généralisé (TRVG). Ce choix est motivé par le fait que le TRVG est asymptotiquement uniformément le plus puissant test parmi tous les tests statistiques invariants [12]. Ceci représente l'une des plus importantes propriétés souhaitables.

## 2 Modèle des observations

Les observations issues d'un radar MIMO (dans le cas d'antennes émettrice et réceptrice étroitement espacées entre elles) qui reçoit un signal réfléchi sur deux cibles sont données pour la  $\ell^{\text{ème}}$  impulsion par

$$\mathbf{X}_\ell = \sum_{m=1}^2 \rho_m e^{2i\pi f_m \ell} \mathbf{a}_R(\omega_m) \mathbf{a}_T(\omega_m)^T \mathbf{S} + \mathbf{B}_\ell, \ell \in [0 : L-1],$$

où  $L$ ,  $\rho_m$  et  $f_m$  représentent, respectivement, le nombre d'impulsion, un coefficient proportionnel à la section efficace du radar et la fréquence Doppler normalisée de la  $m^{\text{ème}}$  cible.  $T$ ,  $N_{\mathcal{T}}$  et  $N_{\mathcal{R}}$  sont, respectivement, le nombre d'observations, le nombre de capteurs de l'émetteur et le nombre de capteurs à la réception. Dans la suite, les symboles  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{R}$  représenteront la partie émettrice et la partie réceptrice du radar MIMO. De plus, la matrice des signaux sources, de taille  $N_{\mathcal{T}} \times T$ , est donnée par  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_0, \dots, \mathbf{s}_{N_{\mathcal{T}}-1}]^T$  où  $\mathbf{s}_{N_t} = [s_{N_t}(1), \dots, s_{N_t}(T)]^T$  et  $N_t \in \{0, \dots, N_{\mathcal{T}} - 1\}$ .

Les formes d'ondes sont supposées orthogonales avec  $\mathbf{S}\mathbf{S}^H = \mathbf{S}^*\mathbf{S}^T = T\mathbf{I}_{N_{\mathcal{T}}}$ .  $\mathbf{B}_\ell$  représente la matrice du bruit de dimension  $N_{\mathcal{R}} \times T$ . Les vecteurs directionnels de transmission et de réception sont donnés par  $\mathbf{a}_{\mathcal{T}}(\cdot)$  et  $\mathbf{a}_{\mathcal{R}}(\cdot)$ . Le  $i^{\text{ème}}$  élément de chaque vecteur directionnel est donné par  $[\mathbf{a}_{\mathcal{T}}(\omega_m)]_i = e^{j\omega_m d_i^{(\mathcal{T})}}$  et  $[\mathbf{a}_{\mathcal{R}}(\omega_m)]_i = e^{j\omega_m d_i^{(\mathcal{R})}}$  où  $\omega_m = \frac{2\pi}{\nu} \sin(\theta_m)$  avec  $\theta_m$  l'angle de la  $m^{\text{ème}}$  cible vue de l'antenne émettrice et réceptrice et  $\nu$  la longueur d'onde, avec, sans perte de généralité,  $\omega_2 > \omega_1$ . Les distances entre le premier capteur et le  $i^{\text{ème}}$  capteur sont notés  $d_i^{(\mathcal{T})}$  et  $d_i^{(\mathcal{R})}$  pour l'antenne de transmission et pour l'antenne de réception, respectivement. En considérant le filtre adapté, notre modèle paramétrique peut s'écrire

$$\mathbf{Y}_\ell = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathbf{X}_\ell \mathbf{S}^H = \sum_{m=1}^M \alpha_m e^{2i\pi f_m \ell} \mathbf{a}_{\mathcal{R}}(\omega_m) \mathbf{a}_{\mathcal{T}}(\omega_m)^T + \mathbf{Z}_\ell,$$

où  $\mathbf{Z}_\ell = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathbf{B}_\ell \mathbf{S}^H$  et  $\alpha_m = \sqrt{T} \rho_m$ . La concaténation de tous ces éléments sous forme de vecteur est donnée par

$$\mathbf{y} = [\text{vec}(\mathbf{Y}_0)^T \dots \text{vec}(\mathbf{Y}_{L-1})^T]^T = \mathbf{x} + \mathbf{z},$$

où  $\mathbf{z} = [z_0^T, \dots, z_{L-1}^T]^T$  avec  $z_\ell = \text{vec}(\mathbf{Z}_\ell)$  et

$\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M \alpha_m \mathbf{g}_m$ , où

$$\mathbf{g}_m = \left( \mathbf{c}(f_m) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{T}}(\omega_m^{(\mathcal{T})}) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{R}}(\omega_m^{(\mathcal{R})}) \right) \text{ et}$$

$\mathbf{c}(f_m) = [1 \ e^{2i\pi f_m} \ \dots \ e^{2i\pi f_m(L-1)}]^T$  et  $\otimes$  représente le produit de Kronecker.

Pour des raisons de simplification et de clarté, on supposera dans la suite que :

- **H1)** Le bruit, issu d'un modèle gaussien composé, à pour statistique  $\mathbf{z}|\tau \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \tau \mathbf{M})$ , avec une matrice de covariance connue  $\mathbf{M}$  et où  $\tau$  est un paramètre aléatoire positif inconnu appelé texture.
- **H2)** Les coefficients proportionnels à la section efficace du radar,  $\alpha_i$ , sont des paramètres déterministes mais inconnus.
- Et enfin, **H3)** les fréquences Dopplers normalisées,  $f_m$ , sont supposées identiques et égales à  $f$ , voire égales à zéro pour des cibles non mobiles.

### 3 Caractérisation du $\text{RSB}_{\min}$

Pour calculer le seuil de résolution limite (SRL), nous utilisons le critère basé sur le test d'hypothèses. L'hypothèse

$\mathcal{H}_0$  représente le cas où les deux cibles sont combinées en une seule cible (c'est à dire,  $\omega_1 = \omega_2$ ), alors que l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  incarne la situation où les deux cibles sont résolues (c'est à dire,  $\omega_1 \neq \omega_2$ ).

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \delta = 0, \\ \mathcal{H}_1 : & \delta > 0. \end{cases} \quad (1)$$

La séparation  $\delta$ , étant un paramètre inconnu, il est impossible de concevoir un test de détection du type Neyman-Pearson. L'alternative la plus utilisée en traitement du signal est alors l'utilisation du test du rapport de vraisemblance généralisé (TRVG) dont la statistique est donnée par

$$G(\mathbf{y}) = \frac{\max_{\delta, \boldsymbol{\varphi}_1} p(\mathbf{y}|\delta, \boldsymbol{\varphi}_1, \mathcal{H}_1)}{\max_{\boldsymbol{\varphi}_0} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\varphi}_0, \mathcal{H}_0)} = \frac{p(\mathbf{y}|\hat{\delta}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{y}|\hat{\boldsymbol{\varphi}}_0, \mathcal{H}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \eta',$$

où  $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\varphi}_0, \mathcal{H}_0)$  et  $p(\mathbf{y}|\delta, \boldsymbol{\varphi}_1, \mathcal{H}_1)$  représentent la densité de probabilité des observations sous  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ , respectivement, et où  $\eta'$ ,  $\hat{\delta}$  et  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i$  sont le seuil de détection, l'estimateur au sens du MV de  $\delta$  sous  $\mathcal{H}_1$  et l'estimateur au sens du MV du vecteur  $\boldsymbol{\varphi}_i$  (qui contient tous les paramètres de nuisance) sous  $\mathcal{H}_i$ ,  $i = 0, 1$ . Malheureusement, la solution analytique d'un tel test n'existe pas du fait de la non-linéarité du modèle des observations par rapport aux paramètres inconnus [13].

De ce fait, nous proposons d'approximer le modèle d'observation en nous basant sur l'hypothèse que  $\delta$  est proche de zéro (cette hypothèse est soutenue par le fait que les algorithmes à haute résolution ont, asymptotiquement, un pouvoir de résolution infini.)

Par conséquent, le modèle approché (à l'aide d'un développement limité à l'ordre deux en  $\delta = 0$ ) s'écrit comme :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{z} = [\mathbf{k} \ \mathbf{W}]\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{z}, \quad (2)$$

où  $\boldsymbol{\zeta} = [\alpha_1 + \alpha_2, \ \alpha_2\delta, \ -\alpha_2\delta^2]$ ,  $\mathbf{G} = [\mathbf{k}, \ \boldsymbol{\varrho}_2, \ \boldsymbol{\varrho}_3]$  et  $\mathbf{W} = [\boldsymbol{\varrho}_2, \ \boldsymbol{\varrho}_3]$ , où  $\mathbf{k} = \mathbf{c}(f) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{T}}(\omega_1) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{R}}(\omega_1)$ ,  $\boldsymbol{\varrho}_2 = \mathbf{c}(f) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{T}}(\omega_1) \otimes \dot{\mathbf{a}}_{\mathcal{T}}(\omega_1) + \mathbf{c}(f) \otimes \dot{\mathbf{a}}_{\mathcal{T}}(\omega_1) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{R}}(\omega_1)$ , et  $\boldsymbol{\varrho}_3 = \mathbf{c}(f) \otimes \dot{\mathbf{a}}_{\mathcal{T}}(\omega_1) \otimes \dot{\mathbf{a}}_{\mathcal{R}}(\omega_1) + \frac{1}{2}\mathbf{c}(f) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{T}}(\omega_1) \otimes \ddot{\mathbf{a}}_{\mathcal{R}}(\omega_1) + \frac{1}{2}\mathbf{c}(f) \otimes \ddot{\mathbf{a}}_{\mathcal{T}}(\omega_1) \otimes \mathbf{a}_{\mathcal{R}}(\omega_1)$ , où  $\dot{\mathbf{a}}_{\mathcal{T}}(\cdot) \triangleq \mathbf{a}_{\mathcal{T}}(\cdot) \odot \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$ , et  $\ddot{\mathbf{a}}_{\mathcal{T}}(\cdot) \triangleq \mathbf{a}_{\mathcal{T}}(\cdot) \odot \mathbf{d}_{\mathcal{T}} \odot \mathbf{d}_{\mathcal{T}}$ ,  $\mathbf{d}_{\mathcal{T}} = [d_0^{(\mathcal{T})} \ d_1^{(\mathcal{T})} \ \dots \ d_{N-1}^{(\mathcal{T})}]^T$  avec  $\mathbf{d}_{\mathcal{R}} = [d_0^{(\mathcal{R})} \ d_1^{(\mathcal{R})} \ \dots \ d_{N-1}^{(\mathcal{R})}]^T$ . On obtient les mêmes relations avec  $\dot{\mathbf{a}}_{\mathcal{R}}(\cdot)$  et  $\ddot{\mathbf{a}}_{\mathcal{R}}(\cdot)$ .

Par conséquent, le test d'hypothèses binaires donné en (1) devient

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \mathbf{y} = \mathbf{k}\beta + \mathbf{z}, \text{ avec } \mathbf{z}|\tau \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \tau \mathbf{M}) \\ \mathcal{H}_1 : & \mathbf{y} = \mathbf{G}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{z}, \text{ avec } \mathbf{z}|\tau \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \tau \mathbf{M}), \end{cases} \quad (3)$$

où  $\mathbf{k}, \mathbf{G}, \mathbf{M}$  représentent les paramètres connus,  $\boldsymbol{\zeta}$  et  $\beta$  représentent les paramètres inconnus avec  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$ . Ainsi, la statistique est donnée par :

$$\Lambda(\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}; \hat{\boldsymbol{\zeta}}_1, \mathbf{M}, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{y}; \hat{\beta}_0, \mathbf{M}, \mathcal{H}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \eta', \quad (4)$$

où  $\hat{\zeta}_1$  et  $\hat{\beta}_0$  représentent, respectivement, les estimées du MV sous  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_0$  et sont donnés par

$$\hat{\zeta}_1 = (\mathbf{G}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}$$

et

$$\hat{\beta}_0 = (\mathbf{k}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{k})^{-1} \mathbf{k}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}.$$

La statistique sera alors donnée par

$$\Lambda(\mathbf{y}) = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\pi\tau)^{TN\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathbf{M}|} \exp\left(-(\mathbf{y} - \mathbf{G}\hat{\zeta}_1)^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{G}\hat{\zeta}_1)\right) p(\tau) d\tau}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\pi\tau)^{TN\mathcal{R}}} \frac{1}{|\mathbf{M}|} \exp\left(-(\mathbf{y} - \mathbf{k}\hat{\beta}_0)^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{k}\hat{\beta}_0)\right) p(\tau) d\tau}.$$

Sans connaissance *a priori* de la distribution de  $\tau$ , une alternative est de considérer  $\tau$  comme étant un paramètre déterministe mais inconnu sous les deux hypothèses [14, eq (9)]. L'estimée au sens du MV de ce dernier est donnée par

$$\hat{\tau}_1 = \frac{1}{\mathcal{L}} \left( \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right)^H \mathbf{P}_{\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G}}^\perp \left( \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right)$$

et

$$\hat{\tau}_0 = \frac{1}{\mathcal{L}} \left( \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right)^H \mathbf{P}_{\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{k}}^\perp \left( \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right),$$

où  $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}$  représente le projecteur orthogonal sur les colonnes de la matrice  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{F}}$ .

Ceci nous conduit à une nouvelle statistique donnée par

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{y}) = \left( \tilde{\Lambda}(\mathbf{y}) \right)^{\frac{1}{L}} - 1 \text{ où}$$

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}; \hat{\tau}_1, \hat{\zeta}_1, \mathbf{M}, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{y}; \hat{\tau}_0, \hat{\beta}_0, \mathbf{M}, \mathcal{H}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \eta',$$

Après des efforts calculatoires, on peut montrer que

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{y}) = \frac{\left( \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right)^H \mathbf{P}_{\Psi} \left( \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right)}{\left( \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right)^H \mathbf{P}_{\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G}}^\perp \left( \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \tilde{\eta} = (\eta')^{\frac{1}{L}} - 1, \quad (5)$$

avec

$$\Psi = \mathbf{P}_{\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{k}}^\perp \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{W}.$$

En utilisant une décomposition orthogonal des deux projecteurs  $\mathbf{P}_{\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G}}^\perp = \mathbf{U}' \mathbf{U}'^H$  et  $\mathbf{P}_{\Psi} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H$  avec  $\mathbf{U}'^H \mathbf{U}' = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$ , on réécrit la statistique comme suit

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{y}) = \frac{\left( \mathbf{U}^H \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right)^H \left( \mathbf{U}^H \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right)}{\left( \mathbf{U}'^H \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right)^H \left( \mathbf{U}'^H \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \right)}.$$

Ainsi, par construction, on peut montrer que

$$\mathbf{U}^H \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \sim \begin{cases} \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) & \text{sous } \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{CN}(\mathbf{U}^H \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{W} \gamma, \mathbf{I}) & \text{sous } \mathcal{H}_1 \end{cases}$$

et

$$\mathbf{U}'^H \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y} \sim \begin{cases} \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) & \text{sous } \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) & \text{sous } \mathcal{H}_1 \end{cases}.$$

Ceci nous conduit à la loi de distribution de la statistique

$$\frac{2r'}{2r} \tilde{\Lambda}(\mathbf{y}) \sim \begin{cases} F_{2r, 2r'}, \mathcal{H}_0 \\ F_{2r, 2r'}(\lambda(P_{fa}, P_d)), \mathcal{H}_1, \end{cases}$$

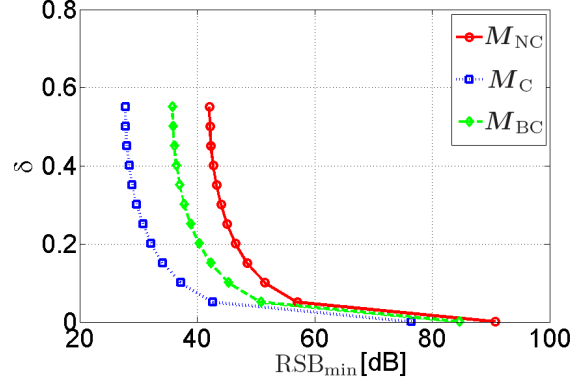


FIG. 1: Effet de la matrice de covariance sur le  $\text{RSB}_{\min}$  avec  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ .

$$\text{avec } (2r, 2r') = \left( \text{rang}(\mathbf{P}_{\Psi}), \text{rang}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G}}^\perp\right) \right),$$

$$\text{et } \lambda(P_{fa}, P_d) = 2\gamma^H \left( \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{W} \right)^H \mathbf{P}_{\Psi} \left( \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{W} \right) \gamma$$

où  $P_{fa}$  et  $P_d$  représentent la probabilité de fausse alarme et la probabilité de détection, respectivement. En pratique le paramètre de translation  $\lambda(P_{fa}, P_d)$  peut être estimé numériquement comme solution de  $Q_{F_{2r, 2r'}}^{-1}(P_{fa}) = Q_{F_{2r, 2r'}}^{-1}(\lambda)(P_d)$ , où  $Q_{F_{2r, 2r'}}^{-1}(\cdot)$  est le quantile d'une  $F_{2r, 2r'}$ . On choisira dans la suite, la mesure du RSB comme étant

$$\text{RSB} = \frac{\text{tr}\{\mathbf{S}\mathbf{S}^H\}}{T \|\mathbf{M}\|}.$$

Par conséquent, le  $\text{RSB}_{\min}$  en utilisant un radar MIMO co-localisé est finalement donné par

$$\text{RSB}_{\min} = \frac{N_{\mathcal{T}} \lambda(P_{fa}, P_d)}{2\gamma^H \left( \tilde{\mathbf{M}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{W} \right)^H \mathbf{P}_{\Psi} \left( \tilde{\mathbf{M}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{W} \right) \gamma} \quad \text{avec} \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{\|\mathbf{M}\|}.$$

## 4 Analyse numérique

Pour ces simulations, nous avons considéré une antenne ULA au niveau de l'émetteur et au niveau du récepteur composés de 6 capteurs avec une distance inter-capteurs égale à la moitié de la longueur d'onde.

Le nombre d'observations est égal à  $T = 100$  avec  $L = 4$  échantillons par période d'impulsion. Par manque d'espace, nous nous limiterons à l'illustration de l'effet de la matrice de covariance sur le  $\text{RSB}_{\min}$ . Considérons, par exemple, trois types de matrices de covariance:

- i) un bruit non corrélé avec  $\mathbf{M}_{\text{NC}} = \mathbf{I}$ ,
- ii) un bruit corrélé où le  $(q, p)$ -ième élément de la matrice de covariance  $\mathbf{M}_{\text{C}}$  [15] est donné par  $[\mathbf{M}_{\text{C}}]_{p,q} = \sigma^2 0.9^{|p-q|} e^{j\frac{\pi}{2}(p-q)}$ , et

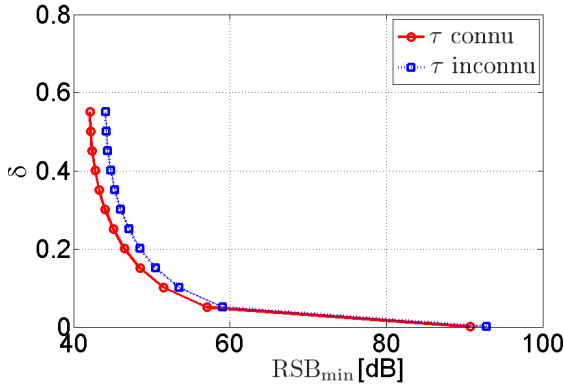


FIG. 2: Effet de la connaissance parfaite du paramètre  $\tau$  sur le  $\text{RSB}_{\min}$  avec  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ .

iii) un bruit partiellement corrélé en considérant une matrice bloc diagonale notée  $\mathbf{M}_{\text{BC}}$ . Par exemple, pour la Fig. 1 on a considéré  $\mathbf{M}_{\text{BC}} = \text{bdiag}(\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2)$  avec  $[\boldsymbol{\Sigma}_1]_{p,q} = [\boldsymbol{\Sigma}_2]_{p,q} = \sigma^2 0.9^{|p-q|} e^{j\frac{\pi}{2}(p-q)}$ .

La Fig. 1 illustre, dans le cas où les matrices de covariances sont connues, une forte corrélation semble améliorer la résolubilité. Enfin, dans la Fig. 2, nous avons quantifié l'effet de la connaissance parfaite de  $\tau$  par rapport au cas où  $\tau$  est inconnu donné par (6). Cette différence est approximativement égale à 2 dB.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié les performances ultimes, en termes de résolution limite angulaire, de l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) dans un contexte MIMO radar. Cette analyse nous a permis de caractériser les performances ultimes en termes de résolution limite sous forme d'expression analytique du  $\text{RSB}_{\min}$ . Cette expression nous fournit des informations utiles quant au comportement du  $\text{RSB}_{\min}$  par rapport à la probabilité de fausse alarme, la probabilité de détection, l'influence de la matrice de covariance du bruit et la connaissance préalable de la texture du bruit.

## References

[1] K. Sharman and T. Durrani, "Resolving power of signal subspace methods for finite data lengths," in *Proc. of IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Florida, USA, 1995, pp. 1501–1504.

[2] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos, "Statistical resolution limit for multiple signals and parameters of interest," in *Proc. of IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Dallas, TX, 2010.

[3] S. T. Smith, "Accuracy and resolution bounds for adaptive sensor array processing," in *Proceedings in*

*the ninth IEEE SP Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, 1998, pp. 37–40.

[4] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos, "Statistical resolution limit for the multidimensional harmonic retrieval model: Hypothesis test and Cramér-Rao bound approaches," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. special issue on Advances in Angle-of-Arrival and Multidimensional Signal Processing for Localization and Communications, doi:10.1186/1687-6180-2011-12, pp. 1–14, Jul. 2011.

[5] E. Dilaveroglu, "Nonmatrix Cramér-Rao bound expressions for high-resolution frequency estimators," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, no. 2, pp. 463–474, Feb. 1998.

[6] S. T. Smith, "Statistical resolution limits and the complexified Cramér Rao bound," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, pp. 1597–1609, May 2005.

[7] J.-P. Delmas and H. Abeida, "Statistical resolution limits of DOA for discrete sources," in *Proc. of IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 4, Toulouse, France, 2006, pp. 889–892.

[8] M. N. E. Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos, "Statistical resolution limit of the uniform linear cocompact orthogonal loop and dipole array," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 59, no. 1, pp. 425–431, Jan. 2011.

[9] M. Shahram and P. Milanfar, "On the resolvability of sinusoids with nearby frequencies in the presence of noise," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 7, pp. 2579–2585, Jul. 2005.

[10] Z. Liu and A. Nehorai, "Statistical angular resolution limit for point sources," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 55, no. 11, pp. 5521–5527, Nov. 2007.

[11] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos, "On the asymptotic resolvability of two point sources in known subspace interference using a glrt-based framework," *Signal Processing, Elsevier*, vol. 92, pp. 2471–2483, Oct. 2012.

[12] E. L. Lehmann, *Testing Statistical Hypothesis*. New York: Wiley, 1989.

[13] H. L. Van Trees, *Detection, Estimation and Modulation theory: Optimum Array Processing*. New York: Wiley, 2002, vol. 4.

[14] F. Gini and A. Farina, "Vector subspace detection in compound-Gaussian clutter. Part I: survey and new results," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 38, pp. 1295–1311, Apr. 2002.

[15] M. Viberg, P. Stoica, and B. Ottersten, "Maximum likelihood array processing in spatially correlated noise fields using parameterized signals," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, no. 4, pp. 996–1004, Apr. 1997.