

Détection séquentielle d'un signal transitoire dynamique dans les systèmes à sécurité critique

Blaise Kévin GUEPIE¹, Lionel FILLATRE², Igor NIKIFOROV¹

¹ICD - LM2S - Université de Technologie de Troyes - UMR STMR - CNRS
12, rue Marie Curie - B.P. 2060 - 10010 Troyes cedex - France

²Laboratoire d'Informatique, Signaux et Systèmes de Sophia-Antipolis (I3S)
UMR7271 - UNS CNRS - CS 40121, 06903 Sophia Antipolis CEDEX - France

blaise.guepie@utt.fr, lionel.fillatre@i3s.unice.fr, igor.nikiforov@utt.fr

Résumé – La détection d'un changement brusque dans les systèmes à sécurité critique implique l'utilisation d'un critère qui vise la minimisation de la pire probabilité de détection manquée sous contrainte de la pire probabilité de fausse alarme pour une fenêtre de taille donnée. Lorsque le signal entraînant le changement brusque est dynamique, une difficulté supplémentaire s'ajoute à la détection de celui-ci à cause de la multiplicité des hypothèses alternatives. Cet article propose un algorithme adapté à la détection de ce type de signal dans les systèmes à sécurité critique.

Abstract – Detecting an abrupt change in safety-critical applications implies using a criterion which aims to minimize the worst-case probability of missed detection under constraint on the worst-case probability of false alarm for a given window size. When the signal causing the abrupt change is dynamic, an extra difficulty adds to its detection because of the plurality of alternative hypothesis. This paper proposes an adapted algorithm to the detection of transient dynamic signal with constant sign in safety-critical applications.

1 Introduction et motivation

La surveillance des systèmes à sécurité critiques tels qu'un réseau de distribution d'eau potable constitue un objectif primordial dans le domaine de la sécurité globale des systèmes. De ce fait, nous souhaitons détecter séquentiellement et de façon fiable tout changement survenant dans leur fonctionnement. Les travaux de [6, 7] et [8] traitent de la détection de signaux transitoires constants. Or, la modélisation du changement de la qualité de l'eau potable se manifeste par la présence d'un signal transitoire dynamique [1, 2]. Malheureusement, la détection fiable d'un signal de ce type a été peu étudiée. La détection d'une anomalie temporaire nécessite le contrôle de deux indicateurs statistiques antagonistes : la probabilité de fausse alarme pour une période donnée et la probabilité de non-détection. Il s'en suit que les critères de Lorden [5] et Lai [3] sont inappropriés.

Cet article propose une extension des résultats précédents [1] obtenus pour un profil transitoire constant au cas d'un profil transitoire dynamique de signe constant. Le test de Somme Cumulée à Fenêtre Limitée de Seuils Variables (Variable Threshold Window Limited CUSUM, VTWL CUSUM, en anglais), initialement proposé dans [1], est généralisé à la détection d'un signal transitoire avec un profil variable dans le temps mais tou-

jours de même signe. Les performances de cet algorithme sont établies au regard des indicateurs statistiques précédemment mentionnés. Dans le cas où le signal transitoire est connu à un coefficient multiplicatif près, la valeur minimale de ce coefficient qui rend le signal transitoire détectable est explicitement calculée.

2 Algorithme de détection d'un signal transitoire de signe constant

Supposons sans perte de généralité que le signal transitoire qu'il faut détecter provient d'une contamination d'un réseau d'eau potable. Le contaminant est injecté au noeud N_x . Ce dernier arrive au noeud N_j à un instant ν inconnu et sa durée est L . La concentration de chlore libre mesurée est alors donnée par le modèle [1, 2] :

$$y(n) = \begin{cases} -\xi(n) & \text{si } n < \nu \text{ ou } n \geq \nu + L \\ b(n - \nu + 1) - \xi(n) & \text{si } \nu \leq n < \nu + L \end{cases}, \quad (1)$$

où $b(n - \nu + 1) > 0$ est le produit de la vitesse de réaction du chlore libre μ_c et du temps de parcours $\delta_{xj}(n)$ de l'eau entre N_x et N_j . La suite $(\xi(n))_{n \geq 1}$ est indépendante, gaussienne, identiquement distribuée de moyenne nulle et de variance σ^2 connue. Notons $\mathbb{P}_\nu(\cdot)$ la mesure de probabilité et $\mathbb{E}_\nu(\cdot)$ l'espérance lorsque la contamination est associée à l'ins-

Ce travail est financé par l'Agence Nationale de Recherche à travers le programme Concepts, Systèmes et Outils pour la Sécurité Globale (ANR-CSOSG, Projet ANR-08-SECU-013-02).

tant ν . Le cas $\nu = \infty$ correspond à l'absence de contamination : $\mathbb{P}_\infty(\cdot) = \mathbb{P}_0(\cdot)$ et $\mathbb{E}_\infty(\cdot) = \mathbb{E}_0(\cdot)$.

Comme nous l'avons précédemment mentionné, les critères classiques d'optimalité de Lorden [5] et Lai [3] favorisent la détection rapide d'un signal. Or, détecter rapidement n'implique pas une bonne probabilité de détection. Nous suggérons, à la place des critères sus-mentionnés, de minimiser la probabilité que le retard de détection dépasse une valeur prescrite L (qui est souvent la durée du signal). L'instant de rupture étant inconnu, cette minimisation doit s'effectuer pour l'instant de rupture le plus défavorable : $\sup_{\nu \geq 1} \mathbb{P}_\nu(T - \nu + 1 > L \mid T \geq \nu)$. En ce qui concerne le taux de fausses alarmes, nous souhaitons que sa valeur soit inférieure à une constante fixée α pour toute fenêtre de taille m_α , ce qui revient à borner la plus grande fenêtre de fausse alarme $\sup_{\ell \geq 1} \mathbb{P}_0(\ell \leq T < \ell + m_\alpha) \leq \alpha$. D'autre part, afin de tenir compte d'une large gamme de détecteurs, y compris ceux à fenêtre glissante qui nécessitent de collecter L observations avant usage, nous utilisons le critère introduit dans [1] :

$$\inf_{T \in K_\alpha} \left\{ \overline{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T) = \sup_{\nu \geq L} \mathbb{P}_\nu(T - \nu + 1 > L \mid T \geq \nu) \right\}, \quad (2)$$

parmi tous les instants d'arrêt $T \in K_\alpha$ satisfaisant

$$K_\alpha = \left\{ T : \overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T; m_\alpha) = \sup_{\ell \geq L} \mathbb{P}_0(\ell \leq T < \ell + m_\alpha) \leq \alpha \right\}. \quad (3)$$

Il est établi dans [1] que le test de VTWL CUSUM est une solution raisonnable pour détecter un signal transitoire constant. Nous allons étendre cet algorithme à un signal transitoire dynamique de signe constant.

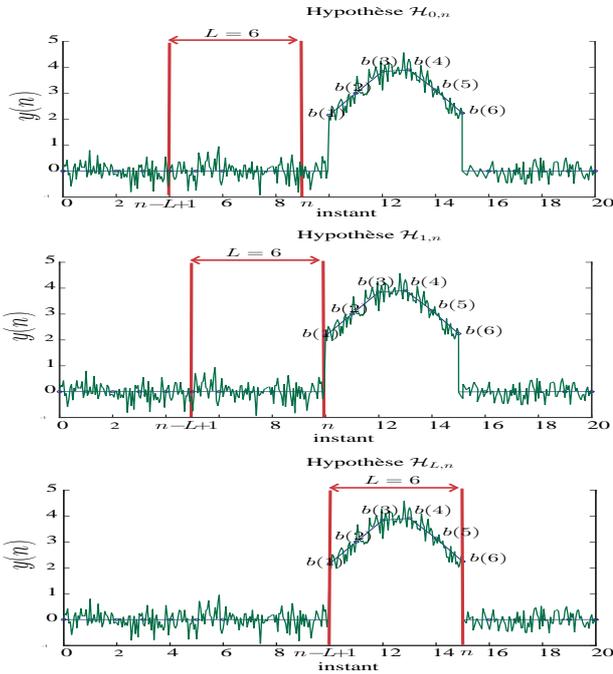


FIGURE 1 – Aperçu des hypothèses $\mathcal{H}_{0,n}$, $\mathcal{H}_{1,n}$ et $\mathcal{H}_{L,n}$.

À chaque instant n , on compte le nombre d'observations du vecteur $(y(n-L+1), \dots, y(n))$ qui subissent l'impact d'un

signal transitoire. Il y a donc $L+1$ hypothèses possibles qui sont notées $\mathcal{H}_{k,n}$ pour $0 \leq k \leq L$. Ces hypothèses sont illustrées par la figure 1 et décrites de la façon suivante :

- $\mathcal{H}_{0,n}$ traduit qu'aucune observation ne subit d'impact, c'est à dire que $n < \nu$,
- $\mathcal{H}_{1,n}$ traduit que seule $y(n)$ subit un impact, c'est à dire que $\nu = n$,
- ...
- $\mathcal{H}_{L,n}$ traduit que toutes les observations subissent l'impact, c'est à dire que $\nu = n - L + 1$

Notons $f_{k,n}(\cdot)$ la densité de probabilité associée à l'hypothèse $\mathcal{H}_{k,n}$ pour $0 \leq k \leq L$. L'instant d'arrêt du VTWL CUSUM appliqué au signal transitoire de signe constant, noté T_{VTWL} , est alors défini par

$$T_{\text{VTWL}} = \inf \left\{ n \geq L : \max_{1 \leq k \leq L} [\tilde{S}_k^n - h(k)] \geq 0 \right\},$$

$$\tilde{S}_k^n = \ln \left(\frac{f_{k,n}(y(n-L+1), \dots, y(n))}{f_{0,n}(y(n-L+1), \dots, y(n))} \right). \quad (4)$$

Le choix des seuils $h(1), \dots, h(L)$ se fait au moyen d'une optimisation selon le critère (2)-(3). Cette optimisation repose habituellement sur les expressions des pires probabilités de fausses décisions. Ces dernières étant très difficiles à obtenir, nous proposons d'utiliser à la place leurs bornes supérieures données par le théorème subséquent.

Théorème 1.

Considérons le test de (4) et posons $\mathbf{b} = (b(1), \dots, b(L))$.

1. La pire probabilité de détection manquée $\overline{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T_{\text{VTWL}}; \mathbf{b})$ est bornée supérieurement par

$$\overline{\mathbb{P}}_{\text{md}}(T_{\text{VTWL}}; \mathbf{b}) \leq G_d(h(1), \dots, h(L)), \quad (5)$$

où $G_d(h(1), \dots, h(L)) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi \left(\frac{\sigma h(L)}{\|\mathbf{b}\|} - \frac{\|\mathbf{b}\|}{2\sigma} \right)$ et $\|\mathbf{b}\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbf{b} .

2. La pire probabilité de fausse alarme $\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{VTWL}}; m_\alpha)$ pour la période m_α avant changement est atteinte lorsque $\ell = L$:

$$\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{VTWL}}; m_\alpha) = \mathbb{P}_0(L \leq T_{\text{VTWL}} < L + m_\alpha).$$

3. La pire probabilité de fausse alarme $\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{VTWL}}; m_\alpha)$ pour la période m_α avant changement est bornée supérieurement par

$$\overline{\mathbb{P}}_{\text{fa}}(T_{\text{VTWL}}; m_\alpha) \leq H_d(h(1), \dots, h(L)),$$

$$H_d(h(1), \dots, h(L)) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \left[\prod_{k=1}^L \Phi \left(\frac{h(k) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k [b(i)]^2}{\frac{1}{\sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^k [b(i)]^2}} \right) \right]^{m_\alpha}.$$

La démonstration de ce théorème est une extension de la démonstration proposée dans [1] lorsque le signal \mathbf{b} est constant, c'est-à-dire lorsque $b(i) = \theta_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, L\}$. Le fait de borner la pire probabilité de détection manquée du

VTWL CUSUM est important. Cela permet en effet d'estimer la probabilité la plus défavorable pour celui-ci de détecter un signal transitoire de signe constant. Ceci signifie que, en général, la probabilité réelle de manquer une détection est meilleure que celle du théorème. Le second point du théorème montre que lorsqu'on considère le VTWL CUSUM, la fenêtre $[L; L + m_\alpha - 1]$ est celle qui produit le plus de fausses alarmes parmi toutes les fenêtres de taille m_α . Cela sous-entend que l'exigence d'un niveau maximal du taux de fausses alarmes pour n'importe quelle fenêtre de taille m_α se réduit à l'exigence de ce niveau maximal pour la fenêtre $[L; L + m_\alpha - 1]$. La fonction $H_d(h(1), \dots, h(L))$ du troisième point permet de calculer la probabilité de fausse alarme la plus élevée (la plus défavorable) du VTWL CUSUM en fonction des seuils. Ces résultats coïncident avec les bornes trouvées dans l'article [1] lorsque le signal est constant.

Les bornes supérieures des pires probabilités de fausses décisions étant définies, nous procédons à l'optimisation des seuils. Autrement dit, il s'agit de rechercher les valeurs de $h(1), \dots, h(L)$ pour lesquelles $G_d(h(1), \dots, h(L))$ atteint sa valeur minimale $\bar{\alpha}_1$ lorsque $H_d(h(1), \dots, h(L))$ est fixée à $\bar{\alpha}_0$. Les résultats de cette optimisation sont présentés dans le théorème suivant.

Théorème 2.

1. Pour tout profil $\mathbf{b} = (b(1), \dots, b(L))$ décrit dans (1), l'optimisation du VTWL CUSUM conduit au test de la Moyenne Glissante Finie (Finite Moving Average, FMA, en anglais) donné par :

$$T_{FMA}(h) = \inf \left\{ n \geq L : \sum_{i=1}^L b(i)y(n-L+i) \geq h \right\},$$

$$h = \sigma \|\mathbf{b}\| \Phi^{-1} \left[\left(1 - \bar{\alpha}_0^*\right)^{\frac{1}{m_\alpha}} \right], \quad (6)$$

où $\Phi^{-1}(\cdot)$ est l'inverse de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

2. Supposons que les bornes supérieures des pires probabilités de fausses décisions sont choisies telles que $0 < \bar{\alpha}_0^* < 1$, $0 < \bar{\alpha}_1^* < 1$ et $(\bar{\alpha}_1^*)^{m_\alpha} + \bar{\alpha}_0^* < 1$. Soit $\vartheta_{\theta_1} = \theta_1 \mathbf{b}$ où le facteur $\theta_1 > 0$ est inconnu. Alors, l'intensité minimale θ^* de θ_1 qui rend le signal ϑ_{θ_1} détectable par le test FMA est

$$\theta^* = \frac{\sigma}{\|\mathbf{b}\|} \left[\Phi^{-1} \left(\left(1 - \bar{\alpha}_0^*\right)^{\frac{1}{m_\alpha}} \right) - \Phi^{-1} \left(\bar{\alpha}_1^* \right) \right]. \quad (7)$$

La démonstration de ce théorème est également une extension de la démonstration proposée dans [1] lorsque le signal \mathbf{b} est constant. Ce théorème affirme que, pour des taux de fausses alarmes équivalents, le test FMA possède une meilleure probabilité de détecter un signal transitoire de signe constant comparativement au VTWL CUSUM. Lorsque le profil du signal est constant, les coefficients de pondération du test FMA sont constants, voir [1]. Si on pose $\zeta(\ell) = b(L - \ell)$ et $x(n) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \zeta(\ell)y(n - \ell)$ pour $n \geq L$, le test FMA revient à comparer le signal en sortie $x = \{x(n)\}_{n \geq L}$ à un seuil

h . Le signal x est obtenu à partir de l'application du filtre à réponse impulsionnelle finie $\varsigma = \{\varsigma(n)\}_{n \geq L}$ au signal d'entrée $y = \{y(n)\}_{n \geq L}$.

La condition $(\bar{\alpha}_1^*)^{m_\alpha} + \bar{\alpha}_0^* < 1$ est nécessaire pour garantir la positivité de l'intensité minimale qui rend un signal détectable. En outre, la relation (7) du théorème précédent a une importance pratique considérable. Dans le cas d'un réseau d'eau, on pose $\theta_1 = \mu_c$ la vitesse inconnue de réaction du chlore inhérente au contaminant et $\mathbf{b}(\mathbf{n}) = (\delta_{xj}(n-L+1), \dots, \delta_{xj}(n))$ le vecteur connu des temps de parcours de l'eau. L'exploitant du réseau connaît alors la valeur la plus faible de μ_c qu'il peut détecter en fonction des probabilités d'erreurs prescrites. Si cette intensité minimale qui rend une contamination détectable paraît trop élevée, l'exploitant peut :

- tolérer plus de fausses alarmes en augmentant $\bar{\alpha}_0^*$;
- diminuer la probabilité de détection en augmentant $\bar{\alpha}_1^*$;
- remplacer le capteur installé par un capteur plus précis afin de baisser l'écart-type du bruit σ .

3 Résultats numériques

Le but de cette section est d'analyser, d'une part, la précision des bornes supérieures déterminées dans le théorème 1, d'autre part, d'étudier la robustesse du test FMA par rapport à une incertitude sur la durée du signal transitoire

3.1 Précisions des bornes supérieures des probabilités de fausses décisions

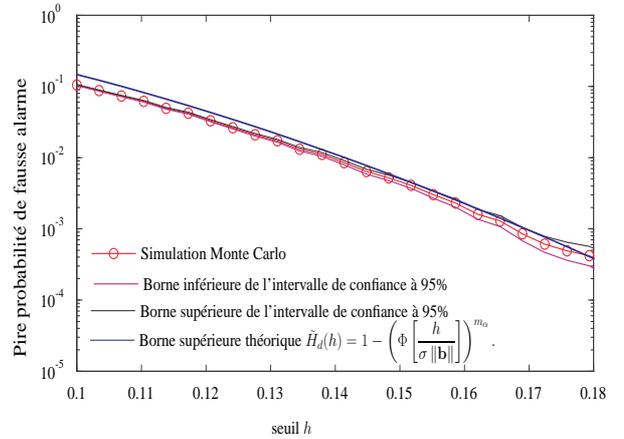


FIGURE 2 – Tracé de la pire probabilité de fausse alarme du test FMA et de sa borne supérieure en fonction du seuil.

La figure 2 illustre la pire probabilité de fausse alarme du test FMA et de sa borne supérieure en fonction du seuil. On constate que la courbe Monte Carlo de la pire probabilité de fausse alarme est asymptotiquement ($h \rightarrow \infty$) proche de la borne supérieure $\tilde{H}_d(h) = 1 - \left(\Phi \left[\frac{h}{\sigma \|\mathbf{b}\|} \right] \right)^{m_\alpha}$ extraite du théorème 1. Il en résulte que, lorsque la probabilité de fausse alarme

prescrite est petite, ce qui est le cas en pratique, le seuil obtenu grâce à l'expression de la borne supérieure est fiable comparativement à sa valeur réelle.

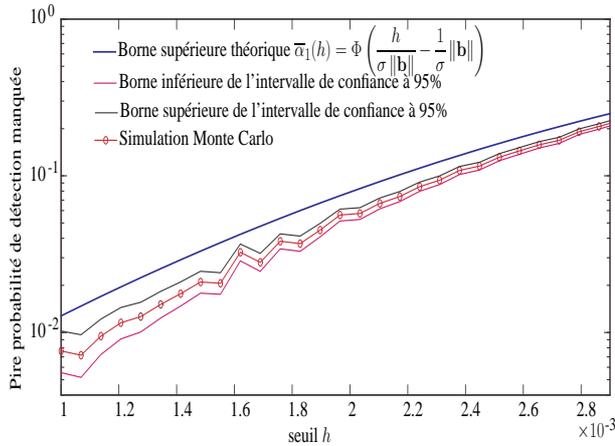


FIGURE 3 – Tracé de la pire probabilité de détection manquée du FMA et de sa borne supérieure en fonction du seuil.

La figure 3 présente la pire probabilité de détection manquée du FMA et sa borne supérieure en fonction du seuil. Nous remarquons que les courbes de la pire probabilité de détection manquée et celle de sa borne supérieure dérivant du théorème 1 $\bar{\alpha}_1(h) = \Phi\left(\frac{h}{\sigma\|b\|} - \frac{1}{\sigma}\|b\|\right)$ restent asymptotiquement ($h \rightarrow \infty$) proches. L'erreur engendrée par l'utilisation de la borne supérieure à la place de la probabilité exacte est donc assez faible et stable. La perte de performances du test FMA due à l'usage des bornes supérieures de fausses décisions est donc acceptable.

3.2 Robustesse par rapport à la durée du signal

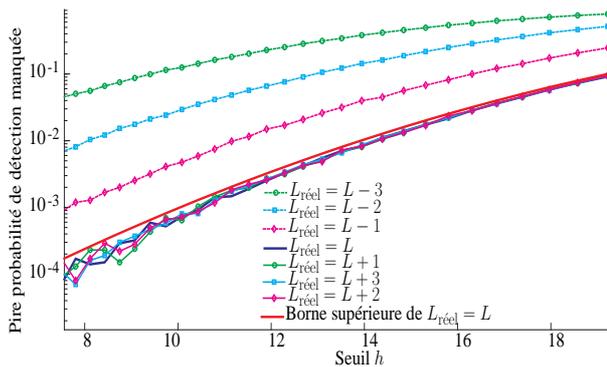


FIGURE 4 – Impact sur la détection d'une incertitude relative à la taille de la fenêtre glissante.

Supposons à présent que la durée réelle $L_{\text{réel}}$ de la contamination (signal transitoire) est plus grande ou plus petite que sa valeur attendue L .

Lorsque $L_{\text{réel}} \in \{L - 1; L - 2; L - 3\}$, la figure 4 montre

que la valeur réelle de la pire probabilité de détection manquée est supérieure à celle que nous avons prévue. La définition (6) du test FMA nous permet de comprendre que pour $L_{\text{réel}} < L$, l'espérance $\mathbb{E}_{n-L+1} \left[\sum_{i=1}^L b(i)y(n-L+i) \right] = \sum_{i=1}^{L_{\text{réel}}} [b(i)]^2$ est inférieure à sa valeur attendue $\sum_{i=1}^L [b(i)]^2$, d'où la perte de performance. Cependant, on souhaite généralement détecter une contamination avec un retard L faible, ce qui minimise le nombre de cas où $L_{\text{réel}} < L$.

Pour $L_{\text{réel}} > L$, l'espérance réelle est égale à sa valeur attendue, d'où la superposition des courbes sur la figure. En fait, même si la durée de la contamination ($L_{\text{réel}}$) est plus grande que L , celle-ci est considérée de durée L à cause du critère (2)-(3) qui défavorise les détections avec un retard supérieur à L .

4 Conclusion

Cet article traite de la détection d'un signal transitoire dynamique de signe constant dans les systèmes à sécurité critique. L'algorithme de détection proposé est le CUSUM à Fenêtre Limitée de Seuils Variables. Nous avons montré que cet algorithme, judicieusement optimisé, conduit au test FMA. L'intensité minimale qui rend un signal détectable par le test FMA est établie comme fonction des probabilités d'erreurs de première et deuxième espèce.

Références

- [1] Guépié, B.K. et Fillatre, L. et Nikiforov, I. Sequential Detection of Transient Changes. *Sequential Analysis*, vol 31, pages 528–547, 2012.
- [2] Guépié, B.K. et Fillatre, L. et Nikiforov, I. Sequential Monitoring of Water Distribution Network. *System Identification, Belgique*, vol 16, pages 392–397, 2012.
- [3] Lai, T.L. Information Bounds and Quick Detection of Parameter Changes in Stochastic Systems. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol 44, pages 2917–2929, 1998.
- [4] Lai, T.L. Control charts Based on Weighted Sums. *Annals of Statistics*, vol 2, pages 134–147, 1974.
- [5] Lorden, G. Procedures for Reacting to a Change in Distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol 42, 1897–1908, 1971.
- [6] Wang, Z.J. et Willett, P. A variable threshold Page procedure for detection of transient signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol 53, pages 4397–4402, 2005.
- [7] Han, C. et Willett, P.K. et Biao Chen et Abraham, D.A. A detection optimal min-max test for transient signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol 44, pages 866–869, 1998.
- [8] Han, C. et Willett, P.K. et Abraham, D.A. Some methods to evaluate the performance of Page's test as used to detect transient signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol 47, pages 2112–2127, 1999.