

Restauration positive d'images hyperspectrales avec préservation des contours

Simon HENROT¹, Charles SOUSSEN¹, Saïd MOUSSAOUI², David BRIE¹

¹Université de Lorraine et CNRS. CRAN, UMR 7039, Faculté des Sciences et Technologies,
B.P. 70239, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

²L'UNAM Université, Ecole Centrale Nantes et CNRS. IRCCyN, UMR 6597,
1, rue de la Noé, BP 92101, Nantes, France

simon.henrot@univ-lorraine.fr, charles.soussen@univ-lorraine.fr
Saïd.Moussaoui@irccyn.ec-nantes.fr, david.brie@univ-lorraine.fr

Résumé – On considère dans cet article un problème de restauration d'images hyperspectrales sous contrainte de positivité. L'estimée est obtenue par minimisation contrainte d'un critère convexe incorporant des informations *a priori* sur la régularité spatiale et spectrale de l'image. Nous présentons dans un travail précédent [1] une méthode rapide permettant de restaurer des images hyperspectrales en imposant une régularisation de Tikhonov et la positivité. Nous proposons ici d'adapter cette méthode de manière à préserver les contours dans l'image.

Abstract – We consider a hyperspectral image restoration problem in which the solution is known to be nonnegative. The image estimate is obtained as the constrained minimizer of a convex criterion incorporating prior information on its spatial and spectral regularity. We previously proposed a fast algorithm for Tikhonov regularization. Here, we adapt this algorithm to edge-preserving image restoration.

1 Introduction

Pour beaucoup de modalités d'imagerie, le processus d'acquisition dégrade la résolution des données, provoquant un flou sur l'image observée (e.g., diffraction par l'objectif en microscopie [2]). Une procédure de déconvolution est alors nécessaire pour restaurer une image plus fidèle à l'objet original. Dans cet article, on considère des données hyperspectrales, c'est-à-dire une pile d'images composée de N pixels acquises à un nombre L suffisant de bandes spectrales pour reconstruire le spectre de chaque pixel. La taille de ces données impose alors de développer des méthodes de déconvolution efficaces.

L'approche classique pour ce problème consiste à rechercher le minimiseur d'un critère pénalisé, obtenu comme la somme pondérée : 1) d'un terme quadratique d'adéquation aux données ; 2) d'un terme convexe (différentiable ou non) de régularisation incorporant des informations *a priori* sur la solution telles que la continuité spatiale et/ou spectrale de l'image. Le choix du terme de régularisation influence les caractéristiques de l'image restaurée : une fonction quadratique (*régularisation de Tikhonov*) produit des images lisses tandis qu'une fonction convexe mais non quadratique permet de préserver les discontinuités (contours) dans l'image.

Les images acquises avec certaines modalités (e.g. microscopie par comptage de photons) étant positives, elles doivent être traitées dans un cadre d'optimisation sous contrainte. Dans [1],

nous avons présenté un algorithme pour restaurer des images hyperspectrales lisses sous contrainte de positivité, en régularisant la solution spatialement et spectralement. Cette méthode opère de manière efficace dans le domaine de Fourier à l'aide de *Transformées de Fourier Discrètes* (TFDs), calculées par *Transformées de Fourier Rapides* (TFRs). Elle consiste à substituer des inversions de systèmes $L \times L$ à l'inversion de taille $NL \times NL$, et exploite la symétrie hermitienne des spectres d'images réelles pour alléger les calculs.

Ici, nous proposons de montrer comment adapter cette structure de calcul rapide à la restauration d'images préservant les contours, en utilisant des termes de régularisation convexes non quadratiques telles que la fonction de *Huber*. Le problème de minimisation d'un coût non quadratique a fait l'objet d'une abondante littérature au cours de cette dernière décennie [3, 4, 5]. Parmi les techniques applicables, nous retenons

- les méthodes *semi-quadratiques* (SQ) [6] utilisant une approximation quadratique majorante ;
- les méthodes *proximales* [7], couplées à l'utilisation d'un algorithme *Alternating Direction Method of Multipliers* (ADMM) [4],

qui ont été appliquées à la restauration d'images avec succès [8, 9, 10] et dont la structure se prête à l'adaptation de l'approche proposée dans [1]. Les performances des méthodes résultantes sont évaluées sur un problème de restauration d'images réelles de microscopie de fluorescence.

2 Formulation du problème

2.1 Modèle d'observation

On considère une image spectrale formée de N pixels acquis à L bandes spectrales distinctes. A chaque longueur d'onde ℓ , l'image bidimensionnelle (2D) observée est donnée par [2]

$$\mathbf{y}_\ell = \mathbf{H}_\ell \mathbf{x}_\ell^* + \mathbf{e}_\ell \quad (1)$$

où les vecteurs colonnes \mathbf{y}_ℓ and \mathbf{x}_ℓ^* de longueur N sont respectivement les images observées et originales arrangées selon l'ordre lexicographique, \mathbf{H}_ℓ est la matrice Toeplitz-bloc-Toeplitz [1] $N \times N$ de dégradation obtenue à partir de la *Réponse Impulsionnelle Optique* (RIO) du canal ℓ et \mathbf{e}_ℓ est un terme de bruit additif prenant en compte les erreurs de mesure et de modèle, supposé blanc et gaussien. Soient le vecteur colonne $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T \dots \mathbf{y}_L^T]^T$ (de taille $NL \times 1$) et \mathbf{x}^* le vecteur de taille $NL \times 1$ représentant l'image hyperspectrale inconnue. En notant $\mathbf{H} = \text{blkdiag}(\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_L)$ la matrice de dégradation $NL \times NL$ bloc-diagonale (chaque canal étant dégradé indépendamment des autres), le modèle d'observation s'écrit

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}^* + \mathbf{e} \quad (2)$$

où le bruit \mathbf{e} est un vecteur de longueur NL . Le problème de déconvolution d'image hyperspectrale consiste à estimer \mathbf{x}^* à partir de la donnée de \mathbf{y} et \mathbf{H} .

2.2 Fonction objectif

Le problème est formulé dans le cadre de l'optimisation sous contrainte :

$$\min_{\mathbf{x}} \mathcal{J}(\mathbf{x}) \text{ s.c. } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (3)$$

où \mathbf{x} est une solution candidate. Nous proposons d'écrire le critère pénalisé \mathcal{J} comme la somme de trois termes :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\mu_s}{2} \sum_i \phi_\eta(\{\mathbf{D}_s \mathbf{x}\}_i) + \frac{\mu_\lambda}{2} \|\mathbf{D}_\lambda \mathbf{x}\|_2^2 \quad (4)$$

où $\{\mathbf{D}_s \mathbf{x}\}_i$ désigne le i -ème élément du vecteur $\mathbf{D}_s \mathbf{x}$. Le premier terme du critère est l'adéquation aux données et les deux autres (pondérés par les *hyperparamètres* μ_s et μ_λ) permettent de régulariser la solution, respectivement dans les directions spatiales et spectrales de l'image. Les matrices \mathbf{D}_s et \mathbf{D}_λ sont des opérateurs de différence finie (e.g. filtre dérivateur ou laplacien), pénalisant les fortes variations d'un pixel à l'autre ou d'un canal à l'autre. Le choix d'imposer des régularisations spatiales et spectrales séparables permet d'utiliser la structure rapide de calcul et d'imposer des *a priori* différents dans les deux domaines.

Dans cet article, la fonction ϕ_η est celle de Huber, dite $\ell_2\ell_1$:

$$\phi_\eta(t) = \begin{cases} t^2 & \text{pour } |t| < \eta \\ \eta(2|t| - \eta) & \text{sinon;} \end{cases} \quad (5)$$

dont la forme est contrôlée par le paramètre η : lorsque celui-ci tend vers zéro, elle se rapproche de la valeur absolue (coût ℓ_1 favorisant une image constante par morceaux) tandis qu'à l'infini, elle est quadratique (coût ℓ_2 favorisant une image lisse).

3 Optimisation

3.1 Positivité

La positivité de la solution du problème (3) peut-être imposée à l'aide d'une *pénalité extérieure quadratique* [11]. Le principe consiste à minimiser le critère augmenté

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{s}; \xi) = \mathcal{J}(\mathbf{x}) + \frac{\xi}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|_2^2 \quad (6)$$

où la contrainte de positivité est transférée à la variable auxiliaire \mathbf{s} . Dans ce qui suit, l'exposant k se réfère à la dernière itération effectuée et la notation $\mathcal{P}(\mathbf{x}|\mathbf{s}^k; \xi^k)$ signifie que l'on considère \mathcal{P} comme une fonction de la variable \mathbf{x} à \mathbf{s}^k et ξ^k fixés. La procédure d'optimisation consiste alors à alterner les minimisations de \mathcal{P} par rapport à \mathbf{x} et \mathbf{s} :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathcal{P}(\mathbf{x}|\mathbf{s}^k; \xi^k) \quad (7)$$

$$\mathbf{s}^{k+1} = \max(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{0}) \quad (8)$$

et à augmenter le poids ξ pour pénaliser de plus en plus sévèrement le non-respect des contraintes [11]. La résolution de (7) est itérative et tronquée et nous faisons le choix d'appliquer (8) à chaque mise-à-jour de \mathbf{x} (voir la section 3.4).

3.2 Méthode SQ

Les méthodes SQ ont d'abord été proposées pour la restauration d'images par Geman et Reynolds (GR) [8] et Geman et Yang (GY) [9]. Dans la suite, nous adoptons l'approche GY pour diminuer le coût de calcul (voir ci-dessous). L'idée principale consiste à introduire un ensemble de variables auxiliaires \mathbf{b} et à remplacer $\mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{s}; \xi)$ par un critère augmenté $\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{s}; \xi)$, où l'on substitue au terme de régularisation spatiale un majorant quadratique :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{s}; \xi) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\mu_\lambda}{2} \|\mathbf{D}_\lambda \mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\xi}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|_2^2 + \frac{\mu_s}{2} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{D}_s \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \sum_i \psi_\eta(b_i) \right) \quad (9)$$

où ψ_η est la fonction convexe conjuguée de ϕ_η [6]; son calcul explicite n'est pas nécessaire par la suite. Le critère $\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{b}|\mathbf{s}; \xi)$ est dit semi-quadratique car il est quadratique par rapport \mathbf{x} à \mathbf{b} fixé. La minimisation de $\mathcal{P}(\mathbf{x}; \mathbf{s}, \xi)$ est alors équivalente à la minimisation alternée de $\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{b}; \mathbf{s}, \xi)$.

3.2.1 Minimisation de $\mathcal{Q}(\mathbf{x}|\mathbf{b}^k, \mathbf{s}^k; \xi^k)$

La solution de ce problème quadratique est donnée par

$$\mathbf{x}^{k+1} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\mu_s}{2} \mathbf{D}_s^T \mathbf{D}_s + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda^T \mathbf{D}_\lambda + \xi^k \mathbf{I})^\dagger (\mathbf{H}^T \mathbf{y} + \frac{\mu_s}{2} \mathbf{D}_s^T \mathbf{b}^k + \xi^k \mathbf{s}^k) \quad (10)$$

où \cdot^T est la transposée et \cdot^\dagger est l'inverse de Moore-Penrose. Ce calcul s'effectue de manière rapide de façon similaire à l'approche proposée dans [1]. En outre, la matrice à inverser ne dépend pas de \mathbf{b} (contrairement à l'approche GR), ce qui permet de réduire le coût de calcul au cours des itérations en mémorisant le terme à inverser dans le domaine de Fourier.

3.2.2 Minimisation de $\mathcal{Q}(\mathbf{b}|\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{s}^k; \xi^k)$

Le problème est séparable par rapport à chaque b_i et sa solution s'écrit [6]

$$b_i^{k+1} = \{\mathbf{D}_s \mathbf{x}^{k+1}\}_i - \phi'_\eta(\{\mathbf{D}_s \mathbf{x}^{k+1}\}_i) \quad (11)$$

où ϕ'_η est la dérivée de la fonction de Huber (le produit $\mathbf{D}_s \mathbf{x}$ est également calculé dans le domaine de Fourier).

3.3 Méthode proximale / ADMM

Les algorithmes basés sur les opérateurs proximaux ont fait l'objet de nombreux travaux [7]. Dans cet article, nous choisissons d'utiliser le cadre de l'algorithme ADMM, combinant une décomposition de la fonction objectif et la méthode des multiplicateurs de Lagrange [4], qui conduit à une structure d'algorithme proche de celle obtenue dans la section 3.2. Le problème est réécrit sous la forme

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{z}} f(\mathbf{x}, \mathbf{s}; \xi) + g(\mathbf{z}) \text{ s.c. } \mathbf{D}_s \mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (12)$$

où les objectifs décomposés f et g sont donnés par

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{s}; \xi) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\mu\lambda}{2} \|\mathbf{D}_\lambda \mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\xi}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|_2^2 \quad (13)$$

$$g(\mathbf{z}) = \frac{\mu_s}{2} \sum_i \phi(z_i). \quad (14)$$

La procédure consiste alors à minimiser le *Lagrangien augmenté* du problème [4, 11], donné par

$$\mathcal{L}_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{z}, \mathbf{u}; \xi) = f(\mathbf{x}, \mathbf{s}; \xi) + g(\mathbf{z}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{D}_s \mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{u}\|_2^2 - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_2^2 \quad (15)$$

par rapport à \mathbf{x} , \mathbf{s} , \mathbf{z} alternativement et à mettre à jour les multiplicateurs de Lagrange \mathbf{u} (pondérés par ρ) [4]. Le paramètre ρ peut être fixé ou augmenter de manière similaire à ξ [4, 11].

3.3.1 Minimisation de $\mathcal{L}_\rho(\mathbf{x}|\mathbf{s}^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k; \xi^k)$

La solution de ce problème quadratique est donnée par

$$\mathbf{x}^{k+1} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \rho \mathbf{D}_s^T \mathbf{D}_s + \mu\lambda \mathbf{D}_\lambda^T \mathbf{D}_\lambda + \xi^k \mathbf{I})^\dagger (\mathbf{H}^T \mathbf{y} + \rho \mathbf{D}_s^T (\mathbf{z}^k - \mathbf{u}^k) + \xi^k \mathbf{s}^k). \quad (16)$$

De même que dans le cas SQ, ce calcul s'effectue de manière efficace dans le domaine de Fourier selon [1].

3.3.2 Minimisation de $\mathcal{L}_\rho(\mathbf{z}|\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{s}^k, \mathbf{u}^k; \xi^k)$

Le problème est séparable par rapport à chaque z_i :

$$z_i^{k+1} = \arg \min_{z_i} \left\{ \frac{\mu_s}{2} \phi(z_i) + \frac{\rho}{2} (z_i - \{\mathbf{D}_s \mathbf{x}^{k+1}\}_i - u_i^k)^2 \right\}. \quad (17)$$

Par définition, on appelle *opérateur proximal* d'une fonction h avec pénalité ρ la fonction de la variable t

$$\text{prox}_{h, \rho}(t) \triangleq \arg \min_z \{h(z) + (\rho/2)(z - t)^2\}.$$

L'opérateur proximal de la fonction de Huber admet une expression analytique [7]¹

$$\text{prox}_{\phi_{\eta, \rho}}(t) = \begin{cases} t/(2/\rho + 1) & \text{for } |t| < \eta(2/\rho + 1) \\ t - \eta \text{sgn}(t) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (18)$$

La solution est donc donnée par

$$z_i^{k+1} = \text{prox}_{\phi_{\eta, \rho}}(\{\mathbf{D}_s \mathbf{x}^{k+1}\}_i + u_i^k). \quad (19)$$

3.3.3 Mise à jour des variables de Lagrange \mathbf{u}

La mise à jour est donnée par

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \mathbf{D}_s \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1}. \quad (20)$$

3.4 Algorithme proposé

— Calculer les TFDs 2D des images \mathbf{y}_ℓ , RIOs \mathbf{H}_ℓ et de \mathbf{D}_s par TFR. Fixer $\xi^{(1)} = 1$, $\eta > 0$, $\alpha > 1$, $\rho > 0$, $\tau < 0$, $M > 0$ et initialiser \mathbf{s} , \mathbf{b} , \mathbf{z} , \mathbf{u} à zéro.

— Itérer :

(a) Itérer M fois :

– Calculer \mathbf{x} (domaine de Fourier) selon (10) (*cas SQ*) ou (16) (*cas ADMM*).

– Calculer \mathbf{b} selon (11) (*cas SQ*), ou \mathbf{z} et \mathbf{u} selon (19) et (20) (*cas ADMM*).

– Calculer \mathbf{s} selon (8).

(b) Mettre à jour $\xi := \alpha \xi$.

jusqu'à vérification d'un critère d'arrêt, e.g. la valeur minimale de \mathbf{x} est supérieure au seuil τ .

TABLE 1 – Algorithme de restauration

4 Résultats expérimentaux

Nous évaluons les performances de l'algorithme sur des images multispectrales réelles acquises en microscopie confocale de fluorescence². La scène imagée comprend des bactéries *Pseudomonas* modifiées génétiquement par insertion de gènes rapporteurs. Ces gènes codent des émetteurs fluorescents, les protéines *GFP* et *E2-Orange*, de manière à réagir respectivement à la présence et la carence en fer du milieu. Les images sont acquises sur 512×512 pixels de taille 49 nm, acquises à 16 longueurs d'onde balayant la gamme 455 – 605 nm.

La RIO est estimée à l'aide de la méthode présentée dans [2] : à chaque bande spectrale, le noyau est approché par une gaussienne de taille 8×8 dont l'écart-type est calculé à partir des paramètres d'acquisition (rayon du pinhole, indice de réfraction

1. La méthode décrite dans cette section est également valable pour une pénalisation par la valeur absolue, dont l'opérateur proximal est donné par l'opérateur de seuillage doux : voir [4]. En revanche, la méthode SQ ne permet de retrouver le cas de la pénalisation ℓ_1 qu'asymptotiquement ($\eta \rightarrow 0$).

2. Nous remercions Christian Mustin, DR CNRS au LIEC (UMR 7360) pour son travail d'acquisition en imagerie confocale ainsi que ses éclairages sur les résultats expérimentaux. Ce travail a bénéficié du soutien de l'Agence Nationale de la Recherche ANR-09-BLAN-0336-04 et de la Région Lorraine.

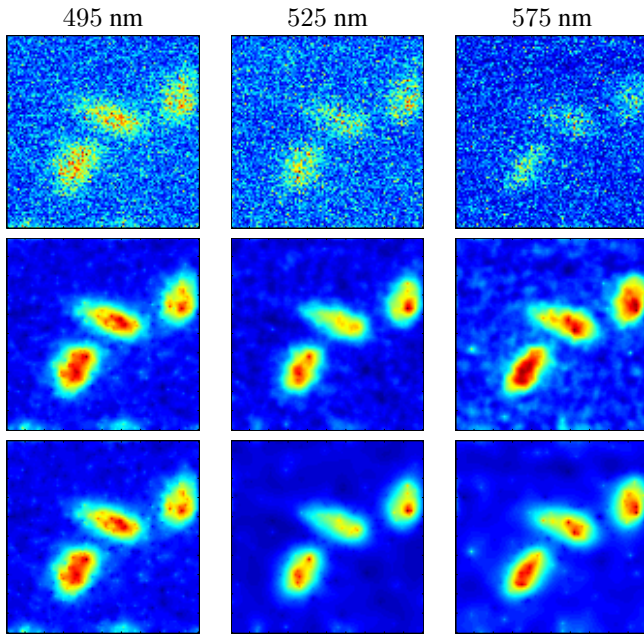


FIGURE 1 – Images de biocapteurs bactériens. Lignes : 1) données observées ; 2) déconvolution $\ell_2 - \ell_2\ell_1$; 3) déconvolution $\ell_2 - \ell_1$. Colonnes : 1) mode spectral de l’auto-fluorescence ; 2) mode spectral de la GFP (réagissant à la présence de fer) ; 2) mode de E2-Orange (réagissant à la carence en fer).

du milieu et longueurs d’onde d’excitation et d’émission). Les paramètres de régularisation sont fixés empiriquement à $\mu_s = 15$ et $\mu_\lambda = 1$. Les autres paramètres sont fixés à $\eta = 10$, $\alpha = 10$, $\rho = 1$, $\tau = -1e^{-6}$ et $M = 10$.

La figure 1 présente les résultats obtenus sur une partie de l’image à trois longueurs d’onde : $\{495, 525, 575\}$ nm, correspondant respectivement aux modes de l’auto-fluorescence, de la GFP et de E2-Orange. La figure présente les données observées (première ligne), les résultats obtenus pour $\eta = 10$ par application des méthodes ADMM / SQ (deuxième ligne), et pour $\eta = 0$ par ADMM en utilisant l’opérateur proximal associé à la pénalisation ℓ_1 (troisième ligne). Les temps de calculs respectifs sont de 142 et 155 secondes pour une implémentation MATLAB sur un processeur 2,4 Ghz Intel Core 2 Duo avec une RAM of 4 giga-octets. Sur les deux résultats de déconvolution, le bruit est très nettement atténué et la structure des bactéries est restaurée. Le mode spectral de E2-Orange apparaissant plus fluorescent que le mode de la GFP, on peut conclure que la région étudiée est pauvre en fer. La pénalité $\ell_2\ell_1$ préserve bords francs et petites variations (donc les détails), tandis que la pénalité ℓ_1 favorise une image constante par morceaux (ce qui explique la meilleure atténuation du bruit) : on retrouve donc les comportements attendus pour ces types de régularisation.

5 Conclusion

Dans cet article, nous proposons un cadre général pour résoudre un problème de restauration d’images hyperspectrales, pre-

nant en compte régularisation spatiale préservant les contours, régularisation spectrale et contrainte de positivité. Nous nous sommes focalisés sur deux techniques d’optimisation permettant d’exploiter la structure de calcul efficace dans le domaine de Fourier proposée dans [1]. Les performances de ces méthodes ont été évaluées sur des images hyperspectrales réelles de biocapteurs bactériens : les résultats obtenus sont similaires en terme de restauration et de coût de calcul. Les perspectives ouvertes par ce travail concernent le remplacement de la pénalité quadratique par un Lagrangien augmenté, de manière à proposer un algorithme exploitant pleinement le cadre ADMM. Il pourrait aussi être intéressant d’étudier l’apport de régularisations non séparables [12] tout en conservant une structure de calcul rapide.

Références

- [1] S. Henrot, C. Soussen, and D. Brie, “Fast positive deconvolution of hyperspectral images,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 22, no. 2, pp. 828–833, Feb. 2013.
- [2] B. Zhang, J. Zerubia, and J.-C. Olivo-Marin, “Gaussian approximations of fluorescence microscope point-spread function models,” *Applied Optics*, vol. 46, pp. 1819–1829, Mar. 2007.
- [3] M. Zibulevsky and M. Elad, “ $\ell_1 - \ell_2$ optimization in signal and image processing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 27, no. 3, pp. 76–88, 2010.
- [4] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein, “Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers,” *Foundations and Trends® in Machine Learning*, vol. 3, no. 1, pp. 1–122, 2011.
- [5] A. Beck and M. Teboulle, “A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems,” *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 2, no. 1, pp. 183–202, 2009.
- [6] J. Idier, “Convex half-quadratic criteria and interacting auxiliary variables for image restoration,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 10, no. 7, pp. 1001–1009, Jul. 2001.
- [7] C. Chau, P. Combettes, J.-C. Pesquet, and V. Wajs, “A variational formulation for frame-based inverse problems,” *Inverse Problems*, vol. 23, no. 4, pp. 1495, 2007.
- [8] D. Geman and G. Reynolds, “Constrained restoration and the recovery of discontinuities,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 14, no. 3, pp. 367–383, Mar. 1992.
- [9] D. Geman and C. Yang, “Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 4, no. 7, pp. 932–946, Jul. 1995.
- [10] M.A.T. Figueiredo and J.M. Bioucas-Dias, “Restoration of poissonian images using alternating direction optimization,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 19, no. 12, pp. 3133–3145, 2010.
- [11] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, 2006.
- [12] F. Soulez and E. Thiébaud, “Joint deconvolution and demosaicing,” in *2009 16th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, 2009, pp. 145–148.