

Une Variante non Périodique du Sharpness Index

Arthur LECLAIRE, Lionel MOISAN

Université Paris Descartes, MAP5, CNRS UMR 8145
45, rue des Saints-Pères 75006 PARIS, France

{arthur.leclaire, lionel.moisan}@parisdescartes.fr

Résumé – Dans cet article est présentée une variante de l’indice de cohérence de phase appelé *Sharpness Index* (SI). Cette nouvelle version baptisée *Local Sharpness Index* (LSI) s’affranchit de la périodisation inhérente à la définition du SI, et peut ainsi être calculée sur un sous-domaine de l’image de forme quelconque. De plus, nous montrons expérimentalement que LSI se comporte, à l’instar de SI, comme un indice de netteté.

Abstract – In this article is introduced a variant of the phase coherence measure called *Sharpness Index* (SI). This new version, called *Local Sharpness Index* (LSI) is defined in a non-periodic framework, and can thus be computed on an arbitrary subpart of the image domain. Besides, we give empirical evidence that LSI behaves like a sharpness index.

1 Cohérence Globale de Phase et *Sharpness Index*

Pour évaluer la qualité d’une image sans référence extérieure, plusieurs approches ont été proposées dans la littérature. Certaines d’entre elles cherchent à analyser directement la géométrie de l’image [7, 11], d’autres sont basées sur une étude perceptuelle [4], d’autres encore cherchent à exploiter l’information de phase d’une transformée en ondelettes complexe [10, 5]. On pourra se référer à [3] pour un panorama de l’état actuel de la recherche en qualité image, et notamment une discussion plus développée sur les indices de qualité sans référence.

Dans [1] et [2], les auteurs suggèrent de mesurer la qualité d’une image (au sens de sa précision géométrique) en évaluant la cohérence globale des coefficients de phases de sa transformée de Fourier discrète. Plus précisément, pour une image en niveaux de gris $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un rectangle discret Ω de taille $M \times N$, étendue en $\hat{u} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par périodisation, la cohérence globale de phase [1] de u , notée $\text{GPC}(u)$, mesure à quel point la variation totale de l’image

$$\text{TV}(u) = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} |\partial_x \hat{u}(\mathbf{x})| + |\partial_y \hat{u}(\mathbf{x})| \quad (1)$$

$$\text{où } \begin{pmatrix} \partial_x \hat{u}(x, y) \\ \partial_y \hat{u}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}(x+1, y) - \hat{u}(x, y) \\ \hat{u}(x, y+1) - \hat{u}(x, y) \end{pmatrix} \quad (2)$$

“résiste” à une randomisation des coefficients de phases. Comme on ne dispose pas d’une expression analytique pour le calcul direct de $\text{GPC}(u)$, les auteurs de [2] ont proposé de remplacer la randomisation de phases par la convolution avec un bruit blanc gaussien W d’écart-type¹ $1/\sqrt{MN}$. S’appuyant sur le

caractère quasi-gaussien de la distribution de $\text{TV}(u * W)$, ils définissent ainsi le *Sharpness Index* de u par

$$\text{SI}(u) = -\log_{10} \Phi \left(\frac{\mu - \text{TV}(u)}{\sigma} \right), \quad (3)$$

$$\text{où } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx, \quad (4)$$

et μ et σ^2 sont respectivement l’espérance et la variance de la variable aléatoire $\text{TV}(u * W)$.

Le calcul de $\text{SI}(u)$ est explicite dans [2], où les expressions analytiques de μ et σ sont données en fonction du gradient de u , et en particulier de son autocorrélation. Ce calcul étant basé sur des versions périodiques de TV et de l’autocorrélation du gradient, l’indice SI est biaisé par la périodisation forcée de l’image, et en particulier par les discontinuités qui peuvent exister d’un bord à l’autre de l’image. Une manière de réduire ce biais consiste à calculer SI seulement sur la composante périodique de l’image [8] (dans la suite nous noterons SI_p l’indice correspondant).

2 *Sharpness Index* non Périodique

Nous proposons ici une autre solution pour s’affranchir de ces problèmes de bords. Il s’agit de remplacer directement dans la formule du SI la variation totale et l’autocorrélation du gradient par des versions non périodiques.

Définition 2.1. Soit $D \subset \hat{\Omega}$ où $\hat{\Omega}$ est l’intérieur de Ω au sens de la 8-connexité. Le *Local Sharpness Index* de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sur le sous-domaine D est défini par

$$\text{LSI}_D(u) = -\log_{10} \Phi \left(\frac{\mu - T}{\sigma} \right), \quad (5)$$

1. Cette valeur assure que $\mathbb{E}[\|u * W\|^2] = \mathbb{E}[\|u\|^2]$.

$$\text{où } \mu = (\alpha_x(\mathbf{0}) + \alpha_y(\mathbf{0}))\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{|D|}, \quad (6)$$

$$\alpha_a(\mathbf{h}) = \left(\sum_{\mathbf{x} \in D \cap (D-\mathbf{h})} |\partial_a u(\mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} \quad (a \in \{x, y\}), \quad (7)$$

$$T = \sum_{\mathbf{x} \in D} |\partial_x u(\mathbf{x})| + |\partial_y u(\mathbf{x})|, \quad (8)$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^2 \\ a, b \in \{x, y\}}} \alpha_a(\mathbf{h}) \alpha_b(-\mathbf{h}) \cdot \omega \left(\frac{\Gamma_{ab}(\mathbf{h})}{\alpha_a(\mathbf{h}) \alpha_b(-\mathbf{h})} \right) \quad (9)$$

$$\Gamma(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \Gamma_{xx}(\mathbf{h}) & \Gamma_{xy}(\mathbf{h}) \\ \Gamma_{xy}(\mathbf{h}) & \Gamma_{yy}(\mathbf{h}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$= \sum_{\mathbf{x} \in D \cap (D-\mathbf{h})} \nabla u(\mathbf{x}) (\nabla u(\mathbf{x} + \mathbf{h}))^T, \quad (11)$$

$$\forall t \in [-1, 1], \omega(t) = t \text{Arcsin}(t) + \sqrt{1-t^2} - 1 \quad (12)$$

$$\nabla u(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x, y) \\ \partial_y u(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x+1, y) - u(x, y) \\ u(x, y+1) - u(x, y) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Prenant $D = \tilde{\Omega}$ dans cette définition, on obtient bien un indice opérant dans un cadre non périodique. Il ne peut plus a priori s'interpréter dans un cadre probabiliste, mais conserve néanmoins les bonnes propriétés du SI. Notons aussi que dans cette nouvelle version, lors du calcul de l'autocorrélation du gradient, il n'est pas clair que l'on doit soustraire ou non la moyenne du gradient. Avec l'indice SI cette question ne se posait pas puisque la moyenne du gradient calculé avec condition de bords périodiques vaut zéro. Mais ici, même si la moyenne est non nulle en général, elle reste négligeable : on se convainc en effet rapidement, par exemple en dimension 1, que si s est un signal de taille $M+1$ à valeurs dans $[0, 1]$, alors

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \partial s(k) = \frac{1}{M} (s(M+1) - s(1)) \in \left[-\frac{1}{M}, \frac{1}{M} \right].$$

Remarquons aussi au passage qu'il est possible, à la manière de [6], de donner une approximation de la variance σ^2 (et donc de l'indice LSI) en remplaçant $\omega(t)$ par son équivalent au voisinage de 0, à savoir $t^2/2$. Mais même si une simplification s'opère, le fait que α_x et α_y dépendent maintenant de \mathbf{h} ne nous autorise plus à appliquer la formule de Parseval, et l'indice simplifié ainsi obtenu n'est pas plus rapide à calculer.

Numériquement, notons que pour des sous-domaines D quelconques, les fonctions α_x^2 , α_y^2 , et Γ peuvent toujours se calculer grâce à des convolutions non périodiques des dérivées de l'image restreintes à D . Ces convolutions non périodiques se calculent en effectuant des transformées de Fourier discrètes des données prolongées par zéro à 2Ω . Ainsi, le coût total est encore en général de $\mathcal{O}(MN \log(MN))$. Lorsque D est très petit, la convolution peut être calculée directement et alors on peut considérer que la complexité est abaissée à $\mathcal{O}(MN)$. Notons que si l'image de départ u est quantifiée, il convient de

s'affranchir du biais induit par cette quantification, par exemple (dans le cas d'une image quantifiée en valeurs entières) en ajoutant un bruit blanc uniforme sur $[-0.5, 0.5]$ avant le calcul de LSI.

3 Résultats expérimentaux

Vérifions que la fonction LSI_D ainsi définie constitue encore un indice de netteté. Étant naturellement adaptée à un sous-domaine D , il est légitime de calculer ses valeurs sur différentes parties D d'une même image. On constate sur la gauche de la figure 1 que $\text{LSI}_D(u)$ est grand lorsque la fenêtre D se situe en avant-plan (où la mise au point a été faite) et contient des structures géométriques marquées. On remarque aussi que dans cet exemple, l'indice LSI_D a un comportement similaire à l'indice SI calculé sur la composante périodique, ce qui montre que LSI s'affranchit des effets de bords du SI, sans pour autant nécessiter une périodisation préalable. De plus, sur la figure 2 on constate que, de même que pour SI, LSI_D décroît lorsqu'on ajoute du bruit ou du flou à l'image. Ces deux expériences montrent que LSI peut aussi être interprété comme un indice de netteté.

On peut pousser plus loin la première expérience en calculant une carte de netteté locale (figure 3). Comme pour l'indice S3 développé dans [9], cette carte ne permet pas d'obtenir une estimation directe de la profondeur, mais montre que la netteté maximale est bien contrainte par le degré de focalisation (autrement dit, une netteté locale élevée est gage de bonne focalisation, mais même une zone bien focalisée peut produire un indice LSI faible, par exemple dans le cas d'une zone "plate" ou d'une micro-texture).

Nous pouvons aussi vérifier, de la même manière que dans [1], que LSI est également sensible au ringing. Pour cela, considérons la déconvolution de type Wiener (régularisation H^1) de l'image u , obtenue comme solution de

$$\arg \min_v \|\kappa_\rho * v - u\|_2^2 + \lambda \|\nabla v\|_2^2, \quad (14)$$

où κ_ρ est le noyau gaussien d'écart-type ρ . À λ fixé (on utilise la valeur $\lambda = 0.01$ dans nos expériences), notons u_ρ la solution du problème précédent et traçons le graphe de $\rho \mapsto \text{LSI}_{\tilde{\Omega}}(u_\rho)$. Sur la figure 4 on constate que l'on obtient une courbe comparable à celle obtenue avec SI, même si la position du maximum n'est pas tout à fait la même. Cette courbe reflète bien la sensibilité de LSI aux artefacts de ringing qui apparaissent lorsque l'on choisit ρ trop grand (voir figure 5).

Lors de l'étude de ces indices de cohérence de phase survient la question naturelle du comportement vis-à-vis du bruit. Dans [1] est mentionnée la propriété *a contrario* suivante : si U est une image à phases aléatoires, alors $\mathbb{P}(\text{GPC}(U) \geq t) \leq 10^{-t}$ pour tout $t > 0$ (à noter que cette inégalité est valable quelle que soit la taille de U). Bien que la preuve ne s'étende pas telle quelle à l'indice SI, on peut vérifier empiriquement que la distribution des valeurs de SI et LSI sur un bruit à phases aléatoires reste concentrée sur des valeurs faibles (figure 6). Ceci

vient encore confirmer que bien que les indices SI et LSI ne mesurent pas exactement la cohérence de phase comme GPC, ils se comportent essentiellement de la même façon.

Conclusion

Dans cet article, nous avons défini un indice de netteté non périodique et donc naturellement localisable, LSI. Comme nous l'avons constaté empiriquement, cet indice est comparable à l'indice obtenu en composant SI avec l'opérateur de calcul de la composante périodique, mais s'affranchit naturellement des effets de bords, sans nécessiter le recours à un prétraitement. Ce nouvel indice devrait ainsi permettre de concevoir des algorithmes de déconvolution aveugle à la manière de [6], mais dans un cadre non périodique.

L'indice LSI peut s'utiliser avec des sous-domaines de forme quelconque, et donc en particulier avec ceux issus d'une segmentation de l'image. On pourrait ainsi imaginer segmenter automatiquement l'image en zones floues ou nettes. Cette application nécessiterait néanmoins d'étudier plus précisément le comportement de LSI_D en fonction de la taille (voire de la forme) du sous-domaine D , afin de pouvoir comparer les valeurs de cet indice sur des domaines différents.

Références

- [1] G. Blanchet, L. Moisan, B. Rougé. Measuring the Global Phase Coherence of an Image. *Proc. ICIP*, pp. 1176–1179, 2008.
- [2] G. Blanchet, L. Moisan. An Explicit Sharpness Index Related to Global Phase Coherence. *Proc. ICASSP*, pp.1065–1068, 2012.
- [3] D.M. Chandler. Seven Challenges in Image Quality Assessment : Past, Present, and Future Research. *ISRN Signal Processing*, Article ID 905685, 2013.
- [4] R. Ferzli, L.J. Karam. A No-reference Objective Image Sharpness Metric Based on the Notion of Just Noticeable Blur (JNB). *IEEE Trans. Image Processing*, vol 18(4), pp. 717–728, 2009.
- [5] R. Hassen, Z. Wang, M. Salama. No-Reference Image Sharpness Assessment Based on Local Phase Coherence Measurement. *Proc. ICASSP*, pp. 2434–2437, 2010.
- [6] A. Leclaire, L. Moisan. Blind Deblurring Using a Simplified Sharpness Index. *Proc. SSVM*, pp. 86–97, 2013.
- [7] P. Marziliano, F. Dufaux, S. Winkler, T. Ebrahimi. Perceptual blur and ringing metrics : Application to JPEG2000. *Signal Processing : Image Communication*, vol 19(2), pp. 163–172, 2004.
- [8] L. Moisan. Periodic Plus Smooth Image Decomposition. *J. Math. Imaging Vision*, vol. 39(2), pp. 120–145, 2011.
- [9] C.T. Vu, D.M. Chandler. S3 : a spectral and spatial sharpness measure. *Proc. MMEDIA*, pp. 37–43, 2009.
- [10] Z. Wang, E.P. Simoncelli. Local Phase Coherence and the Perception of Blur. *Proc. NIPS*, vol. 16, pp. 786–792, 2003.
- [11] X. Zhu, P. Milanfar. Automatic Parameter Selection for Denoising Algorithms Using a No-reference Measure of Image Content. *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 19(12), pp. 3116–3132, 2010.

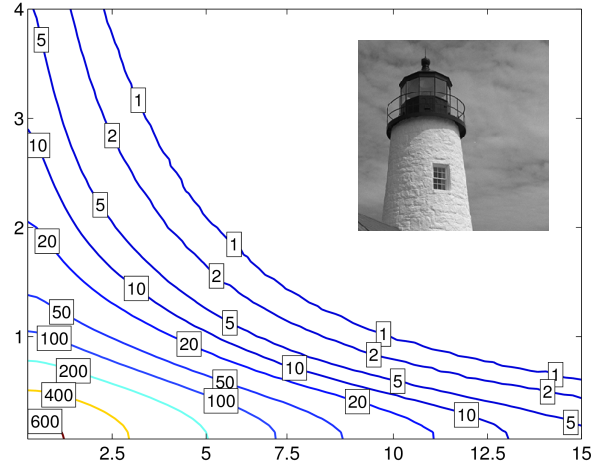


FIGURE 2 – Diagramme bruit/flou (lignes de niveau). Pour chaque point de ce diagramme, on a ajouté du flou gaussien (niveau des ordonnées) et du bruit gaussien (niveau des abscisses) à l'image *Lighthouse* de la base de données Live, puis on a calculé l'indice LSI sur une sous-fenêtre (incrustée en haut à droite). Les résultats ont été moyennés sur 10 réalisations du bruit. On constate que l'ajout de bruit ou de flou fait décroître l'indice LSI, d'une manière similaire à l'indice SI.

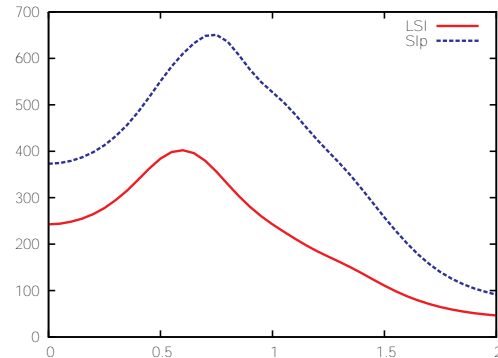


FIGURE 4 – Graphe de $\rho \mapsto LSI_{\hat{\Omega}}(u_{\rho})$ (trait plein rouge) et de $\rho \mapsto SI_p(u_{\rho})$ (pointillés bleus). L'image u est extraite de l'image *Sailing 2* de la base de données Live.

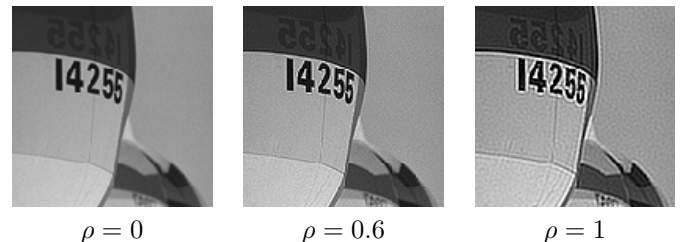


FIGURE 5 – Résultat de la déconvolution de type Wiener (équation (14)) pour plusieurs valeurs de ρ (seul un zoom sur une partie de l'image est montré ici). On constate que l'image déconvolée avec le paramètre $\rho = 0.6$ (optimal pour LSI) est effectivement plus nette visuellement, et qu'elle comporte moins de ringing que l'image obtenue pour $\rho = 1$.

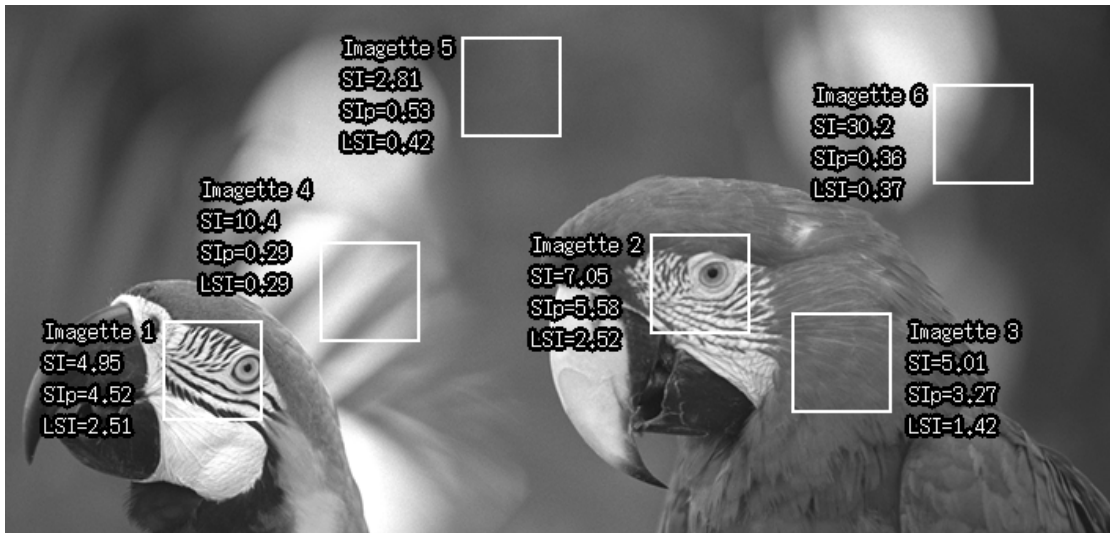


FIGURE 1 – Pour chaque imagette (64×64) entourée en blanc, on a calculé la valeur de SI, la valeur de SI sur la composante périodique [8] de l’imagette (SI_p), et la valeur de LSI. Les imagettes en arrière-plan ont, comme l’on s’y attend, des valeurs de LSI et SI_p petites, alors que SI est sensible aux effets de bords (Imagette 6).



FIGURE 3 – À gauche : image *Parrots*. À droite, la carte de netteté locale. La valeur du pixel (x, y) correspond à la valeur de LSI sur la fenêtre $[x - 16, x + 15] \times [y - 16, y + 15]$ de taille 32×32 .

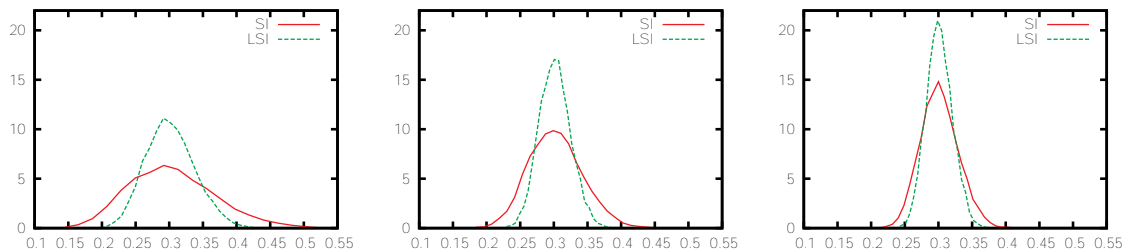


FIGURE 6 – Histogramme des valeurs de SI (trait plein rouge) et de LSI (pointillés verts) calculées sur 10000 réalisations d’images de bruit de taille 64×64 . À gauche, on a utilisé un bruit blanc, au milieu, le bruit à phases aléatoires associé à Lena, et à droite, son équivalent gaussien (i.e. un bruit gaussien dont la moyenne et la covariance sont estimées sur l’image de Lena). Dans les deux cas, les valeurs les plus représentées sont autour de 0.3, ce qui est faible en comparaison des valeurs trouvées dans la figure 2 sur une image structurée. Au passage, mentionnons que les expériences ont montré que les distributions des valeurs de SI et LSI sur un bruit blanc ne dépendent pas de la taille des images de bruit utilisées. Pour les deux autres types de bruit, la distribution semble dépendre de la taille, mais la valeur médiane ($\simeq 0.3$) reste la même.