

# Utilisation d'un milieu optique diffusant pour la caractérisation de modulateurs spatiaux de lumière

Antoine LIUTKUS, David MARTINA, Ori KATZ, Laurent DAUDET, Sylvain GIGAN

Institut Langevin, CNRS UMR7587, UPMC, Univ. Paris Diderot, ESPCI, 75005 Paris, France  
prenom.nom@espci.fr

**Résumé** – La propagation d'un champ optique à travers un milieu très fortement diffusant peut être correctement modélisée comme un opérateur linéaire, assimilable à une matrice dite *de transmission* lorsque le champ est discrétisé en entrée et en sortie. Dans cet article, nous montrons que cette matrice peut être estimée efficacement aux moindres carrés en se plaçant dans un cadre probabiliste gaussien. Nous montrons également qu'il est possible de très bien imager le champ en entrée à partir de l'observation du champ en sortie d'un tel milieu fortement diffusant, toujours par minimisation d'une erreur quadratique moyenne. Les techniques proposées sont appliquées à la calibration et à la détection de défauts de miroirs modulateurs spatiaux de lumière.

**Abstract** – The diffusion of light through highly scattering media can be understood as a linear operator, which reduces to a so-called *transmission matrix* when both inputs and outputs are discretized. In this study, we show that this matrix can be very well estimated through minimization of the squared error in a Gaussian probabilistic setting. We also show that the same ideas can be applied for the inverse problem which consists in estimating the input field given the complex optical field at the output of the scattering material. The proposed techniques extend state of the art and are applied in calibration and in default detection of spatial light modulators.

## 1 Introduction

La propagation d'un champ optique et sa diffraction à la rencontre d'un obstacle de petite taille est un phénomène bien compris et qu'on peut aborder par la théorie de la diffraction de Fresnel ou de Fraunhofer [1]. Cependant, lorsque le milieu traversé par la lumière est plus complexe et ne peut pas se ramener à un petit nombre de diffractions ou de diffusions, ces théories classiques sont impuissantes à correctement modéliser le comportement du champ optique.

En 2007, VELLEKOOP *et al.* ont montré qu'il est possible de focaliser la lumière à travers un milieu diffusant [8]. Le principe général de la méthode utilisée est de contrôler le front d'onde en amont du milieu en optimisant sa phase de manière gloutonne pour chaque paramètre de contrôle du front d'onde de manière à maximiser l'intensité au point de sortie voulu.

Des travaux récents [4, 3, 7, 6] ont proposé de caractériser la diffusion à travers un milieu quelconque grâce à une *matrice de transmission* (MT), qui relie le front d'onde en sortie du milieu à celui en entrée. En d'autres termes, le champ complexe optique pris en sortie est modélisé comme le produit entre une matrice et celui en entrée. Cette idée soulève deux enjeux principaux. Tout d'abord, le problème de l'estimation de la MT a fait l'objet de plusieurs études [4, 7]. Ensuite, celui de ses applications est le sujet de publications récentes, telles que [3].

Sur le sujet de l'estimation de la MT, nous étendons dans cette étude les travaux de POPOFF *et al.* [4] et montrons par le biais d'une analyse probabiliste qu'une meilleure estimation de la MT est possible, en particulier si on augmente le nombre des

mesures. Une fois la MT estimée, nous montrons qu'elle peut être utilisée pour la détection de défauts dans le système de contrôle du front d'onde. La technique proposée ne fait pas intervenir de techniques d'interférométrie, délicates à mettre en oeuvre et peut se transposer facilement à des systèmes de contrôle de fronts d'ondes différents des modulateurs spatiaux de phases considérés ici.

Cet article est structuré de la manière suivante : tout d'abord, nous indiquons brièvement en section 2 le protocole expérimental et les notations utilisées. Ensuite, nous présentons en section 3 la technique proposée pour l'estimation de la MT et ses performances. En section 4, nous montrons comment il est possible de très simplement identifier les défauts de modulateurs spatiaux de lumière.

## 2 Protocole expérimental et notations

Pour une mesure  $t$  donnée, l'expérience est représentée sur la figure 1. Un faisceau laser est agrandi par un couple de lentilles (L-L). L'onde plane incidente (1 sur la figure) est réfléchiée en partie par un modulateur spatial de phase (SLM) et en partie par son support constituant respectivement l'onde modulée  $x_t$  et l'onde de référence  $A$ . Le SLM est constitué d'une matrice de  $N = 32 \times 32 = 1024$  micromiroirs de  $300\mu\text{m}$  de côté (Kilo-DM, Boston Micromachines Corporation), dont chaque élément  $n$  permet de contrôler la phase  $\phi_{nt}$  correspondante de

$$x_{nt} = \exp\left(j\frac{\pi}{2}\phi_{nt}\right).$$

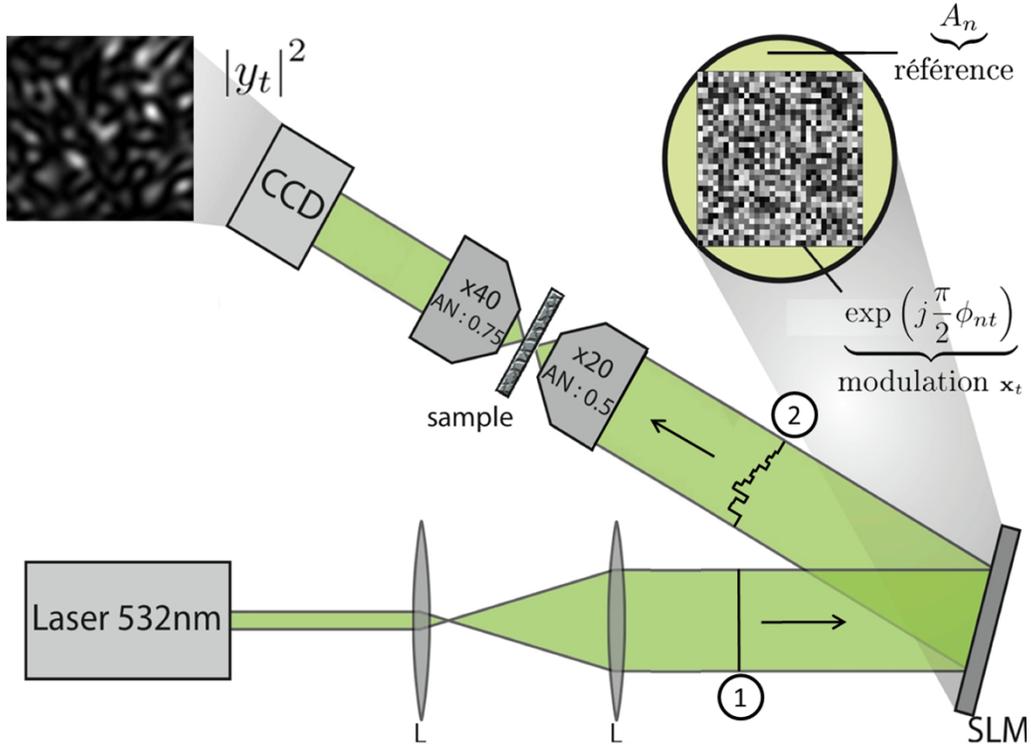


FIGURE 1 – Montage expérimental de l’expérience de transmission optique à travers un milieu diffus. Le front d’onde d’un laser est modulé par un SLM puis transmis à travers un milieu diffusant. Une caméra permet de mesure le champ en sortie du milieu.

Ces deux ondes combinées forment l’onde réfléchi (2 sur la figure), dont la valeur à la position  $n$  est ainsi  $A_n x_n$ . Cette onde est ensuite injectée dans un milieu opaque diffusant constitué d’une couche compacte de particules d’oxyde de zinc (épaisseur de  $300\mu\text{m}$ ). La lumière diffusée de très nombreuses fois dans le milieu est finalement collectée et imagée par une caméra CCD. On pourra se reporter à [5, 4] pour plus de détails sur les détails de l’expérience.

Le champ complexe  $y_{mt}$  à chacune des  $m = 1, \dots, M$  positions de sortie est estimé à partir des mesures d’intensité faites par la caméra CCD grâce à la technique des *quatre phases*, qu’on trouvera exposée dans [5, 7]. De par la définition de la MT  $M$  de ce milieu, on a :

$$y_{mt} = \sum_{n=1}^N M_{mn} A_n x_{nt}.$$

Par la suite, on définira  $H_{mn} = M_{mn} A_n$  comme la MT *relative*, qui dépend non seulement du milieu diffusant mais aussi de l’onde de référence. Par abus de notations,  $H$  sera aussi appelée Matrice de Transmission dans la suite de cet article : son estimation plutôt que celle de  $M$  est suffisante pour l’application envisagée<sup>1</sup>.

Dans tous les cas, le champ complexe mesuré en sortie est donné par :

$$y_{mt} = \sum_{n=1}^N H_{mn} x_{nt},$$

1. Dans la mesure où l’onde de référence  $A_n$  reste constante au cours des différentes mesures  $t$ , il est possible d’identifier  $M$  à partir de  $H$  [5].

ce qui peut se mettre sous la forme matricielle  $Y = HX$  où  $Y = [y_{mt}]_{m,t}$  et  $X = [x_{nt}]_{n,t}$  sont des matrices de dimensions respectives  $M \times T$  et  $N \times T$ , tandis que  $H$  est de dimension  $M \times N$ .

### 3 Estimation de la matrice de transmission

#### 3.1 État de l’art

La technique proposée par POPOFF *et al.* dans [5, 4] pour estimer la MT  $H$  consiste à utiliser pour  $X$  une base orthonormée, donc de dimension  $N \times N$ .

Le choix de la base de HADAMARD dans ce but est judicieux puisqu’elle n’est constituée que d’entrées valant  $\pm 1$ , ce qui a pour conséquence le fait d’avoir  $x_{nt} = \pm j$ . Ainsi, si  $B_N$  est la base de HADAMARD de dimension  $N \times N$ , la matrice mesurée sera en théorie  $Y = HB_N$ . Si on définit  $I_N$  comme la matrice identité de dimension  $N$ , une des propriétés de  $B_N$  est d’être sa propre inverse. On a donc  $B_N B_N = I_N$  et  $Y B_N = H$ . Cette procédure très simple permet ainsi d’estimer la MT  $H$  du milieu.

Ce développement est valide uniquement dans le cas où l’observation se fait sans bruit. Si en effet au lieu d’observer  $Y = HX$  on observe plutôt  $Y = HX + E$  où les éléments  $e_{mt}$  de  $E$  correspondent à un bruit additif inconnu, alors il n’est plus évident que cette technique reste optimale.

## 3.2 Généralisation : estimation aux moindres carrés

Dans un contexte probabiliste d'estimation de  $H$ , on peut supposer  $X$  fixé et connu et tous les éléments de  $H$  inconnus, indépendants *a priori* et distribués selon une loi gaussienne circulaire centrée de variance  $\sigma_H^2$ . Notons  $\mathbf{h}_m$  et  $\mathbf{e}_m$  la  $m^{\text{ème}}$  ligne de  $H$  et  $E$ , respectivement, supposées aléatoires et notons  $\mathbf{y}_m^*$  la conjugaison Hermitienne de  $\mathbf{y}_m$ . Partant de  $Y = HX + E$ , nous posons alors :

$$\mathbf{y}_m^* = X^* \mathbf{h}_m^* + \mathbf{e}_m^*.$$

Si on suppose que tous les éléments de  $\mathbf{e}_m$  sont indépendants<sup>2</sup>, gaussiens et identiquement distribués de variance  $\sigma_e^2$ , on peut montrer (voir par exemple [2]) que l'estimée  $\hat{\mathbf{h}}_m$  de  $\mathbf{h}_m$  étant donné  $\mathbf{y}_m$  qui minimise l'erreur quadratique moyenne est donnée par :

$$\hat{\mathbf{h}}_m = \mathbf{y}_m X^* \left( X X^* + \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_H} \right)^2 I_M \right)^{-1}.$$

On peut de plus en déduire la covariance *a posteriori* de  $\hat{\mathbf{h}}_m$ , qui donne une indication sur l'erreur commise lors de l'estimation. Si on suppose le bruit d'observation nul sur tous les capteurs  $m$ , on peut remarquer que cette expression coïncide avec la technique proposée par POPOFF *et al.* dans [5, 4]. En figure 2, nous voyons que l'estimation de  $H$  obtenue en utilisant  $T > N$  mesures<sup>3</sup> est meilleure que celle obtenue avec seulement  $X = B_N$ . La métrique proposée est la différence normalisée, en dB, entre  $\hat{H} \mathbf{x}_t$  et  $\mathbf{y}_t$ , pour un autre jeu de données que celui utilisé pour l'estimation.

## 4 Problème inverse et calibration du SLM

### 4.1 Formulation gaussienne

Si on suppose à présent la MT  $H$  connue, on peut se concentrer sur le *problème inverse* consistant à estimer le champ modulé  $\mathbf{x}_t$ , de dimension  $N \times 1$ , à présent inconnu, à partir de l'observation du champ complexe  $\mathbf{y}_t$ , de dimension  $M \times 1$  mesuré en sortie.

Dans ce but et de manière analogue au développement de la section précédente, on peut poser :

$$\mathbf{y}_t = H \mathbf{x}_t + \mathbf{e}_t,$$

où  $\mathbf{x}_t$  est supposé gaussien circulaire et centré de moyenne nulle. Sa covariance  $\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t'}^* \rangle$ , de dimension  $N \times N$  est supposée vérifier :

$$\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t'}^* \rangle = \delta_{tt'} R_x,$$

tandis que celle de  $\mathbf{e}_t$  vérifie :

$$\langle \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_{t'}^* \rangle = \delta_{tt'} R_e.$$

2. Il est possible d'étendre ces résultats au cas où on ne suppose plus indépendants les éléments de  $E$ , au prix d'un plus lourd coût calculatoire.

3. Nous avons choisi  $\forall t < N, X_{nt} = B_{nt}$  et  $\forall t > N, p(X_{nt} = \pm 1) = \frac{1}{2}$

Ainsi, les différentes mesures  $t$  sont supposées indépendantes. Dans ces conditions, l'estimée aux moindres carrés  $\hat{\mathbf{x}}_t$  de  $\mathbf{x}_t$  étant donné  $\mathbf{y}_t$  est donnée par :

$$\hat{\mathbf{x}}_t = (R_x^{-1} + H^* R_e^{-1} H)^{-1} H^* R_e^{-1} \mathbf{y}_t \quad (1)$$

et généralise les expressions proposées dans [5, 4, 3].

### 4.2 Application à la détection de défauts d'un SLM

Une fois établie l'expression (1) pour la reconstruction du champ complexe au niveau des miroirs du SLM à partir de l'observation du champ en sortie du milieu, nous proposons de l'exploiter dans le but de détecter d'éventuelles défaillances dans le fonctionnement des modulateurs spatiaux de lumière.

Du fait de leur taille extrêmement petite, il est en effet difficile de procéder facilement à des tests matériels simples pour vérifier que la position de chaque miroir correspond bien à celle qui est demandée par l'expérimentateur. Or, le coût très élevé de ces appareils et leur utilisation dans certaines applications critiques peut rendre nécessaire de bénéficier d'un certain nombre de garanties quant à leur qualité et à leur bonne calibration.

Plutôt que de procéder à de complexes opérations d'interférométrie permettant de remonter à la position précise de chaque miroir, nous proposons dans cette étude une méthode simple à mettre en œuvre dont le but est de détecter pour chaque miroir s'il semble se comporter de la manière attendue. Le principe en est le suivant.

Si un miroir  $m$  est défaillant, la position  $\hat{\mathbf{x}}_{mt}$  effective est différente en moyenne de celle qui y est demandée, et la relation entre ce miroir et le champ en sortie a de très fortes chances d'être non linéaire ou dégénérée. Par conséquent, la valeur qui y sera estimée sera en moyenne très différente de celle  $\mathbf{x}_t$  demandée au système. Ainsi, cette différence peut être utilisée dans le but de détecter de telles défaillances.

En figure 2 (droite), on voit que la méthode proposée permet en particulier d'identifier comme défaillants 6 des miroirs, dont les quatre miroirs aux coins du SLM. Or, nous savons que ces miroirs ne sont en réalité pas contrôlés par l'expérimentateur : la documentation du SLM utilisé indique qu'ils sont en fait immobiles. Il est remarquable que la technique utilisée permette de constater très aisément cette situation. On peut noter que les résultats semblent en outre indiquer que deux autres des miroirs souffrent de défaillance, bien qu'une étude plus poussée soit nécessaire pour en être sûr.

En effet, la technique proposée ne peut que mesurer l'écart entre la valeur entrée par l'expérimentateur et celle reconstruite, sous hypothèse de linéarité du système. Bien que de telles hypothèses soient justifiées par la physique, il reste clair que le bruit de mesure peut être une des causes de ces écarts. Il demeure cependant que la technique proposée est un moyen très rapide de détecter des fautes dans le but de procéder au besoin à des études plus poussées.

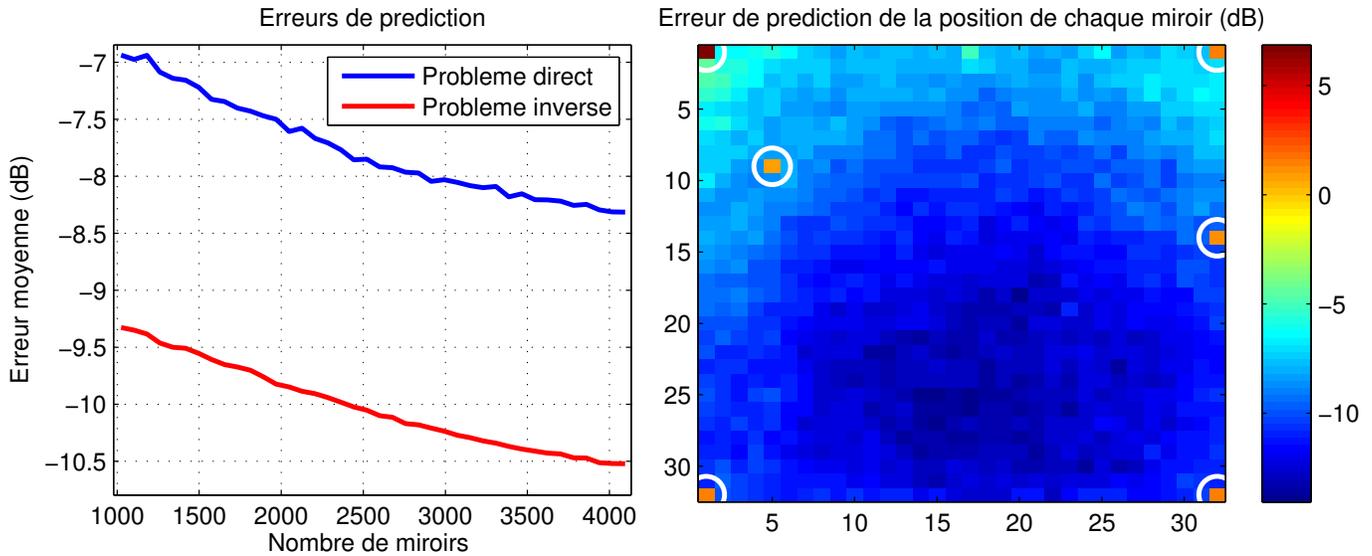


FIGURE 2 – Résultats des expériences. À gauche, performances des prédictions effectuées en utilisant la matrice  $H$  estimée par la méthode proposée, en fonction du nombre  $T$  des mesures. À droite, erreur moyenne de prédiction en dB sur le déphasage induit par chaque miroir à partir de l’observation du champ diffusé.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons montré comment des principes classiques d’estimation linéaire aux moindres carrés permettent d’identifier les caractéristiques de milieux optiques complexes. Nous nous sommes tout d’abord intéressés au problème de la calibration, qui consiste à estimer la matrice de transmission d’un milieu, puis à celui de l’inversion, qui consiste à en estimer l’entrée à partir de l’observation de sa sortie. Les estimateurs proposés généralisent ceux de l’état de l’art et offrent des performances supérieures. Nous avons en outre montré que les milieux optiques fortement diffusants peuvent être utilisés avec profit pour l’estimation précise des défaillances de systèmes de contrôle de fronts d’onde présentant un grand nombre de degrés de liberté.

## Références

- [1] J.W. Goodman. *Introduction To Fourier Optics*. McGraw-Hill physical and quantum electronics series. Roberts & Co., 2005.
- [2] T. Kailath, A.H. Sayed, and B. Hassibi. *Linear estimation*. Prentice-Hall information and system sciences series. Prentice Hall, 2000.
- [3] S. Popoff, G. Lerosey, M. Fink, A.C. Boccara, and S. Gigan. Image transmission through an opaque material. *Nature Communications*, page 1 :81, 2010.
- [4] S. M. Popoff, G. Lerosey, R. Carminati, M. Fink, A. C. Boccara, and S. Gigan. Measuring the Transmission Matrix in Optics : An Approach to the Study and Control of Light Propagation in Disordered Media. *Physical Review Letters*, 104(10) :100601, March 2010.

- [5] S M Popoff, G Lerosey, M Fink, A C Boccara, and S Gigan. Controlling light through optical disordered media : transmission matrix approach. *New Journal of Physics*, 13(12) :123021, 2011.
- [6] S.M. Popoff, A. Aubry, G. Lerosey, M. Fink, A.C. Boccara, and S. Gigan. Exploiting the time-reversal operator for adaptive optics, selective focusing, and scattering pattern analysis. *Phys Rev Lett*, 107(26) :263901, 2011.
- [7] S. Tripathi, R. Paxman, T. Bifano, and K.C. Toussaint. Vector transmission matrix for the polarization behavior of light propagation in highly scattering media. *Opt Express*, 20(14) :16067–76, 2012.
- [8] I. M. Vellekoop and A. P. Mosk. Focusing coherent light through opaque strongly scattering media. *Opt. Lett.*, 32(16) :2309–2311, Aug 2007.