

# Politiques optimales d'allocation de blocs de sous-porteuses dans les systèmes OFDMA codés sans connaissance du canal

Antonia Maria MASUCCI<sup>1</sup>, Inbar FIJALKOW<sup>1</sup>, E. Veronica BELMEGA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ETIS/ENSEA - Université de Cergy Pontoise - CNRS  
6 Avenue de Ponceau, 95014 Cergy, France

masucci@ensea.fr, belmega@ensea.fr, inbar.fijalkow@ensea.fr

**Résumé** – Nous étudions les politiques optimales d'allocation de sous-porteuses dans les systèmes OFDMA codés en liaison montante sans connaissance du canal à l'émetteur. La transformée de Fourier discrète du canal dans les systèmes OFDMA génère la présence de corrélation entre les sous-porteuses ce qui produit une dégradation des performances de transmission. En conséquence, il existe des répartitions des sous-porteuses qui sont susceptibles d'obtenir un gain de diversité accrue. Afin de trouver ces politiques optimales nous minimisons une fonction somme-corrélation définie comme la somme des corrélations de chaque sous-porteuse par rapport aux autres dans le même schéma d'allocation. En plus, nous montrons la robustesse de la politique d'allocation par bloc proposée aux effets du CFO. Nous proposons la taille du bloc qui fournit le bon compromis entre la diversité et le CFO. Des simulations numériques valident nos résultats.

**Abstract** – We study the optimal blockwise subcarrier allocation scheme in coded OFDMA uplink systems without channel state information at the transmitter side. The Discrete Fourier Transform of the channel in OFDMA systems produce correlation between the subcarriers and this correlation produce a degradation of the transmission performance. As a consequence, there exist some subcarrier allocation schemes which are likely to obtain higher diversity gains. In order to find these optimal schemes we minimize an inter-carrier sum-correlation function defined as the sum of correlations of each subcarrier with respect to the others in the same allocation scheme. We show the robustness of the proposed blockwise allocation policy to the effect of carrier frequency offsets (CFO). Moreover, we propose the block-size which provides the good compromise between diversity and CFO. Numerical simulations which validate our results are presented.

## 1 Introduction

Grâce à sa simplicité et flexibilité, la technologie OFDMA (*Orthogonal Frequency Division Multiple Acces*) a été proposée comme candidate pour les normes de communication sans fil de nouvelle génération 4G, comme LTE (3GGP Long Term Evolution) [1], [2]. L'un des avantages majeurs de cette technologie est sa capacité d'allouer les sous-porteuses aux différents utilisateurs, qui permet de bénéficier de la diversité du canal. Cependant, il faut aussi considérer sa sensibilité aux effets du CFO (décalage en fréquence porteuse, en anglais *carrier frequency offset*) dû au décalage entre l'oscillateur local de l'émetteur et la fréquence porteuse qui lui est attribuée [3]. Cette mauvaise synchronisation en fréquence entre l'oscillateur des utilisateurs et celui de la station de base provoque la perte d'orthogonalité entre les sous-porteuses qui génère de l'interférence entre les porteuses (ICI, *inter-carrier interference*).

Des systèmes sans CFO et avec des sous-porteuses indépendantes présentent le même gain de diversité du canal quel que soit le schéma d'allocation des sous-porteuses. Toutefois, en raison de la transformée de Fourier discrète (TFD) du canal, les systèmes OFDMA et SC-FDMA (*single carrier-FDMA*) présentent des sous-porteuses corrélées et, par conséquent, une dégradation de la qualité de transmission se produit. Il existe

donc des schémas d'allocation qui sont susceptibles d'obtenir un gain de diversité accrue. Nous nous sommes intéressés dans ce papier à trouver, dans le cas de sous-porteuses corrélées et sans connaissance du canal (CSI, *channel state information*) à l'émetteur, la taille du bloc qui minimise cette corrélation.

Dans le cas d'une transmission OFDMA/SC-FDMA en liaison montante, les utilisateurs diffusent leur information à travers l'ensemble des sous-porteuses. Différentes politiques d'allocation de sous-porteuses sont utilisées afin de diviser la bande passante disponible entre les utilisateurs permettant à chaque utilisateur d'avoir un accès unique. Les schémas d'allocation les plus utilisés quand il n'y pas de connaissance parfaite du canal à l'émetteur sont l'attribution par blocs et l'entrelacement [4]. Dans le schéma de répartition par blocs, des sous-ensembles de sous-porteuses adjacentes, appelés blocs, sont attribués à chaque utilisateur, tandis que dans le schéma d'allocation entrelacé les sous-porteuses sont uniformément espacées les unes des autres à une distance égal au nombre d'utilisateurs. Le schéma d'allocation entrelacé est un cas particulier de la répartition par blocs où la taille des blocs est égale à une sous-porteuse. L'entrelacement est généralement considéré pour bénéficier de la diversité en fréquence (IEEE 802.16) [5]. Toutefois, la robustesse au CFO est améliorée par une grande taille de bloc qui réduit l'interférence entre les utilisateurs.

Dans cette contribution, nous étendons les résultats relatifs

aux systèmes SC-FDMA de [6] aux systèmes OFDMA codés, sans connaissance du canal. Dans [6], nous étudions les schémas optimaux de répartition de sous-porteuses dans les systèmes SC-FDMA : en minimisant la fonction somme-corrélation (la somme des corrélations de chaque sous-porteuse par rapport aux autres dans un même schéma d'allocation). Le gain de diversité maximal est atteint par plusieurs tailles de bloc qui sont dans un ensemble dans lequel la taille la plus grande est une fonction des paramètres du système : le nombre de sous-porteuses, le nombre des utilisateurs et la longueur du préfixe cyclique.

Dans ce travail, nous analysons le cas de systèmes OFDMA codés en liaison montante OFDMA sans CSI, avec et sans CFO. Les résultats que nous obtenons sont des conclusions naturelles mais qui ont jamais été prouvées avant. L'utilisation du codage du canal dans les systèmes OFDMA nous permettra de réduire les erreurs résultant de l'environnement trajets multiples et de récupérer le gain de diversité. Par ailleurs, nous définissons la fonction somme-corrélation dans le cas où le système subit en plus du CFO et nous montrons la robustesse au CFO de la politique d'allocation par blocs proposée. Les résultats sont validés par simulations.

## 2 Système OFDMA sans CFO

Nous considérons un système OFDMA en liaison montante avec  $N_u$  utilisateurs mobiles en communication avec une station de base. La bande passante totale est divisée en  $N_p$  sous-porteuses. On prend  $N_p$  comme une puissance entière de deux afin d'optimiser la transformée de Fourier discrète. Pour faciliter les calculs, nous supposons que le nombre d'utilisateurs  $N_u$  et la taille de bloc  $b$  sont des puissances entières de deux afin d'avoir des schémas de répartition équitables entre les utilisateurs et un spectre pleinement utilisé. On note  $M = \frac{N_p}{N_u}$  le nombre de sous-porteuses par utilisateur et  $L$  la longueur du préfixe cyclique.

Le signal, de dimensions  $N_p \times 1$ , reçu à la station de base après la TFD est donné par, [7],

$$\mathbf{r} = \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{H}^{(u)} \mathbf{\Pi}_b^{(u)} \mathbf{x}^{(u)} + \mathbf{n} \quad (1)$$

où  $\mathbf{H}^{(u)}$  est la matrice diagonale du canal de l'utilisateur  $u$  avec les entrées

$$H_k^{(u)} = \frac{1}{\sqrt{N_p}} \sum_{m=0}^{L-1} h_m^{(u)} e^{-j2\pi mk/N_p},$$

où  $[h_0^{(u)}, \dots, h_{L-1}^{(u)}]$  représente la réponse impulsionnelle du canal de l'utilisateur  $u$ .  $\mathbf{\Pi}_b^{(u)}$  est la matrice d'allocation de dimension  $N_p \times N_p$  avec les entrées égales à 1 pour les porteuses allouées à l'utilisateur  $u$  et égales à 0 pour les porteuses allouées à l'utilisateur  $v$  avec  $v \neq u$  selon la taille de bloc considéré  $b \in \beta = \{1, 2, 4, \dots, \frac{N_p}{N_u}\} = \{2^0, 2^1, \dots, 2^{\log \frac{N_p}{N_u}}\}$ . Le vecteur  $\mathbf{x}^{(u)}$  est le vecteur de symboles transmis par l'utilisateur  $u$  et  $\mathbf{n}$  est le bruit additif gaussien de variance  $\sigma_n^2 \mathbf{I}$ .

En supposant que les réponses impulsionnelles des canaux sont indépendantes mais distribuées avec la même distribution gaussienne complexe  $\mathcal{CN}(0, \sigma_h^2)$ , nous considérons la somme-corrélation définie comme la somme des corrélations de chaque sous-porteuse par rapport aux autres dans le même schéma d'allocation,

$$\begin{aligned} \Gamma_m(b) &= \sum_{c_u \in \mathcal{C}_u} \mathbb{E} \left[ H_m^{(u)} H_{c_u}^{(u)*} \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[ |H_m^{(u)}|^2 \right] + \sum_{\substack{c_u \in \mathcal{C}_u \\ c_u \neq m}} \mathbb{E} \left[ H_m^{(u)} H_{c_u}^{(u)*} \right] \\ &= \frac{\sigma_h^2}{N_p} L + \frac{\sigma_h^2}{N_p} \sum_{c_u \in \mathcal{C}_u} \frac{\sin \left[ \frac{\pi L}{N_p} (m - c_u) \right]}{\sin \left[ \frac{\pi}{N_p} (m - c_u) \right]} e^{-\pi j \frac{(L-1)}{N_p} (m - c_u)} \end{aligned} \quad (2)$$

où  $m \in \mathcal{C}_u$  est la sous-porteuse de référence et l'ensemble  $\mathcal{C}_u$  est donné par

$$\mathcal{C}_u = \bigcup_{k \in \{1, 2, 3, \dots, \frac{N_p}{bN_u}\}} \{(k-1)bN_u + (u-1)b + i, \forall i \in \{1, \dots, b\}\}.$$

L'ensemble  $\mathcal{C}_u$  est composé de tous les indices des sous-porteuses allouées à l'utilisateur  $u$  avec une taille de blocs  $b$ .

Il est possible de prouver que la fonction somme-corrélation est indépendante de l'utilisateur considéré [6].

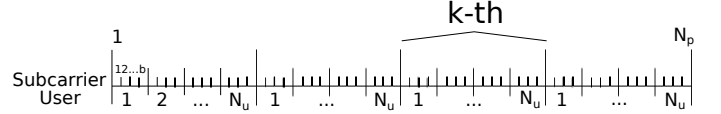


FIGURE 1 – Le nombre de sous-porteuses  $N_p$  est divisé en  $\frac{N_p}{bN_u}$  grands blocs. Le grand bloc  $k$  contient  $bN_u$  sous-porteuses, qui sont divisées en  $N_u$  blocs de taille  $b$ , un pour chaque utilisateur.

**Théorème 1** Nous considérons le système OFDMA en liaison montante avec  $N_p$  sous-porteuses,  $N_u$  utilisateurs et  $L$  la longueur du préfixe cyclique. Nous montrons que l'ensemble de valeurs qui minimisent  $\Gamma_m$  est  $\beta^* \triangleq \{1, 2, 4, \dots, \frac{N_p}{N_u} L\}$  et que pour  $b^* \in \beta^*$

$$\Gamma_m(b^*) = \frac{\sigma_h^2}{N_u},$$

où  $\Gamma_m(b)$  est la fonction somme-corrélation définie en (2).

S'il est intuitif que pour un canal de diversité  $L$ , un utilisateur récupère toute la diversité si  $N_u bL \leq N_p$ , nous avons démontré que les valeurs de  $\beta^*$  minimisent la somme capacité.

## 3 Robustesse au CFO

Nous étudions le cas de systèmes OFDMA avec CFO et les effets du CFO sur la taille du bloc optimale.

Le signal, de dimensions  $N_p \times 1$ , reçu à la station de base après la TFD est approché par

$$\mathbf{r}_{CFO} \simeq \sum_{u=1}^{N_u} \mathbf{H}^{(u)} \mathbf{\Delta}^{(u)} \mathbf{\Pi}_b^{(u)} \mathbf{x}^{(u)} + \mathbf{n}, \quad (3)$$

où la matrice  $\mathbf{\Delta}^{(u)}$  représente l'effet du CFO sur l'interférence entre sous-porteuses et les éléments sont donnés par

$$\Delta_{\ell,k}^{(u)} = \frac{1}{N_p} \frac{\sin(\pi(\delta f + k - \ell))}{\sin\left(\frac{\pi}{N_p}(\delta f + k - \ell)\right)} e^{\pi j \left(1 - \frac{1}{N_p}\right) (\delta f + k - \ell)},$$

avec  $\delta f$  le coefficient du CFO de l'utilisateur  $u$ . Dans la suite, nous noterons  $\tilde{\mathbf{H}}^{(u)} \triangleq \mathbf{H}^{(u)} \mathbf{\Delta}^{(u)}$ . (3) est validé sous réserve de  $L \ll N_p$  pour négliger l'effet du préfixe cyclique [7]. Nous considérons la somme-corrélation :

$$\begin{aligned} \Gamma_{u,m}^{CFO}(b, \delta f) &\triangleq \sum_{c_u \in \mathcal{C}_u} \mathbb{E} \left[ \tilde{\mathbf{H}}_m^{(u)} \tilde{\mathbf{H}}_{c_u}^{(u)\dagger} \right] \\ &= \sum_{c_u \in \mathcal{C}_u} \sum_{k \in \mathcal{C}_u} \mathbb{E} \left[ H_m^{(u)} H_{c_u}^{(u)*} \right] \Delta_{m,k} \Delta_{c_u,k}^* \\ &= \frac{\sigma_h^2}{N_p^3} L \sum_{k \in \mathcal{C}_u} \frac{1 - \cos(2\pi(\delta f + k) - 2\pi m)}{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N_p}(\delta f + k) - \frac{2\pi}{N_p}m\right)} + \\ &\quad + \frac{\sigma_h^2}{N_p} \sum_{\substack{c_u \in \mathcal{C}_u \\ c_u \neq m}} e^{-\pi j \frac{(L-1)(m-c_u)}{N_p}} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{N_p}L(m-c_u)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{N_p}(m-c_u)\right]} \times \\ &\quad \times \frac{1}{N_p^2} \sum_{k \in \mathcal{C}_u} e^{-\pi j \left(1 - \frac{1}{N_p}\right)(m-c_u)} \times \\ &\quad \times \frac{[\cos(\pi(m-c_u)) - \cos(2\pi(\delta f + k) - \pi(m+c_u))]}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{N_p}(m-c_u)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{N_p}(\delta f + k) - \frac{\pi}{N_p}(m+c_u)\right)\right]} \end{aligned} \quad (4)$$

où  $m \in \mathcal{C}_u$  est la sous-porteuse de référence et  $\tilde{\mathbf{H}}_m^{(u)}$  représente la ligne d'indice  $m$ ,  $\left(H_m^{(u)} \Delta_{m,1}, \dots, H_m^{(u)} \Delta_{m,N_p}\right)$ , de la matrice  $\tilde{\mathbf{H}}^{(u)}$ .

Dans la proposition suivante, nous étudions le comportement de la somme-corrélation lorsque le CFO tend vers zéro : nous montrons que la somme-corrélation avec CFO peut être approchée par la fonction somme-corrélation définie dans le cas sans CFO donnée en (2). Cela implique que nous avons la robustesse au CFO.

**Proposition 1** Lorsque le coefficient  $\delta f$  du CFO tend vers zéro, la fonction somme-corrélation définie dans (4) tend vers la fonction somme-corrélation définie dans le cas sans CFO dans (4) :

$$\lim_{\delta f \rightarrow 0} \Gamma_{u,m}^{CFO}(b, \delta f) = \Gamma_m(b) \quad \forall b. \quad (5)$$

En présence de valeurs faibles du CFO,  $b_{max}^*$  représente le bon compromis entre la robustesse au CFO et la diversité. Nous avons trouvé que les tailles optimales qui permettent d'atteindre le maximum de diversité sont celles qui minimisent la corrélation entre sous-porteuses. Dans le cas où le CFO n'est pas négligeable nous proposons une unique taille du bloc optimale qui permet d'atteindre la diversité.

**Conjecture 1** Puisque le CFO provoque une perte de diversité, en présence de valeurs "modérées" du CFO la taille du bloc d'allocation optimale est

$$b_{max}^* = \frac{N_p}{LN_u}.$$

Nous savons que en général, en présence du CFO les tailles plus grandes sont préférables pour s'opposer à l'effet du CFO. Ainsi, en présence du CFO, nous proposons la plus grande taille de bloc optimale  $b_{max}^*$  comme la taille de bloc qui représente le meilleur compromis entre la diversité et le CFO : car elle est entre les tailles du bloc qui atteignent la diversité, la taille qui s'oppose le mieux aux effets du CFO. Cette observation est validée par des simulations numériques dans la section suivante.

## 4 Simulations

Dans les simulations qui suivent, nous utilisons un code convolutif  $C(1, 2, 7)$  de rendement 1/2 comme code correcteur d'erreur, une modulation 4-QAM et nous considérons le scénario suivant :  $N_p = 64$ ,  $N_u = 2$  et  $L = 16$ .

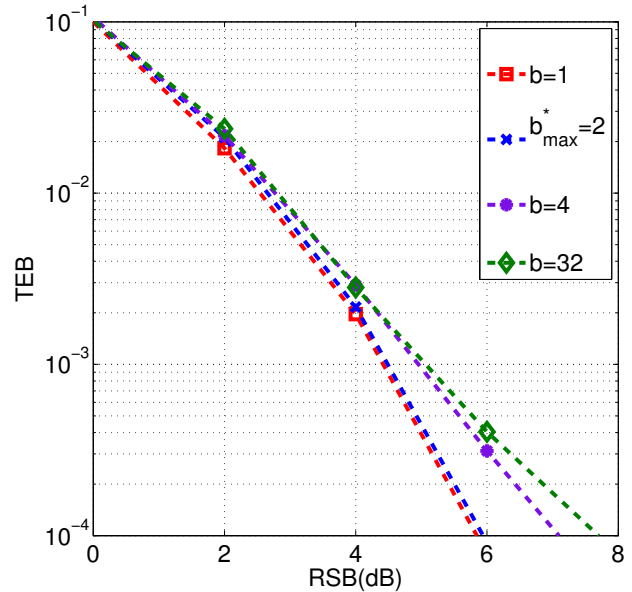


FIGURE 2 – Courbes du taux d'erreur binaire pour le système OFDMA avec  $N_p = 64$ ,  $N_u = 2$  et  $L = 16$ . CFO de chaque utilisateur est généré de façon indépendante et uniforme dans  $[0, 0.01]$ .  $b^* \in \beta^* = \{1, 2\}$ .

La Figure 2 illustre le taux d'erreur binaire (TEB) pour le système OFDMA avec le CFO généré de façon indépendante et uniforme dans  $[0, 0.01]$  pour chaque utilisateur. On trace les courbes TEB pour différentes tailles du bloc  $b = 1, 2, 4, 32$ . Nous observons que, pour ces faibles valeurs du CFO, on a des meilleures performances du système quand on prend les tailles du bloc dans  $\beta^* = \{1, 2\}$ , ce qui valide notre analyse.

La Figure 3 illustre les TEB pour le système OFDMA avec

les CFO générés de façon indépendante et uniforme dans  $[0, 0.03]$  pour chaque utilisateur. On trace les courbes TEB pour différents tailles du bloc  $b = 1, 2, 4, 32$ . On observe dans ce cas que nous avons une taille de bloc optimale unique égale à  $b_{max}^*$  ce qui confirme notre conjecture : lorsque les valeurs du CFO augmentent le compromis optimal entre la diversité et le CFO est représentée par la taille optimale la plus grande  $b_{max}^* = 2$ .

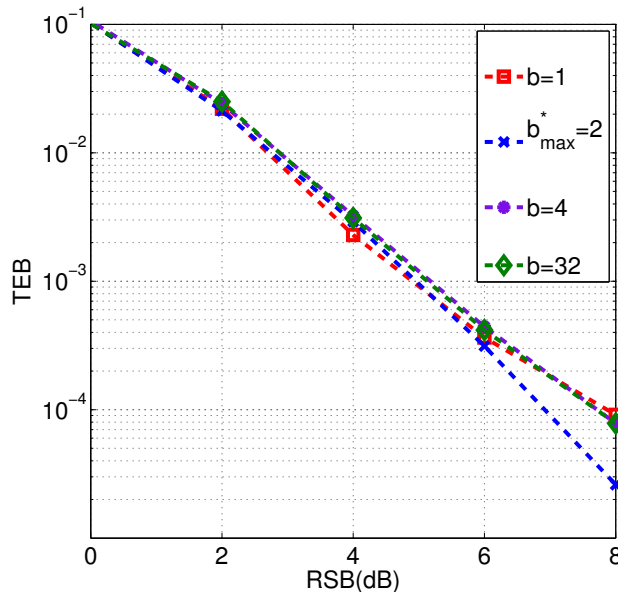


FIGURE 3 – Courbes du taux d’erreur binaire pour le système OFDMA avec  $N_p = 64$ ,  $N_u = 2$  et  $L = 16$ . CFO de chaque utilisateur est généré de façon indépendante et uniforme dans  $[0, 0.03]$ .  $b_{max}^* = \frac{64}{16 \times 2} = 2$ .

## 5 Conclusions

Dans ce travail, nous avons analysé les politiques optimales d’allocation de sous-porteuses dans les systèmes OFDMA codés en liaison montante sans connaissance du canal à l’émetteur. Nous proposons un nouveau critère d’allocation de sous-porteuses qui est original puisqu’il est basé sur la minimisation de la corrélation entre les sous-porteuses. Nous déduisons du critère proposé l’ensemble des tailles optimales du bloc qui atteignent le maximum de diversité. Nous fournissons l’expression analytique de la plus grande taille de bloc optimale qui dépend des paramètres du système : le nombre de sous-porteuses, le nombre d’utilisateurs et la longueur du préfixe cyclique. Nous trouvons la valeur minimale de la corrélation entre les sous-porteuses, qui dépend du nombre d’utilisateurs et de la variance de la réponse impulsionnelle du canal. De plus, nous montrons la robustesse de la politique optimale d’allocation par blocs  $b_{max}^* = \frac{N_p}{LN_u}$  proposée aux effets du CFO.

## Références

- [1] A. Molisch, “Wideband Wireless Digital Communication”, Upper Saddle River : Prentice Hall, 2001.
- [2] D. Galda, R. Gruenheid, H. Rohling, “OFDMA flexible and adaptive air interface for a 4G mobile communication system”, *International Conference on Telecommunications (ICT)*, Beijing, China, pp. 5 - 14, June, 2002.
- [3] H. Sari, G. Karam, and I. Jeanclaude, “Channel equalization and carrier synchronization in OFDM systems,” in *Proceedings of the 6th Tirrenia International Workshop on Digital Communications*, Tirrenia, Italy, Sep. 1993, pp. 191-202.
- [4] A. Sohl and A. Klein, “Comparison of localized, interleaved, and block-interleaved FDMA in terms of pilot multiplexing and channel estimation,” in *Proceedings of the 15th European Signal Processing Conference*, Poznan, Poland, Sep. 2007.
- [5] L. Koffman and V. Roman, “Broadband wireless access solutions based on OFDM access in IEEE 802.16,” *IEEE Communication Magazine*, pp. 96-103, April 2002.
- [6] A.M. Masucci, E.V. Belmega, and I. Fijalkow, “Optimal blockwise subcarrier allocation policies in single carrier FDMA uplink systems”, submitted to *IEEE Transactions on Signal Processing*, Mar. 2013.
- [7] B. Aziz, I. Fijalkow, M. Ariado, “Trade off between Frequency Diversity and Robustness to Carrier Frequency Offset in Uplink OFDMA System,” *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM 2011)*, 2011.