

Modélisation de trains d’impulsions à l’aide d’une loi de Weibull discrète. Estimation hors-ligne et séquentielle des paramètres

Jonathan MONSIFROT¹, Eric LE CARPENTIER², Yannick Aoustin¹

¹LUNAM Université, Université de Nantes, IRCCyN UMR CNRS 6597
1, rue de la Noë, 44321 Nantes, France

²LUNAM Université, Ecole Centrale de Nantes, IRCCyN UMR CNRS 6597
1, rue de la Noë, 44321 Nantes, France

jonathan.monsifrot@irccyn.ec-nantes.fr, eric.le-carpentier@irccyn.ec-nantes.fr
yannick.aoustin@irccyn.ec-nantes.fr

Résumé – De nombreux problèmes de traitement du signal font intervenir des séquences parcimonieuses présentant une certaine régularité. Cet article traite le cas de séquences aléatoires à temps discret et à événements binaires dont la loi inter-événement est choisie selon une distribution de Weibull discrète de type I. Il propose une modélisation markovienne de tels processus, décrit l’estimation par maximum de vraisemblance hors-ligne des paramètres, puis l’adaptation à une méthode récursive. L’objectif à plus long terme, non traité dans cet article, est la décomposition et la déconvolution impulsivonne en-ligne de signaux biomédicaux.

Abstract – Several signal processing issues involve parsimonious sequences presenting some regularity. This article deals with random binary discrete-time sequence for which inter-events sequence follows a Type-I discrete Weibull distribution. It proposes a Markov model of such processes, offline maximum likelihood estimation of the parameters, and adaptation to online estimation. The long term aim, which is not presented here, is the online deconvolution of biomedical signals.

1 Introduction

De nombreux signaux physiques sont modélisés à l’aide de trains d’impulsions (signaux sismiques [1], signaux biomédicaux [2]. . .). Dans [3] et [4] sont proposées des modélisations visant à prendre en compte une certaine régularité de ces trains, par exemple un temps inter-impulsion minimal. Nous proposons ici une modélisation markovienne de tels trains, fondée sur une loi de Weibull discrète à trois paramètres. Les estimations hors-ligne et en-ligne des paramètres du modèle sont détaillées et expérimentées.

2 Modélisation

Soit $(u[n])_{n \geq 1}$ une séquence à temps discret n , binaire (à valeur dans $\{0, 1\}$, avec 1 en cas d’impulsion). Nous proposons une modélisation issue de la théorie des processus de renouvellement, et conduisant à une représentation markovienne.

Modèle de Markov La séquence des temps de séjour entre deux impulsions $(\Delta[N])_{N \in \mathbb{Z}}$, N représentant le nombre d’impulsions déjà émis, est supposé être un processus stochastique indépendant et identiquement distribué (i.i.d.), décrit par une

loi de probabilité dont la masse $P(\Delta[N] = t|\Theta)$, pour tout entier t supérieur à 1, est paramétrée par un vecteur Θ .

En théorie de la fiabilité [5], il est courant d’utiliser le taux de hasard $r(t, \Theta)$, aussi appelé taux de défaillance, qui correspond à la probabilité qu’une impulsion se produise à l’instant t sachant qu’il ne s’est rien produit jusqu’à l’instant t . Pour tout entier positif $t \geq 1$:

$$r(t, \Theta) = \frac{P(\Delta[N] = t|\Theta)}{P(\Delta[N] \geq t|\Theta)} = \frac{P(\Delta[N] = t|\Theta)}{1 - \sum_{\tau=1}^{t-1} P(\Delta[N] = \tau|\Theta)} \quad (1)$$

Nous introduisons la séquence en dents de scie $T[n]$, qui correspond au temps de séjour depuis la dernière impulsion. La valeur $T[n]$ est incrémentée à chaque pas de temps, excepté s’il y a une impulsion : une remise à zéro est alors effectuée (figure 1).

Grâce au symbole delta de Kronecker, il est aisé d’écrire la relation entre la séquence d’impulsion et le temps de séjour depuis la dernière impulsion : $u[n] = \delta(T[n])$.

Notons par l’exposant n la durée jusqu’à l’instant n (par exemple, $T^n = (T[k])_{1 \leq k \leq n}$). Alors, sous l’hypothèse que la séquence des temps inter-impulsions $\Delta[N]$ est i.i.d., nous pouvons écrire les propriétés suivantes.

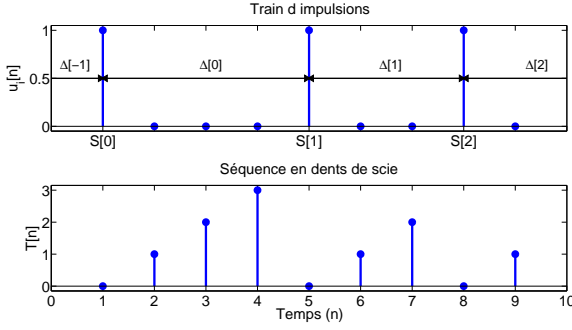


FIGURE 1 – Train d’impulsions $u[n]$ et séquence $T[n]$ en dents de scie correspondante.

- Le processus du temps de séjour $T[n]$ est markovien :

$$\mathbb{P}(T[n+1] = t|T[n] = t, \Theta) = \mathbb{P}(T[n+1] = t|T[n], \Theta) \quad (2)$$

- la probabilité de transition s’écrit à l’aide du taux de hasard (1) :

$$\mathbb{P}(T[n+1] = t|T[n], \Theta) = \begin{cases} r(T[n] + 1, \Theta) & \text{si } t = 0 \\ 1 - r(T[n] + 1, \Theta) & \text{si } t = T[n] + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

- la valeur moyenne du processus $(u[n])_{n \in \mathbb{Z}}$, c’est-à-dire son taux de décharge, est l’inverse de l’espérance du processus inter-impulsions, soit $1/E\{\Delta|\Theta\}$.

Démonstration. Par souci de simplicité, on omet le vecteur paramètre Θ dans cette démonstration.

Considérons un instant n entre la N -ième impulsion au temps $S[N]$, et strictement avant la $(N+1)$ -ième impulsion au temps $S[N+1]$. La connaissance de T^n est équivalente à celle de $\{\Delta^{N-1}, T[n]\}$, car avant $S[N] + 1$ la séquence est déterminée par l’ensemble temps inter-impulsions, et après $S[N] + 1$ jusqu’à n , la séquence est entièrement déterminée par $T[n]$. D’après la définition de la probabilité conditionnelle, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T[n+1] = 0|T[n] = t, T^{n-1}) &= \mathbb{P}(T[n+1] = 0|T[n] = t, \Delta^{N-1}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(T[n+1] = 0, T[n] = t|\Delta^{N-1})}{\mathbb{P}(T[n] = t|\Delta^{N-1})} \end{aligned}$$

L’événement $\{T[n+1] = 0, T[n] = t\}$ correspond à l’arrivée d’une impulsion avec un temps de séjour $\Delta[N]$ valant $t+1$, et la position de la dernière impulsion $S[N]$ étant à $n-t$. L’événement $T[n] = t$ correspond au fait que le temps de séjour est supérieur à $t+1$, mais la position de la dernière impulsion reste à $n-t$. En remplaçant cela dans l’égalité précédente et en uti-

lisant à nouveau la définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T[n+1] = 0|T[n] = t, T^{n-1}) &= \frac{\mathbb{P}(\Delta[N] = t+1, S[N] = n-t|\Delta^{N-1})}{\mathbb{P}(\Delta[N] \geq t+1, S[N] = n-t|\Delta^{N-1})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\Delta[N] = t+1|S[N] = n-t, \Delta^{N-1})}{\mathbb{P}(\Delta[N] \geq t+1|S[N] = n-t, \Delta^{N-1})} \end{aligned}$$

En supposant que le dernier instant d’impulsion $S[N]$ est indépendant de la séquence des temps de séjour Δ^N , et que la séquence est i.i.d., nous avons :

$$\mathbb{P}(T[n+1] = 0|T[n] = t, T^{n-1}) = \frac{\mathbb{P}(\Delta[N] = t+1)}{\mathbb{P}(\Delta[N] \geq t+1)}$$

étant le taux de hasard $r(t)$ du processus inter-impulsions (défini en (1)). Cela montre (2). Comme $T[n+1]$ ne peut prendre que deux valeurs parmi $\{0, t+1\}$, nous obtenons très facilement (3).

On vérifie facilement que la masse de probabilité $\rho(t)$ de la distribution invariante de $T[n]$, soit la solution de

$$\rho(t') = \sum_{t \geq 0} \mathbb{P}(T[n+1] = t'|T[n] = t) \rho(t)$$

est donnée par

$$\rho(t) = \frac{1 - \sum_{\tau=1}^t \mathbb{P}(\Delta = \tau)}{\mathbb{E}\{\Delta\}}$$

Alors, la valeur moyenne de la séquence $U[n]$ donne :

$$\mathbb{E}\{U[n]\} = \mathbb{E}\{\delta(T[n])\} = \mathbb{P}(T[n] = 0) = \rho(0) = 1/\mathbb{E}\{\Delta\} \quad \square$$

Loi inter-impulsions Nous introduisons alors une loi de Weibull discrète de type I [6], conduisant à une expression simple du taux de hasard (1) malgré la somme au dénominateur. Cette loi a été étendue [7] à trois paramètres $\Theta = (t_0, \beta, T_r)$: t_0 est un paramètre de localisation, β est un paramètre de concentration, T_r est un paramètre de décalage temporel. La masse de probabilité et le taux de hasard s’expriment, pour tout entier $t \geq 1$, par :

$$\mathbb{P}(\Delta = t|\Theta) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{t-T_r-1}{t_0-T_r}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{t-T_r}{t_0-T_r}\right)^\beta} & \text{si } t > T_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

$$r(t, \Theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t-1-T_r}{t_0-T_r}\right)^\beta} - \left(\frac{t-T_r}{t_0-T_r}\right)^\beta & \text{si } t > T_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

L’espérance $\mathbb{E}\{\Delta|\Theta\}$ ne possède pas de forme explicite, mais peut être approchée, pour de grandes valeurs de t_0 , par $(t_0 - T_r)\Gamma(1 + 1/\beta) + T_r$ où Γ est la fonction Gamma d’Euler [8].

Un exemple d’une telle loi est montré en Figure 1, avec $\beta > 1$. Le cas $\{\beta = 1, T_r = 0\}$ correspond à une loi géométrique (ce qui donne un train indépendant d’impulsions). Les paramètres t_0 et β doivent être estimés, T_r est supposé connu. Le taux de décharge associé est alors approximativement $\frac{1}{(t_0 - T_r)\Gamma(1 + 1/\beta) + T_r}$.

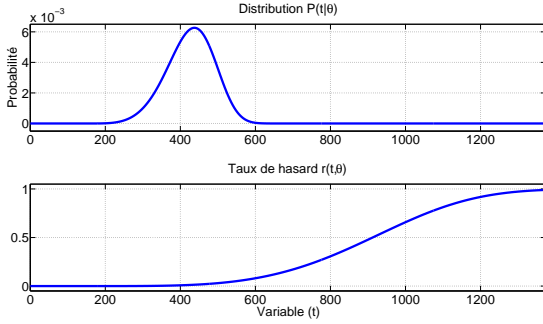


FIGURE 2 – Loi de Weibull de type I et le taux de hasard associés, $t_0 = 450$, $\beta = 5$ et $T_r = 150$

3 Estimation des paramètres de la loi inter-impulsions

Estimation hors ligne Une estimation empirique des paramètres d'une loi de Weibull discrète de type I est réalisée dans [9]. On développe ici une méthode de maximum de vraisemblance approché, et son optimisation par quasi-Newton. Notons $T_*^n = (T[2], \dots, T[n])$, la séquence T^n dans laquelle le premier terme est omis. Bien que l'estimation par MV de Θ est l'argument maximisant la probabilité $P(T^n = t^n | \Theta = \theta)$ à séquence donnée t^n , nous utilisons ici :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_n &= \arg \max_{\theta} P(T_*^n = t_*^n | \Theta = \theta, T[1] = t[1]) \\ &= \arg \min_{\theta} \underbrace{-\frac{1}{n} \ln P(T_*^n = t_*^n | \Theta = \theta, T[1] = t[1])}_{J_n(\theta)} \end{aligned}$$

C'est un procédé standard pour démarrer une récurrence (voir la méthode d'autocovariance pour l'estimation des modèles autorégressifs [10]). En se servant de la propriété de chaîne de Markov, la fonction objectif J_n à minimiser s'écrit récursivement, pour tout entier $n \geq 2$:

$$J_n(\theta) = -\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \underbrace{\ln P(T[i] = t[i] | \Theta = \theta, T[i-1] = t[i-1])}_{-Q_i(\theta)}$$

Pour l'optimisation par quasi-Newton, le gradient Q'_i des Q_i , et donc le gradient J'_n de J_n sont faciles à calculer. Par ailleurs, nous utilisons une approximation définie positive du hessien J''_n de J_n sous la forme [11] :

$$J''_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n Q'_i(\theta) Q'_i(\theta)^\top$$

Cette approximation peut être justifiée par les divers modes de calcul de la matrice d'information de Fisher de la loi de probabilité de transition [12].

Estimation en ligne En utilisant l'heuristique proposée dans [13], nous obtenons l'estimation récursive par gradient stochastique suivante (où H_n est l'approximation du hessien $J''_n(\hat{\theta}_{n-1})$) :

pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} H_n &= \frac{1}{n} Q'_n(\hat{\theta}_{n-1}) Q'_n(\hat{\theta}_{n-1})^\top + \left(1 - \frac{1}{n}\right) H_{n-1} \\ \hat{\theta}_n &= \hat{\theta}_{n-1} - \frac{1}{n} H_n^{-1} Q'_n(\hat{\theta}_{n-1}) \end{aligned}$$

Initialisation de la méthode récursive L'algorithme doit être initialisé par θ_1 et H_1 . Hors, on vérifie facilement qu'à $\beta = 1$ fixé, l'estimateur de t_0 par maximum de vraisemblance est explicite. Comme β mesure la concentration de la loi, nous attendons l'arrivée d'au moins deux impulsions avant d'estimer β , préalablement fixé à $\beta = 1$, tout en conservant l'équation calculant la matrice hessienne approchée.

4 Simulation

Un train d'impulsions est tiré suivant (3) (voir Figure 1 pour un exemple) avec les paramètres $t_0 = 450$, $\beta = 5$ et $T_r = 150$, à une fréquence de 10kHz. Une estimation par MV est effectuée hors-ligne, les résultats sont présentés sur la Figure 3. L'optimum est atteint en 9 étapes (critère d'arrêt à 10^{-3} de précision). Le même train d'impulsions est ensuite utilisé pour effectuer une optimisation en-ligne, suivant la méthode de la section 3.

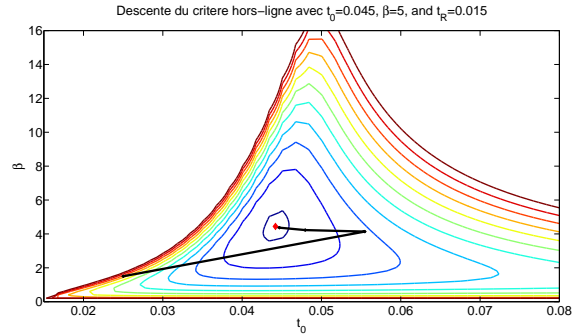


FIGURE 3 – Lignes de niveau du critère (trait fin) et les valeurs successives de l'estimateurs par MV (trait épais). L'optimum est désigné par un losange

La figure 4 montre l'estimation en ligne des paramètres t_0 et β , et la figure 5 le taux de décharge associé. L'estimation semble donner des résultats satisfaisants, l'évolution du taux de décharge estimé présente un profil caractéristique, qui s'explique facilement dans la mesure où l'estimation est faite à partir de données dont une (la dernière) est censurée à droite : la survenue d'une impulsion conduit en général à la mise à jour du taux de décharge vers le haut.

5 Conclusion

Nous disposons d'un outil de modélisation de processus impulsions présentant un certain caractère de régularité. L'objectif ultérieur est d'utiliser cet algorithme comme la première

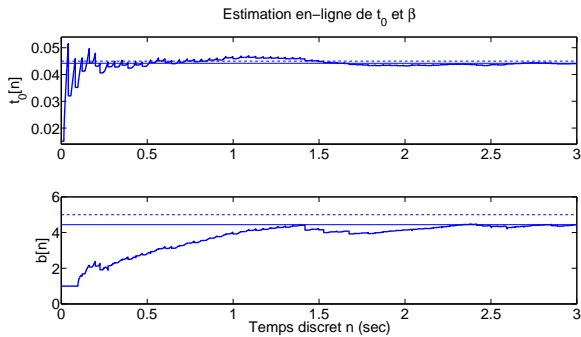


FIGURE 4 – Estimateur des paramètres t_0 et β (courbes), les valeurs d’optimisation hors ligne (ligne continue) et les valeurs de la simulation (ligne en pointillé).

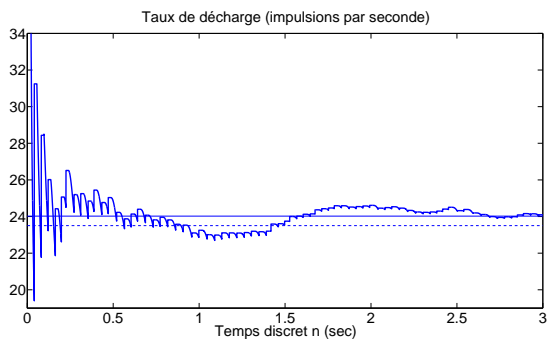


FIGURE 5 – Taux de décharge pour l’exemple précédent

étape de la définition d’une stratégie de commande d’une prothèse chez des patients amputés, à partir de la mesure de signaux électromyographiques intramusculaires.

Références

- [1] Q. Cheng, R. Chen, and T.-H. Li, “Simultaneous wavelet estimation and deconvolution of reflection seismic signals,” *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 34, no. 2, pp. 377–384, 1996.
- [2] D. Ge, E. Le Carpentier, and D. Farina, “Unsupervised Bayesian decomposition of multiunit EMG recordings using tabu search,” *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, vol. 57, no. 3, pp. 561–571, 2010.
- [3] D. Ge, J. Idier, and E. Le Carpentier, “Enhanced sampling schemes for MCMC based blind Bernoulli-Gaussian deconvolution,” *Signal Processing*, vol. 91, no. 4, pp. 759–772, 2011. [Online]. Available : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168410003439>
- [4] G. Kail, J.-Y. Tourneret, F. Hlawatsch, and N. Dobigeon, “Blind deconvolution of sparse pulse sequences under a minimum distance constraint : a partially collapsed gibbs sampler method,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 60, no. 6, pp. 2727–2743, Jun. 2012.
- [5] V. Barbu and N. Limnios, “Reliability theory for discrete-time semi-Markov systems,” in *Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications*, ser. Lecture Notes in Statistics. Springer New York, 2008, vol. 191, pp. 1–30.
- [6] T. Nakagawa and S. Osaki, “The discrete Weibull distribution,” *IEEE Trans. on Reliability*, vol. R-24, no. 5, pp. 300–301, Dec. 1975.
- [7] R. Lockhart and M. Stephens, “Estimation and tests of fit for the three-parameter Weibull distribution,” *J. of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 56, no. 3, pp. 491–500, 1994.
- [8] C. de Luca and W. Forrest, “Some properties of motor unit action potential trains recorded during constant force isometric contractions in man,” *Kybernetik*, vol. 12, pp. 160–168, 1973. [Online]. Available : <http://dx.doi.org/10.1007/BF00289169>
- [9] M. Khan, A. Khalique, and A. Abouammoh, “On estimating parameters in a discrete Weibull distribution,” *IEEE Trans. on Reliability*, vol. 38, no. 3, pp. 348–350, Aug. 1989.
- [10] S. Kay and S. Marple, “Spectrum analysis; a modern perspective,” *Proc. of the IEEE*, vol. 69, no. 11, pp. 1380–1419, Nov. 1981.
- [11] N. Schraudolph, J. Yu, and S. Guenter, “A stochastic quasi-Newton method for online convex optimization,” in *Proc. of 11th Int. Conf. on Artificial Intelligence and Statistics*, 2007.
- [12] S. Yi, D. Wierstra, T. Schaul, and J. Schmidhuber, “Stochastic search using the natural gradient,” in *Proc. of the 26th Annual Int. Conf. on Machine Learning*, ser. ICML ’09. New York, NY, USA : ACM, 2009, pp. 1161–1168. [Online]. Available : <http://doi.acm.org/10.1145/1553374.1553522>.
- [13] L. Ljung and T. Söderström, *Theory and Practice of Recursive Identification*. Massachusetts and London : The MIT Press, 1983.