

Un nouvel algorithme de filtrage dans les modèles de Markov à saut linéaires et Gaussiens

Yohan PETETIN, François DESBOUVRIES

Institut Mines Telecom / Telecom SudParis / Département CITI et CNRS UMR 5157, 9 rue Charles Fourier, 91011 Evry, France
yohan.petetin@it-sudparis.eu, francois.desbouvries@it-sudparis.eu

Résumé – Dans cette communication, nous traitons le problème du filtrage statistique dans des modèles de Markov à sauts linéaires et Gaussiens. Dans ces modèles, le calcul de l’estimateur bayésien optimal (au sens de l’erreur quadratique moyenne (EQM)) est un problème NP-complet. Les solutions sous optimales, basées sur des approximations numériques ou sur les méthodes de Monte Carlo séquentielles cherchent à approcher l’estimateur optimal dans ces modèles. Nous proposons ici une méthode alternative qui consiste à approcher le modèle donné par un modèle tout aussi pertinent du point de vue physique mais dans lequel l’estimateur optimal est calculable avec un coût linéaire en nombre d’observations.

Abstract – In this paper, we focus on the statistical filtering problem in linear and Gaussian Jump Markov State Space Systems (JMSS). In such models, the computation of the optimal Bayesian estimate (in the sense of the mean square error) is an NP hard problem. Suboptimal solutions include algorithms based on numerical approximations or based on Sequential Monte Carlo methods. We propose an alternative option which consists in approximating the linear and Gaussian JMSS by a statistical model which keeps the same physical properties but in which the computation of the optimal estimate can be done at a computational cost which is linear in the number of observations.

1 Introduction

Cette communication traite du problème du filtrage statistique dans des modèles de Markov à sauts conditionnellement linéaires et Gaussiens [8] [3], qui font intervenir un processus caché, un processus observé et un processus latent discret.

Ces modèles sont construits hiérarchiquement : on se donne d’abord la loi (Markovienne) du saut, puis celle du signal caché conditionnellement à ces sauts, et enfin celle des observations conditionnellement aux sauts et au signal caché.

Bien que physiquement justifiée, une telle approche peut, dans certains cas, limiter structurellement l’efficacité des algorithmes d’inférence statistique. En effet, le calcul de l’estimateur Bayésien optimal (au sens du risque quadratique) est un problème NP-complet. Des techniques de calcul approché (Generalized pseudo-Bayes algorithms [8], Interacting Multiple Models algorithms (IMM) [1], algorithmes de filtrage particulière (FP) [3]) sont donc indispensables et ce même dans le cas le plus simple, où conditionnellement aux variables de saut, la chaîne de Markov cachée est un système d’état classique linéaire et Gaussien.

Le choix de l’approximation utilisé est donc crucial et influence l’efficacité de l’inférence statistique qui est faite dans ces modèles probabilistes.

Dans cette communication, nous soulevons le problème de la pertinence de ces modèles. Plutôt que de chercher à améliorer les approximations de l’estimateur utilisées dans le modèle de départ, nous approchons ce même modèle par un modèle tout aussi pertinent d’un point de vue physique et plus efficace pour l’inférence Bayésienne, au sens où l’estimateur opti-

mal est calculable exactement avec une complexité linéaire en nombre d’observations.

2 Les modèles à sauts

Soient $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 0} \in \mathbb{R}^m$ et $r_k \in \{1, \dots, K\}$ deux processus cachés et $\{\mathbf{y}_k\}_{k \geq 0} \in \mathbb{R}^p$ un processus observé. Dans un modèle de Markov caché à sauts, la loi de $(\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{0:k}, \mathbf{r}_{0:k}) = (\mathbf{z}_{0:k}, \mathbf{r}_{0:k})$ s’écrit

$$p^1(\mathbf{z}_{0:k}, \mathbf{r}_{0:k}) = p^1(r_0) \underbrace{\prod_{i=1}^k p^1(r_i | r_{i-1})}_{p^1(\mathbf{r}_{0:k})} \times \underbrace{\prod_{i=1}^k f_{i|i-1}(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{i-1}, r_i)}_{p^1(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{r}_{0:k})} \underbrace{\prod_{i=0}^k g_i(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, r_i)}_{p^1(\mathbf{y}_{0:k} | \mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{r}_{0:k})} \quad (1)$$

(l’exposant 1 est réservé aux modèles à sauts classiques, c’est à dire aux modèles (1)). Les densités $f_{i|i-1}(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{i-1}, r_i)$ et $g_i(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, r_i)$ sont choisies en fonction de l’application pour laquelle on souhaite utiliser un tel modèle (poursuite d’objet manoeuvrant [3], géologie [4]). Nous dirons donc que ces lois caractérisent les *propriétés physiques* du modèle de Markov à sauts. Nous nous intéressons ici au calcul récursif de $\Theta_k = \mathbb{E}(f(\mathbf{x}_k) | \mathbf{y}_{0:k}) = \int f(\mathbf{x}_k) p^1(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{0:k}) d\mathbf{x}_k$, avec $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ou $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{x}^T$. Il est bien connu que même dans le cas condi-

tionnellement linéaire et Gaussien :

$$f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, r_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}_k(r_k)\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{Q}_k(r_k)), \quad (2)$$

$$g_k(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, r_k) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}_k(r_k)\mathbf{x}_k; \mathbf{R}_k(r_k)), \quad (3)$$

le calcul de Θ_k est un problème NP-complet [8]. Des approximations sont donc nécessaires, et plusieurs solutions ont été proposées. La loi $p^1(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{0:k})$ étant un mélange Gaussien dont le nombre de composantes croît exponentiellement avec le temps, des approximations reposant sur des techniques de fusion et d'élagage de Gaussiennes ont été proposées [8]; les techniques de filtrage IMM propagent et pondèrent plusieurs filtres de Kalman (FK) [6] [5]; enfin, le FP [3] [2] fournit l'approximation $p^1(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{0:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k(\mathbf{r}_{0:k}^i) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{0:k}; \mathbf{m}(\mathbf{r}_{0:k}^i); \mathbf{P}(\mathbf{r}_{0:k}^i))$, où les trajectoires $\mathbf{r}_{0:k}^i$ sont tirées aléatoirement et pondérées par des poids $w_k(\mathbf{r}_{0:k}^i)$.

La prochaine section se propose de construire une classe de modèles statistiques qui conserve les propriétés physiques des modèles à sauts linéaires et Gaussiens, caractérisées par $f_{k|k-1}$ et g_k , mais dans laquelle le calcul exact de Θ_k est possible avec une complexité linéaire en nombre d'observations. Contrairement aux méthodes d'approximations classiques, nous cherchons donc à calculer l'estimateur optimal dans un modèle approché, plutôt que d'approcher l'estimateur optimal dans le modèle classique.

3 Filtrage exact dans un modèle approché

3.1 Une classe de modèles physiquement équilibrés

Considérons de nouveau un processus $(\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{0:k}, \mathbf{r}_{0:k}) = (\mathbf{z}_{0:k}, \mathbf{r}_{0:k})$, dont la loi est notée $p^2(\mathbf{z}_{0:k}, \mathbf{r}_{0:k})$. L'objectif de cette section est de construire $p^2(\mathbf{z}_{0:k}, \mathbf{r}_{0:k})$ vérifiant les contraintes suivantes :

1. $p^2(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{r}_{0:i}) = f_{i|i-1}(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_{i-1}, r_i)$;
2. $p^2(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_{0:i}) = g_i(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, r_i)$; et
3. Θ_k peut être calculé exactement avec un coût linéaire en nombre d'observations.

Pour cela, nous introduisons les modèles de Markov couples à sauts linéaires et Gaussiens, dont la forme générale est donnée par

$$p^2(\mathbf{z}_{0:k}, \mathbf{r}_{0:k}) = p^2(r_0) \underbrace{\prod_{i=1}^k p^2(r_i|r_{i-1})}_{p^2(\mathbf{r}_{0:k})} \times \underbrace{\prod_{i=0}^k p^2(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1:k})}_{p^2(\mathbf{z}_{0:k}|\mathbf{r}_{0:k})}, \quad (4)$$

avec

$$p^2(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; \mathbf{B}_k(\mathbf{r}_{k-1:k})\mathbf{z}_{k-1}; \Sigma_k(\mathbf{r}_{k-1:k})). \quad (5)$$

La classe de modèles vérifiant ces contraintes est donnée par la proposition suivante (pour des raisons de place, nous ne présentons pas la preuve de ce résultat).

Proposition 1 *Soit un modèle de Markov caché à sauts Markoviens (1) vérifiant (2) et (3) quel que soit k . Alors les modèles de Markov couple à sauts conditionnellement Markoviens vérifiant $p^2(r_k|r_{k-1}) = p^1(r_k|r_{k-1})$, $p^2(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{r}_{0:k}) = f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, r_k)$, $p^2(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_{0:k}) = g_k(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, r_k)$, sont décrits par (5) où les matrices $\mathbf{B}_k(\mathbf{r}_{k-1:k})$ et $\Sigma_k(\mathbf{r}_{k-1:k})$ sont définies par*

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{r}_{k-1:k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k(r_k) - \mathbf{F}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})\mathbf{H}_{k-1}(r_{k-1}) & \mathbf{F}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k}) \\ \mathbf{H}_k(r_k)\mathbf{F}_k(r_k) - \mathbf{H}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})\mathbf{H}_{k-1}(r_{k-1}) & \mathbf{H}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k}) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\Sigma_k(\mathbf{r}_{k-1:k}) = \begin{bmatrix} \Sigma_k^{11}(\mathbf{r}_{k-1:k}) & \Sigma_k^{21}(\mathbf{r}_{k-1:k})^T \\ \Sigma_k^{21}(\mathbf{r}_{k-1:k}) & \Sigma_k^{22}(\mathbf{r}_{k-1:k}) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

avec

$$\Sigma_k^{11}(\mathbf{r}_{k-1:k}) = \mathbf{Q}_k(r_k) - \mathbf{F}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})\mathbf{R}_{k-1}(r_{k-1})\mathbf{F}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})^T, \quad (8)$$

$$\Sigma_k^{21}(\mathbf{r}_{k-1:k}) = \mathbf{H}_k(r_k)\mathbf{Q}_k(r_k) - \mathbf{H}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})\mathbf{R}_{k-1}(r_{k-1})\mathbf{F}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})^T, \quad (9)$$

$$\Sigma_k^{22}(\mathbf{r}_{k-1:k}) = \mathbf{R}_k(r_k) - \mathbf{H}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})\mathbf{R}_{k-1}(r_{k-1}) \times \mathbf{H}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})^T + \mathbf{H}_k(r_k)\mathbf{Q}_k(r_k)\mathbf{H}_k(r_k)^T, \quad (10)$$

où $\mathbf{F}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})$ and $\mathbf{H}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})$ peuvent être choisies arbitrairement à condition que $\Sigma_k(\mathbf{r}_{k-1:k})$ soit définie positive.

3.2 Filtrage Exact

Le problème du filtrage exact dans les modèles (5) a été abordé dans de récentes contributions [7]. Considérons le modèle (5). Une condition suffisante afin d'assurer le calcul récursif exact de $p(r_k|\mathbf{y}_{0:k})$ et de $\mathbb{E}(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{0:k}, r_k)$ et donc de

$$\Theta_k = \sum_{r_k} p(r_k|\mathbf{y}_{0:k})\mathbb{E}(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{0:k}, r_k), \quad (11)$$

est que

$$p^2(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1:k}) = p^2(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1:k}) \quad (12)$$

(les formules ne sont pas présentées ici faute de place) [7].

Dans les modèles de la Proposition 1, la loi $p^2(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1:k})$ dépend de \mathbf{x}_{k-1} à travers sa moyenne $m^{\mathbf{y}_k}$ qui s'écrit

$$\mathbf{m}^{\mathbf{y}_k} = (\mathbf{H}_k(r_k)\mathbf{F}_k(r_k) - \mathbf{H}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})\mathbf{H}_{k-1}(r_{k-1}))\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{H}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})\mathbf{y}_{k-1}. \quad (13)$$

En définitive, le filtrage exact est faisable dans les modèles de la Proposition 1 si pour tout $\mathbf{r}_{k-1:k}$, il existe une matrice $\mathbf{H}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})$ vérifiant

$$\mathbf{H}_k(r_k)\mathbf{F}_k(r_k) - \mathbf{H}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})\mathbf{H}_{k-1}(r_{k-1}) = \mathbf{0}. \quad (14)$$

3.3 Choix optimal de $\mathbf{F}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})$

Jusqu'ici, nous avons montré que l'ensemble des lois $p^2(\mathbf{z}_{0:k}, \mathbf{r}_{0:k})$ vérifiant la Proposition 1 et la condition (14) partagent les propriétés physiques du modèle original (2)-(3) et sont telles que Θ_k est calculable exactement. Il reste la question du choix du paramètre $\mathbf{F}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})$. Remarquons que le choix de la matrice $\mathbf{F}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})$ n'influe pas sur la possibilité de faire le filtrage de façon exacte ; ce paramètre peut également s'adapter en fonction des données traitées, lorsqu'elles ne vérifient pas nécessairement le modèle (1) ; nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe 4. Supposons maintenant que les données suivent le modèle (1). Nous cherchons alors la matrice $\mathbf{F}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})$ telle que la divergence de Kullback-Leibler (DKL) entre la loi $p^1(\mathbf{z}_{0:n}, \mathbf{r}_{0:n})$ du modèle à sauts linéaire et Gaussien et la loi $p^2(\mathbf{z}_{0:n}, \mathbf{r}_{0:n})$ de la classe de modèles de la Proposition 1 vérifiant (14) soit minimum. Nous avons la proposition suivante.

Proposition 2 *Soit un modèle couple à sauts linéaire et Gaussien de la Proposition 1, vérifiant (14), décrit par la loi $p^2(\mathbf{z}_{0:k}, \mathbf{r}_{0:k})$, paramétré par $\{\mathbf{F}_n^2(\mathbf{r}_{n-1:n})\}_{n \geq 0}$. La DKL entre les lois $p^2(\mathbf{z}_{0:n}, \mathbf{r}_{0:n})$ et $p^1(\mathbf{z}_{0:n}, \mathbf{r}_{0:n})$ est minimum si et seulement si pour tout i , $1 \leq i \leq n$,*

$$p^2(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1:i}, \mathbf{r}_{i-1:i}) = p^2(\mathbf{x}_i | \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_i, \mathbf{r}_{i-1:i}) \quad (15)$$

c'est à dire si

$$\mathbf{F}_i^{2,\text{opt}}(\mathbf{r}_{i-1:i}) = \mathbf{Q}_i(r_i) \mathbf{H}_i(r_i)^T [\mathbf{R}_i(r_i) + \mathbf{H}_i(r_i) \mathbf{Q}_i(r_i) \mathbf{H}_i(r_i)^T]^{-1} \mathbf{H}_i^2(\mathbf{r}_{i-1:i}). \quad (16)$$

3.4 Résumé

Nous obtenons finalement un nouvel algorithme de filtrage pour les modèles de Markov à sauts conditionnellement Markoviens. Partant d'un modèle classique, défini par $p^1(r_k | r_{k-1})$, $\mathbf{F}_k(r_k)$, $\mathbf{H}_k(r_k)$, $\mathbf{Q}_k(r_k)$ et $\mathbf{R}_k(r_k)$:

- E.1 On déduit la classe de modèles couple à sauts Markoviens qui conservent les propriétés physiques du modèle de départ en utilisant la proposition 1 ;
- E.2 On choisit $\mathbf{H}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})$ telle que (14) soit satisfaite et on choisit $\mathbf{F}_k^{2,\text{opt}}(\mathbf{r}_{k-1:k})$ vérifiant (16) ;
- E.3 On calcul récursivement $p(r_k | y_{0:k})$ et $E(f(\mathbf{x}_k) | y_{0:k}, r_k)$ et on déduit Θ_k .

4 Simulations

4.1 Modèle à sauts réel

On considère le modèle à sauts défini par $f_{k|k-1}(x_k | x_{k-1}, r_k) = \mathcal{N}(x_k; a(r_k)x_{k-1}; Q(r_k))$, $g_k(y_k | x_k, r_k) = \mathcal{N}(y_k; b(r_k)x_k; R(r_k))$ avec $r_k \in \{1, 2, 3\}$, $a_k(r_k) = [0.5, -1, 1]$, $b = 1$, $Q(r_k) = [5, 10, 10]$ et $R = 1$. Les probabilités de transitions de la chaîne $\{r_k\}$ sont données par $p^1(r_k | r_{k-1}) = 0.6$ si $r_k = r_{k-1}$ et $p^1(r_k | r_{k-1}) = 0.2$ si $r_k \neq r_{k-1}$. D'après la section précédente le modèle de Markov couple à sauts Markovien que

l'on va utiliser pour appliquer les formules de filtrage exact est donné par $p_{k|k-1}^2(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; \mathbf{B}_k(\mathbf{r}_{k-1:k})\mathbf{z}_{k-1}; \Sigma(\mathbf{r}_{k-1:k}))$ avec

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{r}_{k-1:k}) = \begin{bmatrix} a(r_k) - \frac{a(r_k)b^2Q(r_k)}{R+b^2Q(r_k)} & \frac{a(r_k)bQ(r_k)}{R(r_k)+b^2Q(r_k)} \\ 0 & a(r_k) \end{bmatrix},$$

$$\Sigma(\mathbf{r}_{k-1:k}) = \begin{bmatrix} Q(r_k) - \frac{a(r_k)^2b^2Q(r_k)^2R}{(R+b^2Q(r_k))^2} & bQ(r_k) - \frac{a(r_k)bQ(r_k)R}{R+b^2Q(r_k)} \\ bQ(r_k) - \frac{a(r_k)^2bQ(r_k)R}{R+b^2Q(r_k)} & R(1 - a(r_k)^2) + b^2Q(r_k) \end{bmatrix}.$$

Nous générons des données suivant le modèle à sauts classique (une réalisation du scénario est présentée à la Figure 1) et nous estimons Θ_k avec un filtre IMM, un FP basé sur le tirage de $N = 100$ particules suivant la loi $p(r_n | r_{n-1})$, et notre nouvelle technique de filtrage. Pour chaque indice temporel, nous calculons l'EQM de chaque estimateur, sur 200 réalisations, en utilisant comme référence un FK qui utilise les vrais sauts. Les résultats sont présentés sur la Figure 2, où les EQM des différents estimateurs sont normalisées par rapport à l'EQM de notre estimateur. Nous constatons que notre méthode améliorée améliore le filtrage IMM mais aussi de façon légère le FP. En ce qui concerne le temps de calcul, il apparaît que le temps moyen pour le FP est à peu près six fois plus élevé que pour notre méthode. L'augmentation du nombre de particules améliore légèrement les résultats du FP mais a un impact sur le coût de calcul, qui augmente également. Enfin notons que nous nous sommes placés ici dans le cas le moins favorable, au sens où les données ont été générées précisément suivant un modèle de Markov à sauts classique. Notre méthodologie permet d'adapter notre algorithme de filtrage à n'importe quel modèle général de la Proposition 1, en adaptant le paramètre $\mathbf{F}_k^2(\mathbf{r}_{k-1:k})$, comme nous le voyons dans notre prochaine simulation.

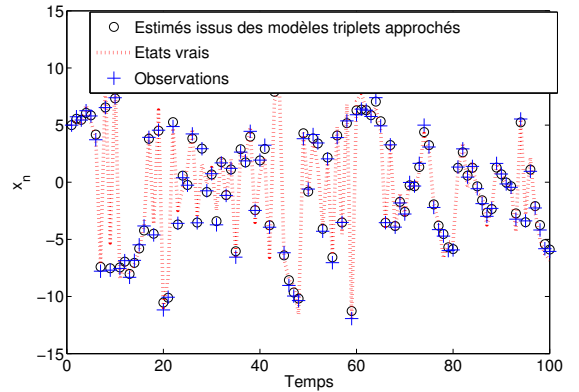


FIGURE 1 – Exemple de réalisation du scénario correspondant au modèle à sauts classique et restauration avec un modèle de la Proposition 1 vérifiant (14) et (16). Les vrais états (points rouges); états estimés basé sur notre approximation (cercles noirs) et observations (croix bleues).

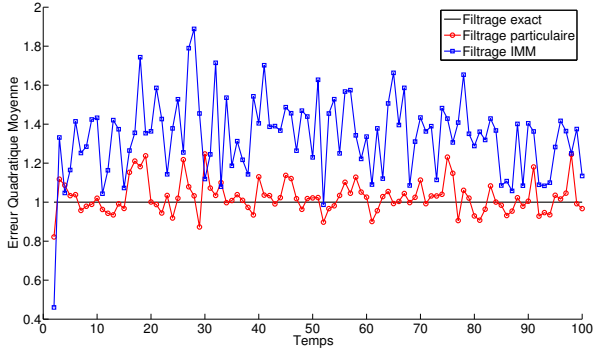


FIGURE 2 – Comparaison des EQM (normalisées) des trois méthodes de filtrage pour le problème d'estimation dans le modèle de Markov à sauts classique.

4.2 Poursuite d'objet manoeuvrant

Considérons maintenant un scénario de suivi d'objet manoeuvrant :

$$f_{n|n-1}(\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1}, r_n) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_n; \mathbf{F}_n(r_n)\mathbf{x}_{n-1}; \mathbf{Q}_n(r_n)), \quad (17)$$

$$g_n(\mathbf{y}_n | \mathbf{x}_n, r_n) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_n; \mathbf{H}_n\mathbf{x}_n; \mathbf{R}_n), \quad (18)$$

où

$$\mathbf{F}_n(r_n) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega_r T)}{\omega_r} & 0 & -\frac{1-\cos(\omega_r T)}{\omega_r} \\ 0 & \cos(\omega_r T) & 0 & -\sin(\omega_r T) \\ 0 & \frac{1-\cos(\omega_r T)}{\omega_r} & 1 & \frac{\sin(\omega_r T)}{\omega_r} \\ 0 & \sin(\omega_r T) & 0 & \cos(\omega_r T) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_n(r_n) = \sigma_v^2(r_n) \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{T^2}{2} & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix},$$

$\mathbf{H}_n = \mathbf{I}_4$ et $\mathbf{R}_n = 4\mathbf{I}_4$. Nous prenons $T = 2$, $R_n \in \{1, 2, 3\}$ représente le comportement dynamique de l'objet (ligne droite, virage à gauche, virage à droite). Nous choisissons $w_r = [0, 6\pi/180, -6\pi/180]$ et $\sigma_v(r_n) = [7, 10, 10]$ et les probabilités de transitions $p^1(r_n | r_{n-1}) = 0.8$ si $r_n = r_{n-1}$ et $p^1(r_n | r_{n-1}) = 0.1$ si $r_n \neq r_{n-1}$.

Comme dans la simulation précédente, nous construisons le modèle optimal de la Proposition 1 et nous générons cette fois ci des trajectoires suivant ce modèle, avec $\mathbf{F}_n^{2, \text{vraie}}(\mathbf{r}_{n-1:n}) = 0.7\mathbf{F}_n(r_n)$ et $\mathbf{H}_n^{2, \text{vraie}}(\mathbf{r}_{n-1:n}) = 0.9\mathbf{H}_n(r_n)$. Nous implémentons les estimateurs en utilisant les mêmes algorithmes de FP et IMM que ci-dessus et nous implémentons notre solution avec $\mathbf{F}_n^2(\mathbf{r}_{n-1:n}) = 0.8\mathbf{F}_n(r_n)$ et $\mathbf{H}_n^2(\mathbf{r}_{n-1:n})$ vérifiant (14), afin de pouvoir appliquer notre technique de filtrage exact. Remarquons que le choix $\mathbf{F}_n^2(\mathbf{r}_{n-1:n}) = \mathbf{F}_n^{2, \text{vraie}}(\mathbf{r}_{n-1:n})$ n'est pas nécessairement optimal parce que $\mathbf{H}_n^2(\mathbf{r}_{n-1:n}) \neq \mathbf{H}_n^{2, \text{vraie}}(\mathbf{r}_{n-1:n})$. Sur la Figure 3 nous traçons l'EQM normalisée et nous voyons que les solutions classiques ne sont plus du tout adaptées lorsque nous considérons des scénarios plus complexes.

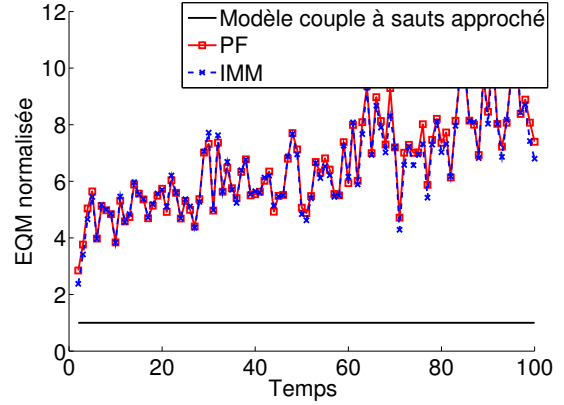


FIGURE 3 – EQM normalisée de l'estimateur associé à notre algorithme (ligne noire), au filtrage particulaire (carrés rouges) et à l'IMM (étoiles bleues). Les solutions classiques ne sont plus adaptées pour de tels modèles, tandis que notre approximation reste valide. Cela est dû au fait qu'il est possible d'ajuster ici le paramètre $\mathbf{F}_n^2(\mathbf{r}_{n-1:n})$.

Références

- [1] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. John Wiley and sons, New-York, 2001.
- [2] D. Crisan and A. Doucet. A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(3) :736–46, March 2002.
- [3] A. Doucet, N. J. Gordon, and V. Krishnamurthy. Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(3) :613–24, March 2001.
- [4] Paul Fearnhead and Peter Clifford. On-Line Inference for Hidden Markov Models via Particle Filters. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*, 65(4) :887–899, 2003.
- [5] X. Rong Li and V.P. Jilkov. Survey of maneuvering target tracking. Part V. Multiple-model methods. *IEEE Transactions on In Aerospace and Electronic Systems*, 41(4) :1255–1321, 2005.
- [6] E. Mazor, A. Averbuch, Y. Bar-Shalom, and J. Dayan. Interacting multiple model methods in target tracking : a survey. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34(1) :103–123, 1998.
- [7] W. Pieczynski. Exact filtering in conditionally markov switching hidden linear models. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Mathématiques*, 349(9-10) :587–590, 2011. in French.
- [8] J. K. Tugnait. Adaptive estimation and identification for discrete systems with Markov jump parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(5) :1054–65, October 1982.