

# Régularité locale pour l'analyse de texture : le mariage des *coefficients dominants* et de la *minimisation proximale*

Nelly PUSTELNIK<sup>1</sup>, Herwig WENDT<sup>2</sup>, Patrice ABRY<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon, CNRS UMR 5672, Lyon, France

<sup>2</sup>IRIT - ENSEEIHT, CNRS UMR 5505, Toulouse, France

nelly.pustelnik@ens-lyon.fr, herwig.wendt@irit.fr, patrice.abry@ens-lyon.fr

**Résumé** – Dans cette contribution, nous revisitons la question de la caractérisation de textures d'images par analyse des fluctuations de régularité locale en combinant deux éléments nouveaux. D'une part, dans l'estimation de la régularité locale proprement dite, la quantité multirésolution utilisée était classiquement le coefficient d'ondelette, l'accroissement ou l'oscillation. Nous la remplaçons par les coefficients dominants, une déclinaison des coefficients d'ondelettes inventée dans le contexte de l'analyse multifractale et qui apportent robustesse et amélioration dans les performances d'estimation. D'autre part, le post-traitement des estimées est réalisé par la mise en place d'une procédure de segmentation en partition minimale résolue à l'aide d'outils proximaux, ce qui nous permet de gérer efficacement le grand volume de données impliqué. Nous générons des textures synthétiques gaussiennes caractérisées par un changement de régularité locale dans une zone dont la position et la surface sont tirées aléatoirement. Nous mettons en oeuvre systématiquement la combinaison de l'estimation par coefficients dominants et segmentation proximale, illustrons la qualité et l'intérêt de cette approche pour segmenter les textures et quantifions la qualité de la segmentation obtenue en fonction de l'amplitude de l'amplitude du changement de régularité locale et de la surface de la zone modifiée.

**Abstract** – In this contribution, texture characterization is revisited through the analysis of local regularity fluctuations by combining two new elements. On one hand, in the estimate of local regularity itself, the multiresolution quantity typically involved was the wavelet coefficients, the increment or the oscillation. It is here replaced by wavelet leaders, a variation on wavelet coefficients, proposed in the context of multifractal analysis, that brings robustness and improvement in estimation performance. On other hand, the post-processing of the estimates is carried out by a minimal partition procedure solved with proximal tools, which allows us to effectively manage the large volume of data. Gaussian synthetic textures are generated, characterized by a change in local regularity over an area whose position and surface are randomly selected. The quality and the usefulness of the proposed approach for partitioning textures is illustrated and quantified in terms of quality of the segmentation as a function of the local regularity amplitude change and of the surface of the altered area.

## 1 Contexte, motivations et contributions

**Caractérisations de textures et régularité locale.** La caractérisation de textures constitue l'un des canons de l'analyse d'images (cf. e.g., [5, 10, 8, 16, 9] et les références qui y sont citées). Pour de nombreuses applications, dont les natures peuvent être très diverses, comme par exemple l'étude des textures de tissus humains (cf. [11] pour une revue de la littérature), l'imagerie des matériaux, l'imagerie satellite ou l'indexation d'images, la notion de texture peut *naturellement* être définie à travers celle de régularité locale. Celle-ci est usuellement mesurée par l'exposant de Hölder  $h(\underline{x})$  [7] : en substance,  $h(\underline{x})$  est l'exposant de la loi de puissance qui quantifie la décroissance de la puissance de fluctuations locales mesurées à l'aide de quantités multirésolution  $T_X(a, \underline{x})$ , souvent les coefficients d'ondelettes, dans la limite des petites échelles d'analyse :

$$T_X(a, \underline{x}) \simeq C(\underline{x})a^{h(\underline{x})}, \quad \text{quand } a \rightarrow 0.$$

Cet exposant de Hölder peut, en principe, être utilisé pour caractériser et segmenter les textures.

**Estimation de l'exposant de Hölder.** L'estimation locale de

l'exposant de Hölder a jusqu'ici été exclusivement conduite à partir de quantités multirésolution telles que les coefficients de transformée en ondelette continue, des accroissements ou des oscillations et a été principalement étudiée dans le cas de signaux 1D (cf. e.g., [1, 4]), avec peu d'efforts dévolus à l'image (ou au champ aléatoire), voir, a contrario [14]. Cependant, ces quantités produisent des estimations avec de médiocres performances, conséquence de la nature même de la quantité mesurée : le caractère local de la mesure produit une forte variance d'estimation ; dégrader le caractère local de la mesure fait décroître cette variance, au prix, cependant, d'une augmentation de biais, suffisante pour empêcher de voir les véritables changements de régularité. Ces difficultés ont, jusqu'ici, fortement tempéré l'usage pratique de la régularité locale pour l'analyse de texture.

**Contributions.** Dans ce contexte, la présente contribution propose une double amélioration reposant sur la combinaison de deux outils :  $h(\underline{x})$  est mesuré à partir des coefficients dominants, une déclinaison des coefficients d'ondelettes inventée dans le contexte de l'analyse multifractale [7, 17] et qui apporte robustesse, précision dans la localisation spatiale et amélioration

dans les performances d'estimation. Cette variation ne suffit cependant pas à rendre exploitable pratiquement les estimées de  $h(\underline{x})$ , par conséquent une procédure de segmentation spatiale des estimées de  $h(\underline{x})$  est élaborée. Cette dernière se base sur l'utilisation d'outils proximaux dans le but de minimiser un critère convexe relié à l'approche de Mumford-Shah [12].

## 2 Méthodologie

**Régularité locale.** Soit  $X$  la fonction bornée 2D (image) que l'on souhaite analyser. La régularité locale autour de la position  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  est mesurée par l'exposant dit de Hölder  $h(\underline{x}_0)$ , défini comme le plus grand  $\alpha > 0$ , tel qu'il existe une constante  $C > 0$  et un polynôme  $P_{\underline{x}_0}$  de degré inférieur à  $\alpha$ , tel que  $|X(\underline{x}) - P_{\underline{x}_0}(\underline{x})| \leq C|\underline{x} - \underline{x}_0|^\alpha$  dans un voisinage  $\underline{x}$  de  $\underline{x}_0$ . Si  $h(\underline{x}_0)$  est proche de 0, l'image est localement très irrégulière. Inversement, une grande valeur de  $h(\underline{x}_0)$  conduit à un champ localement lisse. Par exemple, lorsque  $h(\underline{x}_0)$  tend vers 2, le champ devient de plus en plus lisse jusqu'à être différentiable. La première ligne de la figure 1 présente différents exemples de textures gaussiennes multifractionnaires, caractérisées par des exposants de Hölder constants par morceaux (pour chaque image on peut observer 2 régions ayant des régularités différentes  $h_0$  et  $h_1 = h_0 + \Delta h$ ).

**Coefficients dominants.** Soient  $d_X^{(m)}(j, \underline{k})$ , pour  $m = 1, 2, 3$ , le coefficient (normalisé  $L^1$ ) de la transformée en ondelettes discrètes 2D (2D-DWT), à l'échelle  $a = 2^j$  et à la position  $\underline{k}$ . Le coefficient dominant  $L_X(j, \underline{k})$  est défini comme le plus grand des  $d_X^{(m)}(j', \underline{k}')$  existant à toutes les échelles  $j' \leq j$  et dans un voisinage spatial  $9\lambda_{j, \underline{k}}$  de  $\underline{x}_0 = 2^j \underline{k} : L_X(j, \underline{k}) = \sup_{m=1,2,3, \lambda' \subset 9\lambda_{j, \underline{k}}} |d_X^{(m)}(\lambda')|$ , avec  $\lambda_{j, \underline{k}} = ]\underline{k}2^j, (\underline{k} + 1)2^j]$  et  $9\lambda_{j, \underline{k}} = \bigcup_{p \in \{-1, 0, 1\}^2} \lambda_{j, \underline{k} + p}$  [7, 17]. Les coefficients dominants rendent compte de la régularité locale par un comportement localement en loi de puissance en fonction de l'échelle  $L_X(j, \underline{x}) \simeq C(\underline{x})2^{jh(\underline{x})}$ , quand  $2^j \rightarrow 0$  [7, 17]. L'estimation locale de  $h(\underline{x}_0)$  peut alors être réalisée par régression linéaire :

$$\hat{h}_L(\underline{x}_0) = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \ln L_X(j, \underline{k}_0). \quad (1)$$

Des exemples de ces estimées sont présentées sur la figure 1, deuxième ligne. Le caractère local de cette mesure produit cependant par nature une forte variance d'estimation. Celle-ci pourrait être réduite en moyennant les  $L_X(j, \underline{k})$  dans un voisinage de  $\underline{x}_0$ . Cela induirait cependant une biais dans la possibilité de voir de réels changements de régularité. Pour contourner cette difficulté dans la gestion du compromis biais-variance, nous proposons de recourir à une étape de segmentation.

**Segmentation proximale.** Suivant l'approche de Mumford-Shah [12], la segmentation de l'image  $\hat{h}_L$  en  $Q$  régions peut s'écrire sous la forme variationnelle suivante :

$$\min_{\Omega_1, \dots, \Omega_Q} \sum_{q=1}^Q \int_{\Omega_q} (\hat{h}_L(\underline{x}) - h_q)^2 d\underline{x} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \text{Per}(\Omega_q) \quad (2)$$

s.t.  $\begin{cases} \bigcup_{q=1}^Q \Omega_q = \Omega, \\ (\forall q \neq p), \Omega_q \cap \Omega_p = \emptyset, \end{cases}$

où les  $h_q$  désignent la régularité locale (inconnue) de chaque région  $\Omega_q$  (avec, par convention,  $h_q \leq h_{q+1}$ ), où le terme de gauche indique la minimisation de la variance intra-région de régularité estimée et où  $\text{Per}(\Omega_q)$  mesure le périmètre de la région  $\Omega_q$ . Les contraintes imposées aux  $\Omega_q$  assurent une partition complète et sans chevauchement de l'image.

On trouve dans la littérature [2, 3] une relaxation convexe de ce problème que nous rappelons ci-dessous dans le cas où l'on considère une version échantillonnée de l'estimée  $\hat{h}_L = (\hat{h}_L^{(n)})_{1 \leq n \leq N} \in \mathbb{R}^N$ , où  $n$  constitue un vecteur de labels pour le pixels de l'image. Les  $Q$  régions  $\Omega_q$  sont labélisées par le biais d'une variable auxiliaire  $u = (u^{(n)})_{1 \leq n \leq N}$ , telle que  $u^{(n)} = h_q$  si et seulement si le pixel  $n$  appartient à la région  $\Omega_q$ . De plus, on introduit  $Q$  fonctions binaires  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_Q)$  telles que, pour tout  $q \in \{1, \dots, Q\}$ ,

$$(\forall n \in \{1, \dots, N\}), \quad \theta_q^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } u^{(n)} \geq h_q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

La fonction  $u$  peut être retrouvée à partir de  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_Q)$  grâce à la relation suivante

$$(\forall n \in \{1, \dots, N\}), \quad u^{(n)} = \sum_{q=1}^Q (h_q - h_{q-1}) \theta_q^{(n)}, \quad (4)$$

où  $h_0 = 0$ . Une bijection entre  $u$  et  $\theta$  est garantie en imposant, pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$  :

$\mathcal{B}_n = \{\theta^{(n)} \in \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}, 1 \geq \theta_1^{(n)} \geq \dots \geq \theta_Q^{(n)} \geq 0\}$ , dont la relaxation convexe est

$\bar{\mathcal{B}}_n = \{\theta^{(n)} \in [0, 1] \times \dots \times [0, 1], 1 \geq \theta_1^{(n)} \geq \dots \geq \theta_Q^{(n)} \geq 0\}$ .

De plus, pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\theta_1^{(n)} = 1$ .

La convexification du Modèle (2) conduit au problème d'optimisation convexe suivant [3] :

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{\theta_1, \dots, \theta_{Q+1}} & \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N (\theta_q^{(n)} - \theta_{q+1}^{(n)}) (\hat{h}_L^{(n)} - h_q)^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N \sqrt{((H\theta_q)^{(n)})^2 + ((V\theta_q)^{(n)})^2} \\ \text{t.q., } & (\forall n \in \{1, \dots, N\}) \\ & 1 \equiv \theta_1^{(n)} \geq \theta_2^{(n)} \geq \dots \geq \theta_Q^{(n)} \geq \theta_{Q+1}^{(n)} \equiv 0, \end{aligned} \quad (5)$$

où  $H \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et  $V \in \mathbb{R}^{N \times N}$  sont des représentations matricielles des différences finies de premier ordre verticales et horizontales. Les fonctions impliquées dans (5) sont convexes, s.c.i. et propres.  $H$  and  $V$  sont diagonalisables dans le domaine de Fourier et l'opérateur proximal de chaque fonction possède une forme explicite. Par conséquent, l'algorithme PPXA+ [13] peut être mis en oeuvre pour minimiser efficacement (5). Le choix a priori des  $(h_q)_{1 \leq q \leq Q}$  impacte fortement sur l'estimation de  $(\theta_q)_{1 \leq q \leq Q}$ . Dans nos expériences, nous les avons estimés à partir d'une version débruitée par variation totale de  $\hat{h}_L$ . Le nombre de régions  $Q$  est également estimé par ce procédé [15].

### 3 Résultats

**Textures synthétiques.** Pour illustrer la procédure et quantifier ses performances, nous l’appliquons systématiquement à un grand nombre de textures synthétiques. Inspiré par le problème de la recherche d’une lésion sur une texture de peau, par exemple, ces textures synthétiques sont construites comme une texture homogène, modélisée par un champ aléatoire gaussien de régularité uniforme  $h_0$ , au sein duquel une zone *anormale* est remplacée par une autre texture homogène, modélisée par un autre champ aléatoire gaussien de régularité uniforme  $h_1$ . Ces changements ne s’accompagnent pas de variations notables de variances locales et ne peuvent donc être détectées ni par une caractérisation reposant sur la variance ni sur un critère entropique. La forme des zones *anormales* est arbitrairement choisie elliptique, avec un centre, un demi-grand axe et une orientation tirée aléatoirement de manière uniforme. Des exemples de telles textures sont illustrés sur la figure 1, première ligne.

**Performances.** La procédure de segmentation proximale est mise en œuvre sur les estimées  $\hat{h}_L(x_0)$  obtenues de l’équation (1) et représentées sur la figure 1, deuxième ligne, tandis que le résultat de la segmentation est illustré sur la troisième ligne. Les performances de la segmentation (en termes de % de pixels mal classés) sont systématiquement évaluées, à partir de moyennes sur 50 réalisations de la même texture, en fonction de  $\Delta h = h_1 - h_0$  (cf. tableau 1) et de la surface de la zone modifiée (tableau 2). La figure 1 et les tableaux 1 et 2 illustrent et indiquent d’excellentes performances de classification, montrant notamment que le pourcentage de pixels mal classés restent stable lorsque comparé au périmètre de la zone modifiée, tandis qu’il augmente clairement lorsque  $|\Delta h|$  diminue.

**Conclusions et perspectives.** Au-delà des très satisfaisantes performances d’estimation observées sur ces textures synthétiques, l’évaluation de cet outil sera poursuivie dans d’autres géométries, pour un nombre différents de régions (cf. [15]), d’autres textures, synthétiques et réelles (tissus humains notamment).

### Références

- [1] A. Benassi, S. Jaffard, and D. Roux. Gaussian processes and pseudo-differential elliptic operators. *Rev. mat. Iberoamericana*, 8(1) :19–89, 1997.
- [2] T. Chan, S. Esedoglu, and M. Nikolova. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 66(5) :1632–1648, 2006.
- [3] D. Cremers, T. Pock, K. Kolev, and A. Chambolle. Convex relaxation techniques for segmentation, stereo and multiview reconstruction. In A. Blake, P. Kohli, and C. Rother, editors, *Markov Random Fields for Vision and Image Processing*. The MIT Press, Boston, 2011.
- [4] P. Gonçalves and P. Abry. Multiple window and local scaling exponent estimation. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 3433–3436, Munich, Germany, Apr. 21–24 1997.
- [5] R. M. Haralick. Statistical and structural approaches to texture. *Proc. of the IEEE*, 67(5) :786–804, 1979.
- [6] S. Hiltunen, J.-C. Pesquet, and B. Pesquet-Popescu. Comparison of two proximal splitting algorithms for solving multilabel disparity estimation problems. In *Proc. Eur. Sig. and Image Proc. Conference*, Bucharest, Romania, Aug. 27–31 2012.
- [7] S. Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. In M. Lapidus and M. van Frankenhuijsen, editors, *Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot*, M. Lapidus and M. van Frankenhuijsen Eds., *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 72(2) :91–152. AMS, 2004.
- [8] M. Jung, G. Peyré, and L. D. Cohen. Texture segmentation via non-local non-parametric active contours. In *Proc. EMMCVPR 2011*, 6819/2011 :74–88, 2011.
- [9] L.M. Kaplan. Extended fractal analysis for texture classification and segmentation. *IEEE Trans. Image processing*, 8 :142–150, 1999.
- [10] A. Laine and J. Fan. Representations for texture segmentation. *IEEE Trans. Image Process.*, 5(5) :771–780, May 1996.
- [11] R. Lopes and N. Betrouni. Fractal and multifractal analysis : A review. *Medical Image Analysis*, 13 :634–649, 2009.
- [12] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Applied Math.*, 42 :577–685, 1989.
- [13] J.-C. Pesquet and N. Pustelnik, “A parallel inertial proximal optimization method,” *Pac. J. Optim.*, 8(2) :273–305, Apr. 2012.
- [14] B. Pesquet-Popescu and J. Lévy Vehl. Stochastic fractal models for image processing. *Proc. of the IEEE*, 9(5) :48–62, 2002.
- [15] N. Pustelnik, H. Wendt, and P. Abry, TLocal regularity for texture segmentation : combining wavelet leaders and proximal minimization. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vancouver, Canada, May 26–31, 2013
- [16] M. Unser. Texture classification and segmentation using wavelet frames. *IEEE Trans. Image Process.*, 4(11) :1549–1560, Nov. 1995.
- [17] H. Wendt, P. Abry, and S. Jaffard. Bootstrap for empirical multifractal analysis. *IEEE Signal Processing Mag.*, 24(4) :38–48, 2007.

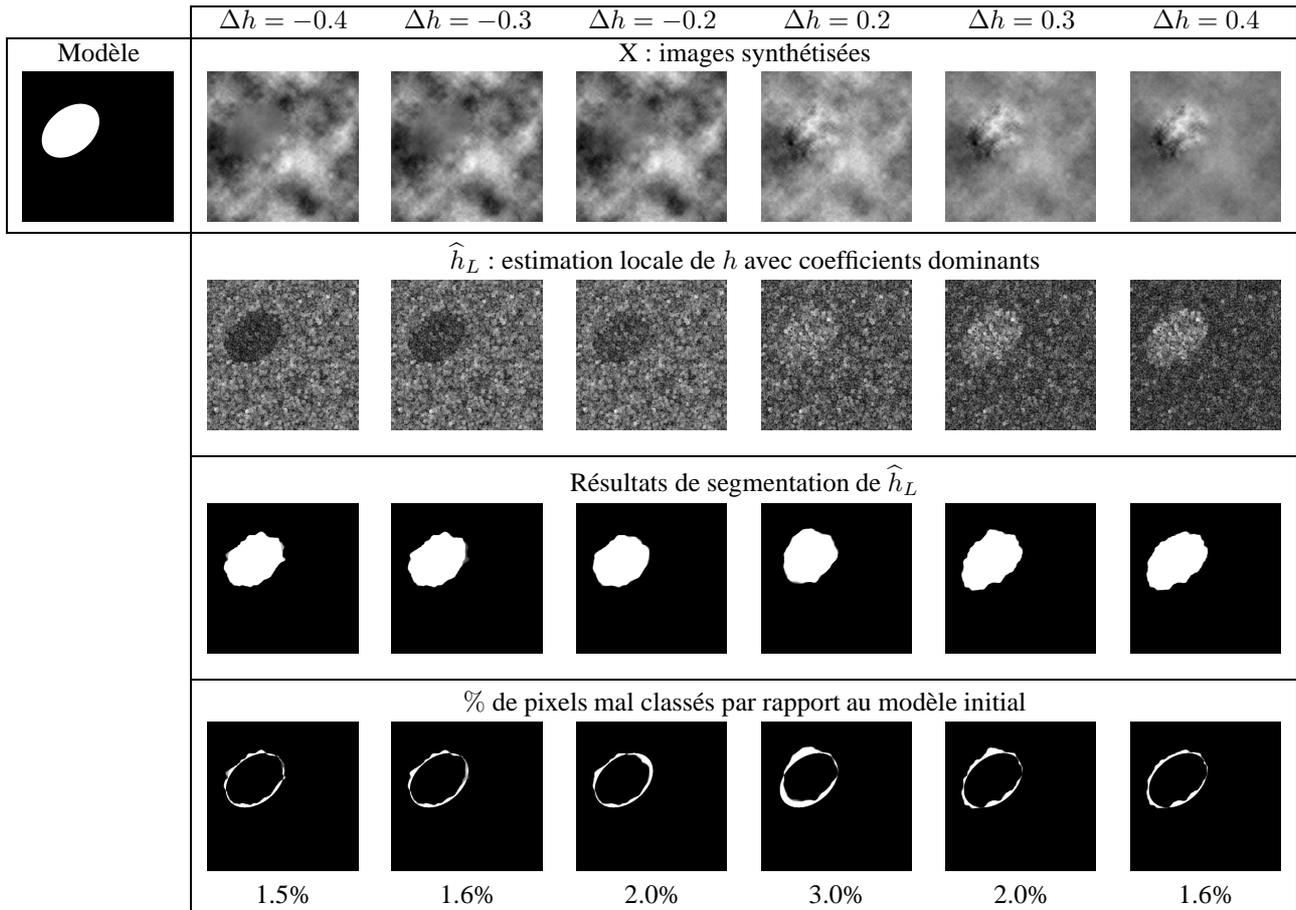


FIGURE 1 – **Segmentation : illustration et performances** pour différentes valeurs de  $\Delta h = h_1 - h_0$ . De gauche à droite :  $(h_0, h_1) = (0.7, 0.3)$ ,  $(h_0, h_1) = (0.7, 0.4)$ ,  $(h_0, h_1) = (0.7, 0.5)$ ,  $(h_0, h_1) = (0.5, 0.7)$ ,  $(h_0, h_1) = (0.4, 0.7)$  et  $(h_0, h_1) = (0.3, 0.7)$ . La première ligne présente les images générées à partir du modèle présenté en haut à gauche pour les différentes valeurs de  $h_0$  et  $h_1$ . La seconde ligne présente les résultats d'estimation locale basée sur les coefficients dominants. La troisième ligne présente les résultats de segmentation en partition minimale avec  $f = \hat{h}_L$  et  $Q = 2$ . La quatrième ligne indique la position et le pourcentage de pixels mal classés.

$\Delta h$	-0.4	-0.3	-0.2	0.2	0.3	0.4
% pixels mal classé	1.9 $\pm 5.10^{-4}$	2.0 $\pm 5.10^{-4}$	4.2 $\pm 39.10^{-4}$	3.7 $\pm 50.10^{-4}$	3.0 $\pm 8.10^{-4}$	1.9 $\pm 7.10^{-4}$

TABLE 1 – **Pourcentage de pixels mal classés pour différents écarts  $\Delta h$  (moyenne sur 50 réalisations).**

Pourcentage de zone anormale	10%	20%	30%	40%	50%	60%
$\frac{\text{Nombre pixels mal classé}}{\text{Périmètre de la zone}}$	6.5 $\pm 3.10^{-1}$	6.8 $\pm 2.10^{-1}$	6.9 $\pm 2.10^{-1}$	7.1 $\pm 1.10^{-1}$	6.8 $\pm 1.10^{-1}$	6.7 $\pm 1.10^{-1}$

TABLE 2 – **Pixels mal classés en fonction de la surface de la zone modifiée pour  $\Delta h = 0.4$  (moyenne sur 50 réalisations).**