

Application des lois de Meijer à l'imagerie RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture) : Calcul d'images « multi-vues géométriques »

Jean-Marie NICOLAS¹, Guillaume QUIN², Béatrice PINEL-PUYSSÉGUR²

¹Telecom ParisTech, 46 rue Barrault, 75013, Paris, France

²CEA/DAM/DIF, F-91297 Arpajon, France

jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr, guillaume.quin@cea.fr,
beatrice.puyssegur@cea.fr

Thème – Traitement d'images, Radar et Sonar.

Problème traité – Ce document traite de l'usage des fonctions de Meijer pour l'imagerie RSO.

Originalité – La définition des « Lois de Meijer » permet d'exprimer sous une forme unique l'ensemble des lois statistiques employées en imagerie RSO (ou en imagerie cohérente). Elles permettent aussi l'expression des lois suivies par la moyenne géométrique.

Résultats – Nous montrons que la comparaison d'images « multi-vues » arithmétiques et géométriques en intensifié révèle des propriétés intéressantes vis à vis de la présence de points brillants dans la scène. La moyenne arithmétique révèle les cibles ponctuelles brillantes, alors que la moyenne géométrique a tendance à les noyer dans le fond.

1 Définition des « lois de Meijer » : un formalisme unique pour l'imagerie RSO

Cornelis Simon Meijer propose en 1936 la définition des G-fonctions [1], qui se veulent être la forme la plus générale possible des intégrales de Barnes et qui peuvent être vues comme une généralisation des fonctions hypergéométriques. Parmi ces intégrales, un cas présente un grand intérêt en imagerie cohérente : c'est celui où cette expression intégrale est une transformée inverse de Mellin. La fonction de Meijer est alors une fonction définie sur \mathbb{R}^+ et qui s'écrit :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} x^{-s} ds \quad (1)$$

En effectuant une légère modification typographique pour les fonctions de Meijer, on peut alors écrire cette propriété comme suit [2] à l'aide de la transformée de Mellin inverse \mathcal{M}^{-1} :

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad ; \quad a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m \quad ; \quad b_{m+1}, \dots, b_q \end{array} \right. \right) = \mathcal{M}^{-1} \left[\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \right] \quad (2)$$

Dans le formalisme des statistiques de Mellin (les log-statistiques), on a donc ici une fonction définie sur \mathbb{R}^+ puisqu'elle est une transformée de Mellin inverse. Si la valeur de sa transformée de Mellin en $s = 1$ est égale à 1, on a alors une densité de probabilité. Ceci permet de définir les « Lois de Meijer » \mathcal{LM} à partir de la définition des fonctions de Meijer, sous la forme :

$$\mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{c} M_1, \dots, M_n \quad ; \quad \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ L_1, \dots, L_m \quad ; \quad \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} \right. , \mu \right) = \frac{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(\tilde{L}_j) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(\tilde{M}_j)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(L_j) \prod_{j=1}^n \Gamma(M_j)} \frac{\prod_{j=1}^m L_j \prod_{j=m+1}^q \tilde{M}_j}{\prod_{j=1}^n M_j \prod_{j=n+1}^p \tilde{L}_j} \frac{1}{\mu} \quad (3)$$

$$\overline{G}_{p,q}^{m,n} \left(\frac{\prod_{j=1}^m L_j \prod_{j=m+1}^q \tilde{M}_j x}{\prod_{j=1}^n M_j \prod_{j=n+1}^p \tilde{L}_j \mu} \left| \begin{array}{c} -M_1, \dots, -M_n \quad ; \quad \tilde{L}_{n+1} - 1, \dots, \tilde{L}_p - 1 \\ L_1 - 1, \dots, L_m - 1 \quad ; \quad -\tilde{M}_{m+1}, \dots, -\tilde{M}_q \end{array} \right. \right)$$

Grâce aux propriétés de la convolution de Mellin $\hat{\star}$, on montre alors que l'on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{array}{l} M_1, \dots, M_n \\ L_1, \dots, L_m \end{array} ; \begin{array}{l} \tilde{L}_{n+1}, \dots, \tilde{L}_p \\ \tilde{M}_{m+1}, \dots, \tilde{M}_q \end{array} , \mu \right. \right) = \\ \mathcal{G}[\mu, L_1] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L_2] \hat{\star} \dots \hat{\star} \mathcal{G}[1, L_m] \\ \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M_1] \hat{\star} \dots \hat{\star} \mathcal{GI}[1, M_n] \\ \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, \tilde{L}_{n+1}] \hat{\star}^{-1} \dots \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, \tilde{L}_p] \\ \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, \tilde{M}_{m+1}] \hat{\star}^{-1} \dots \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, \tilde{M}_q] \end{aligned} \quad (4)$$

La notation spécifique choisie permet d'appréhender le rôle des différents paramètres. En effet :

- L est le paramètre correspondant à la loi Gamma \mathcal{G} (convolution de Mellin $\hat{\star}$),
- M est le paramètre correspondant à la loi Gamma Inverse \mathcal{GI} (convolution de Mellin $\hat{\star}$),
- \tilde{L} est le paramètre correspondant à la loi Gamma (convolution de Mellin inverse $\hat{\star}^{-1}$),
- \tilde{M} est le paramètre correspondant à la loi Gamma Inverse (convolution de Mellin inverse $\hat{\star}^{-1}$).

L'équation 4 montre que la quasi totalité des très nombreuses lois de probabilités utilisées en imagerie cohérente (c'est à dire des images perturbées par un bruit multiplicatif) s'expriment comme des lois de Meijer. L'emploi des lois de Meijer permet donc de les regrouper sous une même écriture.

Considérons deux variables aléatoires X et Y suivant respectivement les lois de probabilité p_X et p_Y . Tout comme la convolution de Fourier permet d'exprimer la loi suivie par la somme de ces deux variables aléatoire $X + Y$, la convolution de Mellin permet d'exprimer la loi suivie par le produit $Z = X \cdot Y$, notée ici p_Z :

$$p_Z = p_X \hat{\star} p_Y \quad (5)$$

Définissons alors les deux lois p_X et p_Y par les lois de Meijer suivantes :

$$\begin{aligned} p_X(s) &= \mathcal{LM}_{p,q}^{m,n} \left(s \left| \begin{array}{l} M_{X,1}, \dots, M_{X,n} \\ L_{X,1}, \dots, L_{X,m} \end{array} ; \begin{array}{l} \tilde{L}_{X,n+1}, \dots, \tilde{L}_{X,p} \\ \tilde{M}_{X,m+1}, \dots, \tilde{M}_{X,q} \end{array} , \mu_X \right. \right) \\ p_Y(s) &= \mathcal{LM}_{p',q'}^{m',n'} \left(s \left| \begin{array}{l} M_{Y,1}, \dots, M_{Y,n'} \\ L_{Y,1}, \dots, L_{Y,m'} \end{array} ; \begin{array}{l} \tilde{L}_{Y,n'+1}, \dots, \tilde{L}_{Y,p'} \\ \tilde{M}_{Y,m'+1}, \dots, \tilde{M}_{Y,q'} \end{array} , \mu_Y \right. \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Dans ce cas, la loi p_Z s'exprime simplement par [2] :

$$p_Z(s) = \mathcal{LM}_{p+p',q+q'}^{m+m',n+n'} \left(s \left| \begin{array}{l} M_{X,1}, \dots, M_{X,n}, M_{Y,1}, \dots, M_{Y,n'} \\ L_{X,1}, \dots, L_{X,m}, L_{Y,1}, \dots, L_{Y,m'} \end{array} ; \begin{array}{l} \tilde{L}_{Y,n'+1}, \dots, \tilde{L}_{X,p}, \tilde{L}_{Y,n'+1}, \dots, \tilde{L}_{Y,p'} \\ \tilde{M}_{X,m+1}, \dots, \tilde{M}_{X,q}, \tilde{M}_{Y,m'+1}, \dots, \tilde{M}_{Y,q'} \end{array} , \mu_X \mu_Y \right. \right) \quad (7)$$

De ce fait, nous constatons que les lois de Meijer couplées à la convolution de Mellin s'appliquent bien au modèle de speckle multiplicatif traditionnellement utilisé en imagerie radar. Il est en effet possible de calculer la loi issue du produit entre deux variables dont les lois de probabilité s'expriment comme des lois de Meijer. À titre d'exemple, considérons le cas de la loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$ qui suppose que l'image se décompose en une texture suivant une loi Gamma inverse $\mathcal{GI}[\mu, M]$, que multiplie un bruit de speckle normalisé suivant une loi Gamma $\mathcal{G}[1, L]$. Les deux lois $\mathcal{G}[1, L]$ et $\mathcal{GI}[\mu, M]$ s'écrivent sous forme de lois de Meijer comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[1, L](s) &= \mathcal{LM}_{0,1}^{1,0} \left(s \left| \begin{array}{l} \cdot \\ L \end{array} ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} , 1 \right. \right) \\ \mathcal{GI}[\mu, M](s) &= \mathcal{LM}_{1,0}^{0,1} \left(s \left| \begin{array}{l} M \\ \cdot \end{array} ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} , \mu \right. \right) \end{aligned} \quad (8)$$

L'expression de la loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$ s'obtient donc par la convolution de Mellin entre les deux lois $\mathcal{G}[1, L]$ et $\mathcal{GI}[\mu, M]$. D'après la relation 7, son expression sous forme de loi de Meijer s'écrit alors directement [2] sous la forme :

$$\mathcal{F}[\mu, L, M](s) = \{\mathcal{GI}[\mu, M] \hat{\star} \mathcal{G}[1, L]\}(s) = \mathcal{LM}_{1,1}^{1,1} \left(s \left| \begin{array}{l} M \\ L \end{array} ; \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} , \mu \right. \right) \quad (9)$$

2 Évaluation numérique des fonctions de Meijer

Contrairement à ce que leur expression complexe peut laisser penser, les fonctions de Meijer peuvent être évaluées numériquement par des méthodes usuelles. De plus, les lois les plus classiquement employées en imagerie RSO n'utilisent que deux des quatre listes de paramètres disponibles, respectivement (a_1, \dots, a_N) et (b_1, \dots, b_N) en suivant les notations de l'équation 2. De ce fait, si seulement une liste (a_1, \dots, a_N) ou (b_1, \dots, b_N) est utilisée, nous pouvons simplifier l'équation 2 comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{G}_{0,N}^{N,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ b_1, \dots, b_N \end{array} ; \cdot \right. \right) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \prod_{j=1}^N \Gamma(b_j - s) x^s ds \\ \overline{G}_{N,0}^{0,N} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_N \\ \cdot \end{array} ; \cdot \right. \right) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \prod_{j=1}^N \Gamma(1 - a_j + s) x^s ds \end{aligned} \quad (10)$$

De même, si deux listes de taille égale (a_1, \dots, a_N) et (b_1, \dots, b_N) sont utilisées, nous pouvons écrire :

$$\overline{G}_{N,N}^{N,N} \left(x \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_N \\ b_1, \dots, b_N \end{array} ; \cdot \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \prod_{j=1}^N \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^N \Gamma(1 - a_j + s) x^s ds \quad (11)$$

Ces trois derniers cas regroupent les lois Gamma, Gamma inverse, Rayleigh–Nakagami, Rayleigh–Nakagami inverse, Weibull, K, K inverse, ainsi que la loi de Fisher en amplitude et intensité. Leur évaluation numérique peut se faire par intégration discrète très rapidement, d'autant plus que la fonction Γ est une fonction usuelle disponible dans de nombreux langages. Notons que le choix du paramètre c , représentant la partie réelle de la variable d'intégration s , doit être adapté aux différents paramètres (a_1, \dots, a_N) et (b_1, \dots, b_N) de sorte à vérifier les conditions d'existence de la fonction Γ .

3 Application des lois de Meijer au calcul de la loi suivie par la moyenne géométrique

Considérons la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$, correspondant à la réponse en intensité d'un sol homogène, définie par :

$$\mathcal{G}[\mu, L](x) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}} = \mathcal{LM}_{0,1}^{1,0} \left(x \left| \begin{array}{c} \cdot \\ L \end{array} ; \cdot, \mu \right. \right) \quad (12)$$

On montre facilement que la moyenne arithmétique de N échantillons (ou pixels) suivant une loi Gamma suit également une loi Gamma, notée ici $\mathcal{MA}[N]$, et qui s'exprime comme :

$$\mathcal{MA}[N](z) = \mathcal{G}[\mu, NL](z) = \mathcal{LM}_{0,1}^{1,0} \left(z \left| \begin{array}{c} \cdot \\ NL \end{array} ; \cdot, \mu \right. \right) \quad (13)$$

La moyenne géométrique de N échantillons suivant une même loi Gamma s'exprime sous la forme de la loi de Meijer suivante [2], notée ici $\mathcal{MG}[N]$:

$$\mathcal{MG}[N](z) = \mathcal{LM}_{0,N}^{N,0} \left(z \left| \underbrace{\begin{array}{c} \cdot \\ L, \dots, L \end{array}}_N ; \cdot, \mu^N \right. \right) \quad (14)$$

4 Comparaison entre multi-vue classique (arithmétique) et « multi-vue géométrique »

L'opération classique de « multi-vue » a pour but de réduire le bruit présent dans les images RSO. On calcule une image multi-vue en effectuant des moyennes spatiales sur de petits voisinages de dimensions $A \times B$. Les dimensions de l'image obtenue sont alors respectivement réduites d'un facteur A et B en colonnes et en lignes. Sa résolution s'en trouve également dégradée dans les mêmes proportions, mais le bruit y est plus faible que dans l'image originale.

C'est classiquement la moyenne arithmétique qui est utilisée pour cette opération de débruitage des images en intensité. Nous proposons ici de comparer les effets de ce calcul classique (ou « multi-vue arithmétique ») et d'un calcul utilisant la moyenne géométrique. On parlera alors d'image « multi-vue géométrique ». Notons que dans [3], le rapport entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique (calculées sur des voisinages glissants) est utilisé comme mesure d'homogénéité spatiale. Considérons une image RSO 200×200 en intensité simulée selon une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu = 100, L = 2]$, correspondant à la réponse d'un sol homogène. Nous introduisons dans cette scène des éléments de forte intensité (≈ 2000) de sorte à créer des cibles ponctuelles et des structures géométriques (cf. Fig. 1). Les valeurs choisies ici pour l'exemple respectent des cas observables dans la réalité. Nous représentons en Fig. 1 les images multi-vues arithmétiques et géométriques pour un facteur 4×2 (leurs dimensions sont donc

50×100 pixels). Le calcul des ces images révèle un comportement différent vis à vis des cibles de forte valeur. Nous constatons que les cibles ponctuelles sont toujours visibles dans l'image multi-vue arithmétique, alors qu'elles ont disparu dans l'image multi-vue géométrique. De même, les structures linéaires semblent également noyées dans le fond par la moyenne géométrique, alors qu'elles apparaissent encore clairement avec la moyenne arithmétique. De ce fait, si on utilise l'opération de multi-vue dans le but d'améliorer la lisibilité de l'image pour un observateur, la moyenne arithmétique semble plus fidèle au contenu de la scène.

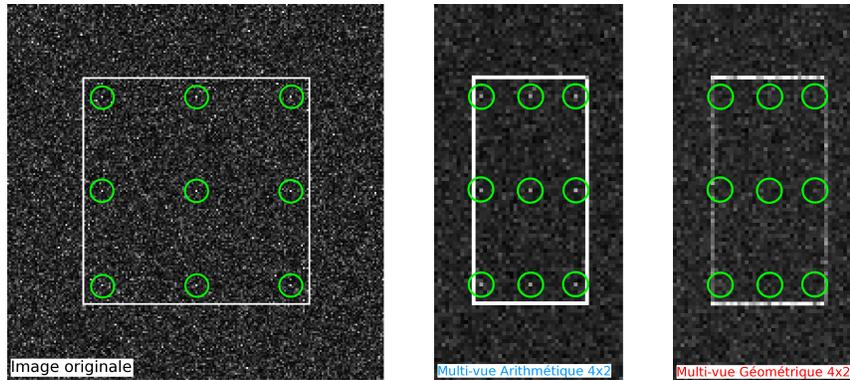


FIGURE 1 – De gauche à droite : Image 200×200 suivant une loi Gamma $\mathcal{G}[\mu = 100, L = 2]$ dans laquelle ont été introduites des cibles ponctuelles (entourées en vert) et des structures linéaires de forte valeur ≈ 2000 ; Image multi-vue Arithmétique avec facteur 4×2 ; Image multi-vue Géométrique avec facteur 4×2 .

Nous représentons en Fig. 2 les histogrammes et lois de probabilités théoriques (cf. équations 12 à 14 avec $N = 8$) de l'image originale et des images multi-vues arithmétique et géométrique présentées en Fig. 1. Nous observons un très bon accord entre histogrammes observés et lois de probabilités théoriques, montrant la validité des lois de Meijer et notamment de l'équation 14.

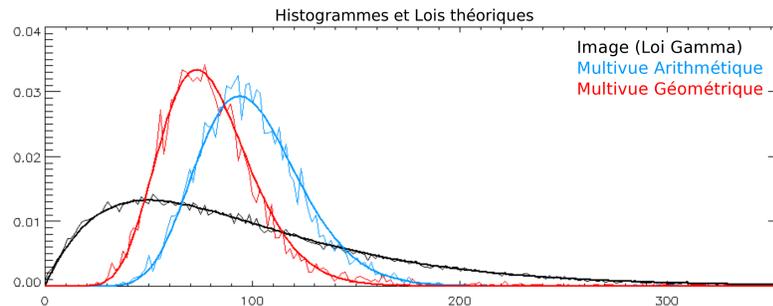


FIGURE 2 – Histogrammes (trait fin) et Lois de probabilités théoriques (trait épais) suivies par les trois images présentées en Fig. 1.

5 Conclusions

Nous avons montré que l'emploi des « lois de Meijer » définies ici permettait de regrouper sous une même écriture la quasi totalité des lois de probabilité utilisées en imagerie RSO. De plus, leur évaluation numérique est possible par des méthodes classiques. Nous avons également montré que les lois de Meijer permettaient d'exprimer simplement la loi suivie par la moyenne géométrique. Une application est le calcul d'images multi-vues à l'aide de la moyenne géométrique et la comparaison au cas classique où le calcul se fait à l'aide d'une moyenne arithmétique. Nous avons observé des différences intéressantes laissant à l'utilisateur le choix de la moyenne à employer, même si la moyenne arithmétique semble plus fidèle au contenu de la scène.

Références

- [1] H. Bateman, “Higher transcendental functions” McGraw-Hill, 1953.
- [2] J.M. Nicolas, “Les distributions de Meijer et leurs propriétés en statistique de Mellin” Rapport TélécomParisTech 2011D002. http://www.tsi.telecom-paristech.fr/~nicolas/jmnicolas_meijer_2011D002.pdf
- [3] M. Beauchemin et al., “The Ratio of the Arithmetic to the Geometric Mean : a First-Order Statistical Test for Multilook SAR Image Homogeneity” IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 34, No. 2, march 1996.