

Une borne inférieure de l'erreur quadratique moyenne pour l'estimation simultanée de paramètres aléatoires et non-aléatoires

Chengfang REN¹, Jérôme GALY², Éric CHAUMETTE^{3,4}, Pascal LARZABAL⁴ et Alexandre RENAUX¹

¹Université Paris-Sud/LSS
3, Rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

²Université de Montpellier 2/LIRMM
161 rue Ada 34392 Montpellier Cedex 5, France.

³ONERA/The French Aerospace Lab
Chemin de la Hunière Palaiseau Cedex 91123, France.

⁴École Normale supérieure de Cachan/SATIE
61 av. du President Wilson, 94235 Cachan cedex, France.

cren@lss.supelec.fr, galy@lirmm.fr, eric.chaumette@onera.fr
pascal.larzabal@satie.ens-cachan.fr, renaux@lss.supelec.fr

Résumé – Cet article étudie les bornes inférieures d'erreur quadratique moyenne hybride dans le but de prédire le phénomène de décrochement. Une nouvelle borne présentant de bon aspect théorique et pratique est proposée. Elle est basée sur une combinaison entre la borne de Barankin et celle de Weiss-Weinstein. Cette borne est appliquée à un problème d'estimation de fréquence. Une comparaison avec la borne de Barankin hybride montre la supériorité de cette borne pour la prédiction du phénomène de décrochement.

Abstract – This article investigates hybrid lower bounds in order to predict the estimators mean square error threshold effect. A tractable and computationally efficient form is derived. This form combines the Barankin and the Weiss-Weinstein bounds. This bound is applied to a frequency estimation problem for which a closed-form expression is provided. A comparison with results on the hybrid Barankin bound shows the superiority of this new bound to predict the mean square error threshold.

1 Introduction

En estimation paramétrique, les performances d'un estimateur sont généralement caractérisées par son Erreur Quadratique Moyenne (EQM). Afin de quantifier les performances ultimes pour un problème donné, des bornes inférieures de l'EQM, indépendantes de la technique d'estimation employée, ont été établies dans la littérature. Parmi ces bornes, la plus connue est la Borne de Cramér-Rao (BCR) qui présente l'avantage d'être généralement précise à fort nombre d'observations ou à fort Rapport Signal sur Bruit (RSB). Cependant, pour des problèmes d'estimation non-linéaire, les estimateurs présentent souvent un décrochement à partir d'une valeur seuil en deçà de laquelle les performances se dégradent considérablement. La BCR ne permet pas d'appréhender ce décrochement. Néanmoins, il existe d'autres bornes inférieures de l'EQM dans la littérature qui ne présentent pas cet inconvénient. Parmi ces bornes, nous distinguons les bornes déterministes où les paramètres à estimer sont considérés comme certains (borne de Barankin, borne d'Abel, etc.) et les bornes bayésiennes où les paramètres à estimer sont considérés comme aléatoires avec une densité de probabilité *a priori* connue (borne de Barankin bayésienne, borne

de Weiss-Weinstein, etc.) Une étude exhaustive des bornes inférieures de l'EQM et de leurs applications en traitement du signal est disponible dans [1].

Dans cet article, on s'intéresse à une troisième famille de bornes nommée bornes hybrides qui ont été développées pour borner l'EQM de tout algorithme estimant simultanément des paramètres déterministes et des paramètres aléatoires à partir des données d'observations. Historiquement, la première borne hybride est la Borne de Cramér-Rao Hybride (BCRH) introduite en 1987 par Rockah et Schultheiss dans le contexte de l'estimation de directions d'arrivées incluant une calibration du réseau de capteurs [2]. Malheureusement, la BCRH souffre du même défaut que la BCR concernant le décrochement des estimateurs. La Borne de Barankin Hybride (BBH) permettant de prédire grossièrement le décrochement de l'EQM a été développée par Reuven et Messer en 1997 et a été appliquée pour l'estimation de retard de signaux radars [3].

La borne que nous proposons est basée sur la Borne de Barankin (BB) pour les paramètres déterministes et sur la Borne de Weiss-Weinstein (BWW) pour les paramètres aléatoires. En effet, sachant que la BBH est basée sur la BB pour les paramètres déterministes et la Borne de Barankin Bayésienne (BBB)

pour les paramètres aléatoires et sachant que la BWW majore la BBB, la borne que nous nous proposons d'établir majore la BBH. Par conséquent, elle permet de déterminer plus finement le seuil de décrochement. L'obtention cette borne est basée sur le principe d'inégalité de covariance [4] qui permet de minorer l'EQM des estimateurs hybrides. Nous prouvons que cette minoration ne dépend pas du schéma d'estimation. De plus, nous détaillons les conditions nécessaires qui spécifient la classe d'estimateur sur laquelle s'applique cette borne. Enfin, nous donnons une expression analytique de cette borne dans une application avec des résultats de simulation où nous faisons des comparaisons avec les performances de l'estimateur Maximum *A Posteriori* / Maximum de Vraisemblance (MAPMV).

2 Bornes inférieures de l'EQM hybride

2.1 Préliminaires

Nous rappelons d'abord les hypothèses usuelles utilisées dans le contexte des bornes hybrides [3]. Soient $\mathbf{X} \in \Omega$ un vecteur d'observation et $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_d^T \boldsymbol{\theta}_r^T]^T$ des paramètres à estimer où $\boldsymbol{\theta}_d \in \Pi_d \subseteq \mathbb{R}^D$ est un vecteur de paramètre inconnu et certain et $\boldsymbol{\theta}_r \in \Pi_r \subseteq \mathbb{R}^R$ est un vecteur de paramètre inconnu et aléatoire. Le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\theta}_r$ est caractérisé par une loi *a priori* connue qui est supposée indépendante de $\boldsymbol{\theta}_d$ c-à-d $f(\boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d) = f(\boldsymbol{\theta}_r)$. Soit $f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d)$ la densité de probabilité jointe de \mathbf{X} et $\boldsymbol{\theta}_r$ sachant $\boldsymbol{\theta}_d$. Si $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est un estimateur de $\boldsymbol{\theta}$, alors sous des conditions de régularité, le principe d'inégalité de covariance est vérifié ([4] p. 124) : pour tout vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$ de moment d'ordre deux fini,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}} \left[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \right] \succeq \mathbf{C} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C}^T, \quad (1)$$

où $\mathbf{A} \succeq \mathbf{B}$ signifie que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ est une matrice semi-définie positive et où

$$\mathbf{V} = \mathbb{E}_{\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}} [\mathbf{v}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{v}^T(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})], \quad (2)$$

et

$$\mathbf{C} = \mathbb{E}_{\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}} \left[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \mathbf{v}^T(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \right]. \quad (3)$$

Remarquons que l'équation (1) ne donne pas, en général, une borne inférieure indépendante de l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ puisque \mathbf{C} dépend de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Cependant un choix judicieux de $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ permet d'obtenir les bornes inférieures de l'EQM classiques. Par exemple, si nous choisissons $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ln f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$, alors nous obtenons la BCRH [5]. Si nous choisissons

$$\{\mathbf{v}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})\}_i = \begin{cases} \frac{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_i)}{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} - 1 & \text{si } \boldsymbol{\theta} \in \Theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\Theta = \{\boldsymbol{\theta} : f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) > 0, \mathbf{X} \in \Omega\}$ et où $\boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_i, i = 1, \dots, N$, sont appelés les points tests (pouvant être choisis arbitrairement), alors nous obtenons la BBH [3].

2.2 Borne proposée

Par souci de simplicité, nous restreignons notre étude au cas de l'estimation d'un paramètre scalaire inconnu déterministe et d'un paramètre scalaire inconnu aléatoire c-à-d $\boldsymbol{\theta} = (\theta_d \theta_r)^T$. En effet, le cas multivarié repose sur le même principe et ne présente pas de difficultés supplémentaires. Concernant les points tests, définissons $\mathbf{h}_1 = (h_{1d} \ h_{1r})^T$ et $\mathbf{h}_2 = (0 \ h_{2r})^T$. Il est nécessaire d'imposer le premier élément de \mathbf{h}_2 à zéro pour obtenir une nouvelle borne. De plus, nous supposons les hypothèses suivantes :

- 1) $\forall \theta_r \in \Pi_r, f(\mathbf{X}, \theta_r; \theta_d) = 0 \Rightarrow f(\mathbf{X}, \theta_r + h_r; \theta_d + h_d) = 0$.
- 2) $\forall \theta_r \in \Pi_r, \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbf{X} | \theta_r; \theta_d} [\hat{\theta}_d] = \theta_d, \\ \mathbb{E}_{\mathbf{X} | \theta_r; \theta_d + h_d} [\hat{\theta}_d] = \theta_d + h_d. \end{cases}$
- 3) $\forall \theta_d \in \Pi_d, \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbf{X}, \theta_r; \theta_d} [\hat{\theta}_r - \theta_r] = 0, \\ \mathbb{E}_{\mathbf{X}, \theta_r + h_r; \theta_d} [\hat{\theta}_r - (\theta_r + h_r)] = 0. \end{cases}$

Remarque : l'hypothèse 1 signifie que le support de la densité de probabilité *a priori* du paramètre aléatoire ne peut pas être compact. Par exemple cette borne ne pourra pas s'appliquer si on considère une densité de probabilité *a priori* uniforme (notons que c'est également le cas pour la BCRH et la BBH et qu'il n'existe pas à notre connaissance de borne hybride pouvant être utilisée avec un *a priori* uniforme).

Nous choisissons $\mathbf{v}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = (v_d(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \ v_r(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}))^T$ avec

$$v_d(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_1)}{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} - 1 & \text{si } \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4)$$

et

$$v_r(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_2)}{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} - \frac{f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} - \mathbf{h}_2)}{f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} & \text{si } \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5)$$

où $0 < m < 1$. Remarquons que ; si m tend vers 1, alors $v_r(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{m \rightarrow 1} \frac{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_2)}{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} - 1$. Ceci correspond au choix de $\mathbf{v}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$ qui conduit à une forme particulière de la BBH avec deux points tests seulement. Si le problème d'estimation consiste à estimer seulement le paramètre aléatoire c-à-d $\boldsymbol{\theta} = \theta_r$ et si nous choisissons $\mathbf{v}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = v_r(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$, alors l'équation (1) conduit à la BWW.

Dans notre cas, en substituant (4) et (5) dans (2) et (3), on obtient la borne inférieure de l'EQM hybride proposée. Les éléments de la matrice \mathbf{V} sont donnés par $\{\mathbf{V}\}_{1,1} = \mu(2, \mathbf{h}_1) - 1$, $\{\mathbf{V}\}_{2,2} = \mu(2m, \mathbf{h}_2) + \mu(2 - 2m, -\mathbf{h}_2) - 2\mu(m, 2\mathbf{h}_2)$ et $\{\mathbf{V}\}_{1,2} = \{\mathbf{V}\}_{2,1} = \eta(m, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) - \eta(1 - m, \mathbf{h}_1, -\mathbf{h}_2) - \mu(m, \mathbf{h}_2) + \mu(1 - m, -\mathbf{h}_2)$, où

$$\mu(m, \mathbf{h}) = \mathbb{E}_{\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}} \left[\frac{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h})}{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \right], \quad (6)$$

et

$$\eta(\alpha, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \mathbb{E}_{\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}} \left[\frac{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_1)}{f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \frac{f^\alpha(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_2)}{f^\alpha(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \right]. \quad (7)$$

Concernant les éléments de la matrice \mathbf{C} , nous devons démontrer qu'ils sont indépendants de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pour obtenir une borne indépendante

du schéma d'estimation. Nous montrons en annexe que le choix proposé au travers de l'équation (4) et (5) conduit à :

$$\{\mathbf{C}\}_{1,1} = h_{1d}, \{\mathbf{C}\}_{2,1} = h_{1r}, \quad (8)$$

$$\{\mathbf{C}\}_{1,2} = 0 \text{ et } \{\mathbf{C}\}_{2,2} = h_{2r}\mu(m, \mathbf{h}_2). \quad (9)$$

Finalement, puisque $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ et m peuvent être choisis arbitrairement, la borne que nous proposons s'écrit

$$\max_{\mathbf{h}_1 \in \Pi_d \times \Pi_r, \mathbf{h}_2 \in \{0\} \times \Pi_r, 0 < m < 1} \{\mathbf{C}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}^T\}. \quad (10)$$

3 Application et simulation

Soit le modèle d'observation suivant :

$$\mathbf{x} = \rho e^{j\varphi} \mathbf{s}(\omega) + \mathbf{b}, \quad (11)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^P$ est le vecteur d'observations, le vecteur $\mathbf{s}(\omega) = [1 e^{j\omega} \dots e^{j(P-1)\omega}]^T$ est un signal complexe de pulsation ω et où le bruit \mathbf{b} suit une loi gaussienne centrée complexe circulaire de matrice de covariance $\sigma_b^2 \mathbf{I}$. Nous supposons que la phase $\varphi \in]-\pi; \pi]$ est connue, que l'amplitude $\rho \in \mathbb{R}^+$ est un paramètre inconnu et certain et que la pulsation ω est un paramètre inconnu et aléatoire avec une densité de probabilité *a priori* gaussienne centrée de variance connue σ_ω^2 . En pratique, ω est tronquée sur $]-\pi; \pi[$ pour éviter le problème d'échantillonnage spatiale et l'écart-type σ_ω est choisi de telle sorte que $\sigma_\omega < \frac{\pi}{3}$ pour conserver une loi *a priori* proche de la loi gaussienne. Donc le vecteur de paramètre à estimer est $\boldsymbol{\theta} = [\rho \omega]^T$. La densité de probabilité conditionnelle de \mathbf{x} sachant ω et ρ est

$$f_{\mathbf{x}|\omega; \rho}(\mathbf{x}|\omega; \rho) = \frac{e^{-\frac{1}{\sigma_b^2} \|\mathbf{x} - \rho e^{j\varphi} \mathbf{s}(\omega)\|^2}}{(\pi \sigma_b^2)^P}. \quad (12)$$

Nous supposons que $f_{\omega; \rho}(\omega; \rho) = f_\omega(\omega)$, donc la loi jointe est donnée par $f_{\mathbf{x}, \omega; \rho}(\mathbf{x}, \omega; \rho) = f_{\mathbf{x}|\omega; \rho}(\mathbf{x}|\omega; \rho) f_\omega(\omega)$ c-à-d

$$f_{\mathbf{x}, \omega; \rho}(\mathbf{x}, \omega; \rho) = \frac{e^{-\frac{1}{\sigma_b^2} \|\mathbf{x} - \rho e^{j\varphi} \mathbf{s}(\omega)\|^2 - \frac{\omega^2}{2\sigma_\omega^2}}}{(\pi \sigma_b^2)^P \sqrt{2\pi \sigma_\omega^2}}. \quad (13)$$

Pour calculer la nouvelle borne hybride, nous avons besoin d'obtenir les expressions analytiques de (6) et (7). Après quelques étapes de calcul, nous obtenons les expressions suivantes : pour tout $\mathbf{h} = [h_\rho \ h_\omega]^T$ et m

$$\mu(m, \mathbf{h}) = e^{\frac{m(m-1)}{\sigma_b^2} \left(\sum_{t=0}^{P-1} |(\rho+h_\rho)e^{jh_\omega t} - s|^2 \right) + \frac{m(m-1)h_\omega^2}{2\sigma_\omega^2}}, \quad (14)$$

et pour tout $\mathbf{h}_1 = [h_{1\rho} \ h_{1\omega}]^T$, $\mathbf{h}_2 = [0 \ h_{2\omega}]^T$ et α :

$$\eta(\alpha, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \frac{e^{\frac{1}{\sigma_b^2} \left(\sum_{t=0}^{P-1} |(\rho+h_{1\rho})e^{jh_{1\omega} t} + \alpha \rho e^{jh_{2\omega} t} - \alpha \rho|^2 \right) + \alpha \frac{h_{2\omega} h_{1\omega}}{\sigma_\omega^2}}}{e^{\frac{1}{\sigma_b^2} P(\rho+h_{1\rho})^2}}. \quad (15)$$

Pour la simulation proposée (figure 1), nous comparons différentes bornes et l'EQM empirique de l'estimateur MAPMV qui consiste

à trouver les arguments (ρ, ω) qui maximise la loi jointe $f_{\mathbf{x}, \omega; \rho}(\mathbf{x}, \omega; \rho)$. Les valeurs des paramètres pour cette simulation sont les suivantes : $\rho = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2}$ et $P = 2^5$. Dans notre problème d'estimation, puisque le modèle d'observation est linéaire en le paramètre ρ et non linéaire en le paramètre ω , nous traçons sur la figure (1) la BCRH, la BBH, la borne proposée, notée BBWWH et l'EQM empirique du MAPMV calculée à partir de 1000 simulations de Monte-Carlo pour l'estimation du paramètre ω uniquement. Comme attendu, la borne proposée majore la BBH et permet de prédire le décrochement de l'EQM du MAPMV avec une précision de moins de 0.5dB pour ce problème d'estimation.

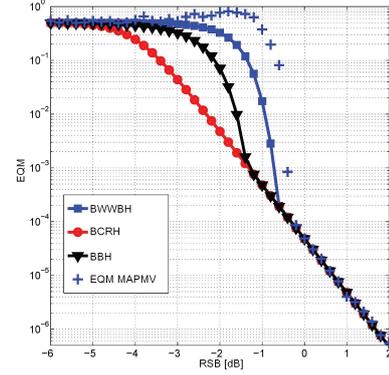


FIGURE 1 – Comparaison des bornes et de l'EQM MAPMV en fonction du RSB

4 Annexe

Concernant l'élément $\{\mathbf{C}\}_{1,1}$, nous avons

$$\begin{aligned} \{\mathbf{C}\}_{1,1} &= \mathbb{E}_{\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}} \left[(\hat{\theta}_d - \theta_d) v_d(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \right] \\ &= \int_{\Pi_r} \left(\begin{array}{c} f(\theta_r + h_{1r}) \int_{\Omega} (\hat{\theta}_d - \theta_d) \\ \times f(\mathbf{X}|\theta_r + h_{1r}; \theta_d + h_{1d}) d\mathbf{X} \\ - f(\theta_r) \int_{\Omega} (\hat{\theta}_d - \theta_d) f(\mathbf{X}|\theta_r; \theta_d) d\mathbf{X} \end{array} \right) d\theta_r. \end{aligned} \quad (16)$$

D'après l'hypothèse 2, nous obtenons $\int_{\Omega} (\hat{\theta}_d - \theta_d) f(\mathbf{X}|\theta_r; \theta_d) d\mathbf{X} =$

0 et $\int_{\Omega} (\hat{\theta}_d - \theta_d) f(\mathbf{X}|\theta_r + h_{1r}; \theta_d + h_{1d}) d\mathbf{X} = h_{1d}$. Donc,

en substituant ces deux équations dans l'équation (16), nous obtenons $\{\mathbf{C}\}_{1,1} = h_{1d} \int_{\Pi_r} f(\theta_r + h_{1r}) d\theta_r = h_{1d}$.

Pour le calcul de l'élément $\{\mathbf{C}\}_{2,1}$, nous avons

$$\begin{aligned} \{\mathbf{C}\}_{2,1} &= \mathbb{E}_{\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}} \left[(\hat{\theta}_r - \theta_r) v_d(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \right] \\ &= \left(\begin{array}{c} \int_{\Pi_r} \int_{\Omega} (\hat{\theta}_r - \theta_r) f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_1) d\mathbf{X} d\theta_r \\ - \int_{\Pi_r} \int_{\Omega} (\hat{\theta}_r - \theta_r) f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{X} d\theta_r \end{array} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

D'après l'hypothèse 3, on obtient

$$\int_{\Pi_r} \int_{\Omega} (\hat{\theta}_r - \theta_r) f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{X} d\theta_r = 0 \text{ et}$$

$$\int_{\Pi_r} \int_{\Omega} (\hat{\theta}_r - \theta_r) f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_1) d\mathbf{X} d\theta_r =$$

$$h_{1r} \int_{\Pi_r} \int_{\Omega} f(\mathbf{X} | \theta_r + h_{1r}; \theta_d + h_{1d}) f(\theta_r + h_{1r}) d\mathbf{X} d\theta_r.$$

En effectuant un changement de variable $\theta'_r = \theta_r + h_{1r}$, le domaine d'intégration reste Π_r par l'hypothèse 1 et donc

$$\{\mathbf{C}\}_{2,1} = h_{1r} \int_{\Pi_r} \int_{\Omega} f(\mathbf{X} | \theta'_r; \theta_d + h_{1d}) f(\theta'_r) d\mathbf{X} d\theta'_r$$

$$= h_{1r}. \quad (18)$$

Nous allons donner un résultat préliminaire afin de simplifier les calculs de $\{\mathbf{C}\}_{1,2}$ et $\{\mathbf{C}\}_{2,2}$: pour toute fonction $g(\mathbf{X}, \theta_d)$ à valeur réelle définie sur $\Omega \times \Pi_d$ et pour tout $\mathbf{h} = (0 \ h_r)^T$ avec $h_r \in \Pi_r$, nous avons

$$\int_{\Pi_r} g(\mathbf{X}, \theta_d) \left(\frac{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h})}{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} - \frac{f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} - \mathbf{h})}{f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \right) f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) d\theta_r$$

$$= g(\mathbf{X}, \theta_d) \int_{\Pi_r} \left(\frac{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}) f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{-f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} - \mathbf{h}) f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \right) d\theta_r. \quad (19)$$

Notons que

$$\int_{\Pi_r} \left(\frac{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}) f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{-f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} - \mathbf{h}) f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \right) d\theta_r =$$

$$\left(\int_{\Pi_r} f^m(\mathbf{X}, \theta_r + h_r; \theta_d) f^{1-m}(\mathbf{X}, \theta_r; \theta_d) d\theta_r \right.$$

$$\left. - \int_{\Pi_r} f^{1-m}(\mathbf{X}, \theta_r - h_r; \theta_d) f^m(\mathbf{X}, \theta_r; \theta_d) d\theta_r \right) \quad (20)$$

En effectuant un changement de variable $\theta'_r = \theta_r + h_r$, le domaine d'intégration reste Π_r par l'hypothèse 1 et donc,

$$\int_{\Pi_r} f^m(\mathbf{X}, \theta_r + h_r; \theta_d) f^{1-m}(\mathbf{X}, \theta_r; \theta_d) d\theta_r$$

$$= \int_{\Pi_r} f^m(\mathbf{X}, \theta'_r; \theta_d) f^{1-m}(\mathbf{X}, \theta'_r - h_r; \theta_d) d\theta'_r. \quad (21)$$

En substituant (21) dans (19), nous obtenons

$$\int_{\Pi_r} g(\mathbf{X}, \theta_d) \left(\frac{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h})}{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} - \frac{f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} - \mathbf{h})}{f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \right) f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) d\theta_r$$

$$= 0 \ \forall \ \mathbf{X} \in \Omega \text{ p.p. et } \forall \ \theta_d \in \Pi_d \quad (22)$$

Remarques :

- Ce résultat est une extension de l'équation (1) dans [6] pour le cas où la loi jointe $f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})$ dépend de θ_d .
- Si nous choisissons $\mathbf{h} = (h_d \ h_r)$ avec $h_d \neq 0$, alors l'équation (22) est une fonction dépendant de la variable \mathbf{X} . Par conséquent, nous ne pourrions pas montrer par la suite que les éléments $\{\mathbf{C}\}_{1,2}$ et $\{\mathbf{C}\}_{2,2}$ sont indépendants de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Maintenant pour le calcul de $\{\mathbf{C}\}_{1,2}$, nous avons

$$\{\mathbf{C}\}_{1,2} = \mathbb{E}_{\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}} \left[(\hat{\theta}_d - \theta_d) v_r(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \right] = 0,$$

d'après l'équation (22) en choisissant $g(\mathbf{X}, \theta_d) = \hat{\theta}_d - \theta_d$.

Enfin, concernant l'élément $\{\mathbf{C}\}_{2,2}$, nous avons

$$\{\mathbf{C}\}_{2,2} = \mathbb{E}_{\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}} \left[(\hat{\theta}_r - \theta_r) v_r(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) \right] \quad (23)$$

$$= \int_{\Omega} \int_{\Pi_r} \theta_r \left(\frac{f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} - \mathbf{h}_2)}{f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} - \frac{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_2)}{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \right) f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) d\theta_r d\mathbf{X},$$

d'après l'équation (22) en choisissant $g(\mathbf{X}, \theta_d) = \hat{\theta}_r$. Il nous reste à calculer cet intégrale :

$$\int_{\Pi_r} \theta_r f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} - \mathbf{h}_2) f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) d\theta_r =$$

$$\int_{\Pi_r} \theta_r f^{1-m}(\mathbf{X}, \theta_r - h_{2r}; \theta_d) f^1(\mathbf{X}, \theta_r; \theta_d) d\theta_r. \quad (24)$$

En effectuant un changement de variable $\theta'_r = \theta_r - h_{2r}$, le domaine d'intégration ne change pas grâce à l'hypothèse 1 et donc

$$\int_{\Pi_r} \theta_r f^{1-m}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} - \mathbf{h}_2) f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) d\theta_r$$

$$= \int_{\Pi_r} \theta'_r f^m(\mathbf{X}, \theta'_r + h_{2r}; \theta_d) f^{1-m}(\mathbf{X}, \theta'_r; \theta_d) d\theta'_r$$

$$+ h_{2r} \int_{\Pi_r} f^m(\mathbf{X}, \theta'_r + h_{2r}; \theta_d) f^{1-m}(\mathbf{X}, \theta'_r; \theta_d) d\theta'_r. \quad (25)$$

En substituant l'équation (25) dans (23), nous obtenons

$$\{\mathbf{C}\}_{2,2} = h_{2r} \mathbb{E}_{\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}} \left[\frac{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{h}_2)}{f^m(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})} \right]. \quad (26)$$

Références

- [1] H. L. Van Trees and K. L. Bell, Eds., *Bayesian Bounds for Parameter Estimation and Nonlinear Filtering/Tracking*. New-York, NY, USA : Wiley/IEEE Press, Sep. 2007.
- [2] Y. Rockah and P. Schultheiss, "Array shape calibration using sources in unknown locations—part I : Far-field sources," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 35, no. 3, pp. 286–299, Mar. 1987.
- [3] I. Reuven and H. Messer, "A Barankin-type lower bound on the estimation error of a hybrid parameter vector," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 43, no. 3, pp. 1084–1093, May 1997.
- [4] E. L. Lehmann and G. Casella, *Theory of Point Estimation*, 2nd ed., ser. Springer Texts in Statistics. New-York, NY, USA : Springer, Sep. 2003.
- [5] H. Messer, "The hybrid Cramér-Rao lower bound – from practice to theory," in *Proc. of IEEE Workshop on Sensor Array and Multi-channel Processing (SAM)*, Waltham, MA, USA, Jul. 2006, pp. 304–307.
- [6] E. Weinstein and A. J. Weiss, "A general class of lower bounds in parameter estimation," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 34, no. 2, pp. 338–342, Mar. 1988.