

Ondelettes sur les graphes et régularité

Benjamin RICAUD, David SHUMAN, Pierre VANDERGHEYNST

EPFL, Laboratoire Traitement des Signaux 2
STI-IEL-LTS2, Station 11, 1015 Lausanne, Suisse

benjamin.ricaud@epfl.ch, david.shuman@epfl.ch, pierre.vandergheynst@epfl.ch

Thème – Sessions spéciale: Traitement du signal et graphes

Problème traité – Dans le cas continu, il est prouvé que la transformée en ondelettes permet de détecter et estimer les singularités d'un signal (e.g. discontinuités, points de non-différentiabilité...). Dans le cas de signaux définis sur des graphes et de la transformation en ondelette sur les graphes, aucune étude n'a encore montré un lien entre coefficients d'ondelettes et régularité d'un signal.

Originalité – Sur un graphe, de par sa structure, certaines notions clefs utilisées en traitement du signal doivent être redéfinies. C'est le cas de la translation et de la dilatation pour la construction des ondelettes. C'est aussi le cas de la notion de régularité d'une fonction. Nous proposons des généralisations et des alternatives aux notions standards afin de relier décroissance des coefficients d'ondelettes et régularité d'une fonction.

Résultats – Nous montrons de façon numérique et théorique des relations entre valeurs des coefficients d'ondelettes et régularité du signal.

1 Introduction

Un des intérêt principaux des ondelettes est de pouvoir capturer le comportement local d'une fonction et notamment sa régularité locale. Elle permet par exemple de détecter les discontinuités ou de coder de manière parcimonieuse les fonctions ayant un nombre fini de singularités. Nous présentons ici des résultats récents sur le lien entre régularité d'une fonction et sa transformée en ondelettes, en utilisant la transformation proposée dans [7].

2 Une notion de régularité sur les graphes

L'opérateur Laplacien sur les graphes. Un graphe $G = \{E, V, w\}$ consiste en un ensemble de noeuds V connectés par un ensemble d'arrêtes E . Chaque connexion est pondérée par la fonction $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Soit N le nombre de noeuds du graphe. On définit une fonction sur le graphe $f \in \mathbb{C}^N$ qui à chaque noeud associe une valeur complexe. Cette fonction représente nos données sur un graphe. Afin d'étudier la régularité des fonctions sur les graphes on introduit l'opérateur gradient ∇ :

$$\nabla f(m, n) = \sqrt{w(m, n)} (f(m) - f(n))$$

Cet opérateur mesure les variations de la fonction f entre le noeud m et n . On peut écrire

$$\sum_{m,n} |\nabla f(m, n)|^2 = \sum_m \overline{f(m)} \Delta f(m)$$

où Δ est l'opérateur Laplacien : $\Delta f(t) = \sum_n w_{t,n} (f(t) - f(n))$. Quand le graphe est un cercle avec w une fonction constante, Δ est le Laplacien standard donné par la dérivée seconde (différences finies). Cette matrice symétrique fait l'objet d'études approfondies en mathématiques, voir par exemple [1]. Pour la suite on notera λ_k ses valeurs propres et u_k les vecteurs propres associés :

$$\Delta u_k = \lambda_k u_k.$$

Régularité. Les opérateurs ∇ et Δ sont impliqués dans de nombreuses mesures de régularité. Par exemple la régularisation de Tikhonov où on mesure $y = f + \eta$, qui est la somme d'un signal f et d'un bruit η . On cherche à retrouver f sachant à priori que le signal est régulier sur le graphe, i.e. la norme de sa dérivée est petite. Pour cela, on résoud le probleme d'optimisation suivant :

$$\operatorname{argmin}_f \|f - y\|_2^2 + \gamma \langle f, \Delta f \rangle, \text{ pour un } \gamma > 0. \quad (1)$$

On peut généraliser cette mesure de régularité en introduisant la forme p -Dirichlet :

$$S_p(f) = \frac{1}{p} \sum_m \|\nabla f(m, \cdot)\|_2^p = \frac{1}{p} \sum_m \left| \sum_n w(m, n) (f(m) - f(n))^2 \right|^{\frac{p}{2}}. \quad (2)$$

Cette mesure est utilisée dans des problèmes de régression [2, 3] ou avec le Laplacien normalisé [4]. Il a aussi été proposé [5] d'utiliser des puissances ou des fonctions du Laplacien $g(\Delta) = \sum_k g(\lambda_k) \langle \cdot, u_k \rangle u_k$. C'est en ce sens que nous proposons la semi-norme Sobolev donnée par :

$$\|f\|_{2,p} = \|\Delta^p f\|_2 = \sqrt{\sum_l |\lambda_l|^{2p} |\hat{f}(l)|^2}. \quad (3)$$

Son écriture simple dans le domaine spectral est un atout pour la suite car les ondelettes sont définie dans le domaine spectral.

3 Transformations multi-échelles et ondelettes

La transformation donnée en [7] est basée sur la translation T_n et la dilatation D_s d'une ondelette mère g . La translation et la dilatation sur le graphe sont définies comme suit (la dilatation est définie dans le domaine spectral) :

$$(T_n g)(i) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{g}(l) u_l^*(n) u_l(i), \quad \widehat{D_s g}(\lambda) = \hat{g}(s\lambda), \quad (4)$$

où $\hat{g}(l) = \langle g, u_l \rangle$ et où \hat{g} est une fonction sur \mathbb{R} . L'ondelette à l'échelle s , en position n est donnée par :

$$g_{s,n}(i) = (T_n D_s g)(i) = \sum_l \hat{g}(s\lambda_l) u_l^*(n) u_l(i). \quad (5)$$

Dans ce cadre, l'ondelette mère est définie dans le domaine spectral \hat{g} comme une fonction continue sur \mathbb{R} telle que $\hat{g}(0) = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{g}(\lambda) = 0$ et qui satisfait une condition d'admissibilité additionnelle [7]. On rajoute à cette famille une fonction d'échelle h (filtre passe-bas) et ses translations $T_n h$ afin d'avoir une transformation inversible. Enfin, la transformée en ondelettes de la fonction f est donnée par :

$$Wf(s, n) = \langle f, g_{s,n} \rangle = \sum_l \hat{g}(s\lambda_l) u_l^*(n) \hat{f}(l). \quad (6)$$

4 Régularité et ondelettes

Régularité globale : nous pouvons établir une relation entre la vitesse de décroissance en échelle des coefficients d'ondelettes et la régularité au sens de Sobolev. En effet,

$$\sum_n |\langle g_{s,n}, f \rangle|^2 = \sum_l |\hat{g}(s\lambda_l)|^2 |\hat{f}(l)|^2.$$

Supposons que pour $p \geq 1$, $\int_0^\infty |\hat{g}(s)|^2 / s^{2p} ds = C_p$ une constante. Du fait de la définition dans le domaine continu de \hat{g} et s , on peut utiliser une integrale et un changement de variable,

$$\int_0^\infty s^{-2p} \sum_n |\langle g_{s,n}, f \rangle|^2 ds = \sum_l \int_0^\infty s^{-2p} |\hat{g}(s)|^2 ds \lambda_l^{2p-1} |\hat{f}(l)|^2 = C_p \|f\|_{2, (2p-1)/2}^2. \quad (7)$$

Ceci met en évidence le fait qu'à petites échelles, les coefficients doivent décroître rapidement si la fonction est régulière. De la même manière, pour un frame d'ondelettes on obtient un encadrement à la place de l'égalité stricte, dû au fait que l'intégrale est remplacée par une somme. Une deuxième relation intéressante est la suivante. On suppose que l'ondelette peut s'écrire comme un polynôme d'ordre α et tel que pour $p \geq 1$ ($\hat{g}(0) = 0$) :

$$\hat{g}(\lambda) = \sum_{k=p}^{\alpha} a_k \lambda^k$$

on a :

$$\begin{aligned} |Wf(s, n)| &\leq \sum_l \sum_{k=p}^{\alpha} |a_k (s\lambda_l)^k u_l^*(n) \hat{f}(l)| \leq \sum_{k=p}^{\alpha} |a_k| \sqrt{\sum_l |u_l^*(n)|^2 \sum_m |s\lambda_m|^{2k} |\hat{f}(m)|^2} \\ &\leq \sum_{k=p}^{\alpha} |a_k| s^k \|f\|_{2,k}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Encore une fois, cette relation montre que pour s petit Wf doit décroître comme $s^p \|f\|_{2,p}^2$, et donc de manière rapide si la fonction est régulière.

Régularité locale : Les ondelettes de [7] peuvent être construites à support compact en définissant \hat{g} comme un polynôme de degré fini (Lemme 5.3). D’après les résultats précédents, les ondelettes suffisamment éloignées d’une discontinuité seront associées à des coefficients nuls. Les forts coefficients concernent donc les ondelettes proches des singularités. Un énoncé plus précis est en cours d’investigation. On montre que c’est le cas numériquement. En effet, sur la Fig. 1 on peut voir que pour les ondelettes à petite échelles les forts coefficients se trouvent sur et autour de la singularité.

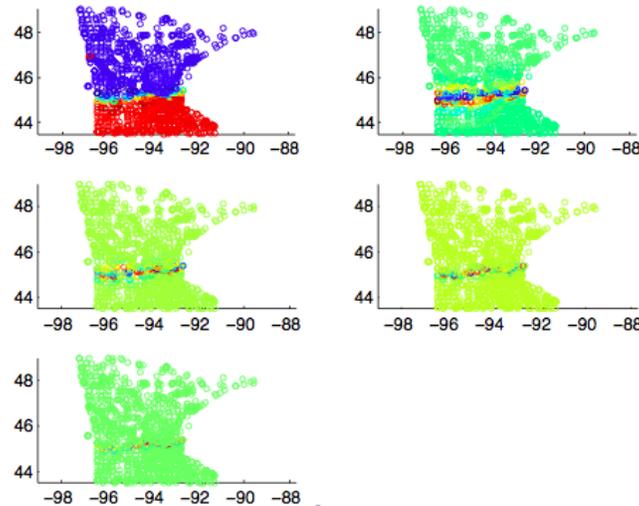


FIGURE 1 – Un signal continu par morceaux avec une discontinuité. en haut à gauche et en bleu (valeurs négatives) et rouge (valeurs positives) les deux zones constantes du signal sur le graphe. Le vert représente les valeurs proches de zéro. sur les 4 autres graphes : les coefficients de sa transformée en ondelettes à plusieurs échelles différentes, les coefficients les plus larges sont associés aux ondelettes présentes autour et sur la discontinuité.

Références

- [1] F. R. K. Chung, Spectral graph theory, AMS, 1997.
- [2] A. Elmoataz, O. Lezoray, and S. Boughleux, Nonlocal discrete regularization on weighted graphs : a framework for image and manifold processing, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 17, pp. 1047–1060, 2008.
- [3] M. Belkin, I. Matveeva, and P. Niyogi, Regularization and semi-supervised learning on large graphs, Learning Theory, Lecture Notes in Computer Science, pp. 624–638, 2004.
- [4] D. Zhou and B. Schölkopf, A regularization framework for learning from graph data, in Proceedings of the ICML Workshop on Statistical Relational Learning and Its Connections to Other Fields, 2004, pp. 132–137.
- [5] A. J. Smola and R. Kondor, Kernels and regularization on graphs, in Proceedings of the Annual Conference on Computational Learning Theory, Lecture Notes in Computer Science, B. Schölkopf and M. Warmuth, Eds. Springer, 2003, pp. 144–158.
- [6] G. Peyré, S. Boughleux, and L. Cohen, Non-local regularization of inverse problem, in Proceedings of ECCV’08, Lecture Notes in Computer Science, D. A. Forsyth, P. H. S. Torr, and A. Zisserman, Eds. Springer, 2008, pp. 57–68.
- [7] D. K. Hammond, P. Vandergheynst, R. Gribonval, Wavelets on graphs via spectral graph theory, Appl. Comput. Harmon. Anal., 30, 2, 129–150, 2011.