Traitement du signal sur les graphes

Benjamin RICAUD, David SHUMAN, Pierre VANDERGHEYNST

EPFL, Laboratoire Traitement des Signaux 2
STI-IEL-LTS2, Station 11, 1015 Lausanne, Suisse
benjamin.ricaud@epfl.ch,david.shuman@epfl.ch,pierre.vandergheynst@epfl.ch

Thème – Sessions spéciale: Traitement du signal et graphes

Problème traité – La généralisation de méthodes traitement du signal aux signaux sur les graphes. Par exemple: la transformation de Fourier, de Fourier à fenêtre et les ondelettes.

Originalité – Le nombre de problèmes industriels et scientifiques modélisés par des graphes a fortement augmenté ces dernières années. La géométrie particulière d'un graphe requiert des outils spécifiques pour son analyse et celle des données associées. Ce tutoriel présente certains des défis actuels pour l'analyse de données sur les graphes. En particuliers, les récentes propositions pour la construction de représentations de signaux comme les ondelettes ou la transformation de Fourier à fenêtre seront expliquées.

Résultats – Généralisation de la transformation en ondelette et de la transformation de Fourier à fenêtre aux graphes.

1 Introduction

Les graphes sont des formes de représentation de données utilisées dans de nombreuses applications. Par exemple ils interviennent dans la modélisation des réseaux sociaux, de transport, d'énergie, les réseaux de capteurs ou encore les réseaux de neurones. Le poids associé aux arrêtes d'un graphe peut représenter la similarité, la proximité ou la force de la connexion entre les différents noeuds. A chaque noeud peut être associé une donnée, un nombre et c'est cet ensemble de valeurs que l'on va appeler un signal sur le graphe. Nous présentons ici une introduction au traitement du signal sur les graphes ainsi que des résultats récents sur la généralisation de quelques transformations emblématiques que sont les ondelettes [2] et la transformation de Fourier à fenêtre [3].

2 Une transformation de Fourier sur les graphes

Un signal échantillonné $f \in \mathbb{C}^N$, par exemple un signal audio, peut être vu comme un signal sur un graphe. Ce graphe étant dans ce cas un cercle où les arrêtes ont des poids tous égaux au pas d'échantillonnage temporel. Pour analyser les composantes fréquentielles dominantes dans le signal on peut calculer la transformation de Fourier :

$$\hat{f}(k) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t)\overline{u_k(t)} \quad \text{où} \quad u_k(t) = \frac{e^{i\frac{2\pi}{N}kt}}{\sqrt{N}}. \tag{1}$$

On peut voir cette opération comme le produit scalaire avec l'ensemble des vecteurs $\{u_k\}$ formant une base orthonormale. Il est important de noter que ces vecteurs sont les vecteurs propres de l'opérateur Laplacien Δ :

$$\Delta f(t) = \sum_n w_{t,n}\left(f(t) - f(n)\right) \text{ où } w_{t,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = t \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'operator Laplacien est défini de la même manière sur un graphe plus général, la quantité $w_{t,n}$ étant alors la valeur du poid sur l'arrête (t, n), zéro signifiant qu'il n'y a pas de connexion entre les noeuds t et n. C'est une matrice symétrique, la transformation de Fourier peut etre ainsi généralisée en choisissant les vecteurs propres du Laplacien pour la base orthogonale $\{u_k\}$. Ces fonctions partagent plusieurs propriétés importantes avec les vecteurs standard de la transformée de Fourier. Nous noterons par la suite λ_k

les vecteurs propres et u_k les vecteurs propres associés :

$$\Delta u_k = \lambda_k u_k.$$

L'étude du Laplacien sur le graphe est un domaine de recherche appelé théorie spectrale des graphes, le lecteur pourra se reporter vers par exemple [1] pour plus d'information. Notons aussi qu'il existe deux types de Laplacien, le Laplacien combinatoire définit précédemment (et que l'on utilisera principalement ici) et le Laplacien normalisé où les poids $w_{t,n}$ sont normalisés par un facteur $\sqrt{d_t d_n}$ avec $d_t = \sum_j w_{t,j}$. Ce dernier est plutôt utilisé en probabilités, pour l'étude de marches aléatoires et de diffusion sur les graphes.

3 Généralisation aux graphes de certaines opérations sur les signaux

Une des particularités importantes des graphes est qu'il n'y a pas de symétries (en général) et qu'il est difficile de définir une translation et de donner du sens à l'expression $f(t-\tau)$. Pourtant la notion de translation d'une fonction est extrêmement importante en traitement du signal, par exemple pour la transformation de Fourier court-terme ou les ondelettes ou simplement pour définir un produit de convolution. Néanmoins on peut proposer une généralisation de ces notions en tirant partie du domaine spectral. Prenant pour définition que l'opération de convolution est une multiplication dans le domaine spectral, nous introduisons la convolution sur le graphe de f et h par :

$$(f * h)(i) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_l)\hat{h}(\lambda_l)u_l(i). \tag{2}$$

La translation de f dans le domaine usuel (périodique ou continu) est donné par la convolution avec un Dirac δ_n. Nous définissons donc la translation sur le graphe à partir de la convolution comme suit :

$$(T_n f)(i) = \sqrt{N}(f * \delta_n)(i) = \sqrt{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_l)u_l^*(n)u_l(i). \tag{3}$$

L'effet de la translation sur le graphe est illustrée Fig. 1. En ce qu'il concerne la dilatation d'une fonction sur le graphe, elle ne

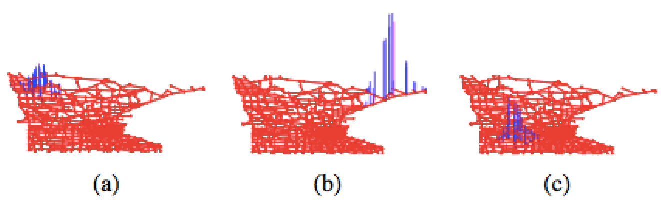

FIGURE 1 – Un signal (en bleu) translaté en trois positions du graphe en utilisant la relation (3). On peut remarquer que son étalement sur le graphe est conservé mais pas sa forme.

peut pas être donnée par la formule standard $\mathcal{D}_s f(t) = f(t/s)/s$ car t dépend du choix de la numérotation des noeuds du graphe. Deux valeurs proches pour t ne signifie pas que les noeuds indexés sont proches. Cependant, on peut contourner cette difficulté en définissant la dilatation dans le domaine spectral. La dilatation d'une fonction se traduit dans le domaine de Fourier par une dilatation inverse. Comme le spectre est ordonné sur une ligne, possédant ainsi une certaine structure on définit la dilatation par [2] :

$$\widehat{\mathcal{D}_s f}(\lambda) = \hat{f}(s\lambda), \tag{4}$$

où $\hat{f}$ est une fonction sur $\mathbb{R}$ que l'on a définie préalablement. Enfin, La notion de modulation d'un signal peut être généralisée comme suit :

$$(M_k f)(i) = \sqrt{N} f(i)u_k(i). \tag{5}$$

La multiplication par une exponentielle complexe (vecteur propre du Laplacien sur le cercle) est remplacée par la multiplication avec un vecteur propre du Laplacien sur le graphe. On peut montrer que cette définition conserve les propriétés de la modulation comme la translation (de certaines composantes) dans le domaine spectral [3].

4 Transformations multi-échelles et temps-fréquence

Afin d'analyser des données sur un graphe, plusieurs méthodes et transformations localisées ont été récemment proposées. Nous allons présenter deux exemples emblématiques : les ondelettes sur les graphes [2] et la transformée de Fourier à fenêtre [3].

Il faut remarquer que ces exemples sont *une* manière de généraliser les constructions standard, il en existe d'autres (e.g. [4, 5]) et beaucoup de questions restent encore ouvertes.

4.1 Ondelettes

Un des intérêt principaux des ondelettes est de pouvoir capturer le comportement local d'une fonction et notamment sa régularité locale. Elle permet par exemple de détecter les discontinuités ou de coder de manière parcimonieuse les fonctions ayant un nombre fini de singularités. Cette transformation est basée sur la translation T_n et la dilatation D_s d'une ondelette mère g. Les ondelettes à l'échelle s sont donnés par [2] :

$$(T_n D_s g)(i) = \sqrt{N} \sum_l \hat{g}(sl) u_l^*(n) u_l(i). \tag{6}$$

Dans ce cadre, $\hat{g}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{g}(0) = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} = 0$ et qui satisfait une condition d'admissibilité additionnelle [2]. On rajoute à cette famille une fonction d'échelle h (filtre passe-bas) et ses translations $T_n h$ afin d'avoir une transformation inversible.

Un exemple de transformation en ondelette est donné Fig. 2.

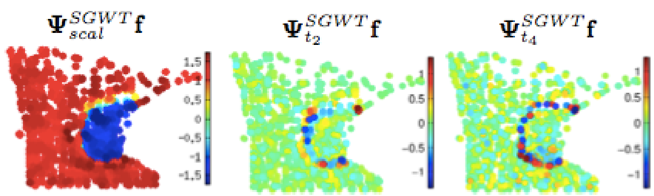

FIGURE 2 – Un signal continu par morceaux avec une discontinuité circulaire autour de la capitale du Minnesota. Sa transformée en ondelettes à deux échelles différentes : les coefficient les plus larges sont associés aux ondelettes présentes autour et sur la discontinuité.

4.2 Transformation de Fourier à fenêtre

La transformation de Fourier à fenêtre (TFF) est très utilisée pour obtenir des images temps-fréquences de signaux non-stationnaires. Elle permet de mettre en évidence des oscillations et autres composantes fréquentielles localisées en divers places dans un signal. Elle est appropriée pour détecter des zones de variations rapides ou lentes d'un signal sur un graphe. Elle est définie par la projection sur l'ensemble des translations T_n et modulations M_k d'une fenêtre initiale g :

$$V_g f(n,k) = \langle f, g_{n,k} \rangle \quad \text{où} \quad g_{n,k}(i) = M_k T_n g(i) = N u_k(i) \sum_{l=0}^{N-1} \hat{g}(\lambda_l) u_l^*(n) u_l(i). \tag{7}$$

On peut montrer que c'est un frame et donc qu'une transformation inverse existe.

Références

[1] F. R. K. Chung, Spectral graph theory, AMS, 1997.

[2] D. K. Hammond, P. Vandergheynst R. Gribonval, Wavelets on graphs via spectral graph theory, Appl. Comput. Harmon. Anal., 30, 2,129–150, 2011.

[3] D. I. Shuman, B. Ricaud, P. Vandergheynst, A windowed graph Fourier transform, Proc. IEEE Stat. Sig. Proc. Wkshp, Ann Arbor, MI, Aug. 2012.

[4] R. R. Coifman, M. Maggioni, Diffusion wavelets, Appl. Comp. Harmon. Anal. 21, 1, 53–94, 2006.

[5] M. Jansen, G. P. Nason, B. W. Silverman, Multiscale methods for data on graphs and irregular multidimensional situations, J. R. Stat. Soc. B, 71, 1, 97–125, 2009.