

Estimation MMSE itérative et conjointe du rapport signal à bruit et du canal sélectif en fréquence pour les systèmes OFDM

Vincent SAVAUX^{1,2}, Yves LOUËT², Moïse DJOKO-KOUAM¹, Alexandre SKRZYPCZAK³

¹Département Génie des Systèmes de Communications
ECAM RENNES - Louis de Broglie, Campus de Ker Lann - Bruz CS 29128, 35091 RENNES Cedex 9, France

²Équipe SCEE
SUPELEC/IETR, Avenue de la Boulaie, CS 47601, F-35576 Cesson-Sévigné CEDEX, France

³Zodiac Data Systems
2 rue de Caen, 14740 Bretteville l'Orgueilleuse, France
vincent.savaux@ecam-rennes.com, Yves.Louet@supelec.fr
moise.djoko-kouam@ecam-rennes.fr, Alexandre.Skrzypczak@zodiacaerospace.com

Résumé – Cet article présente un algorithme itératif permettant l'estimation conjointe du RSB (Rapport Signal à Bruit) et du canal de transmission multi-trajets pour la modulation OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). L'estimation du RSB et du canal, basée sur le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale (ou MMSE), aboutit à une structure d'estimateur itérative et conjointe. Aucune connaissance a priori des statistiques des deux paramètres n'est nécessaire pour la mise en œuvre de la méthode. Nous montrons que cette solution se base sur un algorithme qui converge rapidement, et que les performances d'estimation sont très bonnes, aussi bien pour le RSB que pour le canal. De plus, à performance d'estimation du RSB comparable, notre technique utilise un nombre de pilotes plus faible comparativement à des techniques de référence.

Abstract – This article presents an algorithm for the joint estimation of the signal to noise ratio (SNR) and the multipath transmission channel in the OFDM context. Both estimations of the SNR and the channel are based on the minimum mean square error (MMSE), which leads to a joint and iterative estimator structure. The method does not require any a priori knowledge of the statistics of both parameters to be performed. We show that our solution is based on an algorithm which quickly converges, and that the estimation performance is very good for both SNR and channel. Moreover, for similar SNR values, our technique requires less pilots than other reference methods.

1 Introduction et modèle

Deux sources de perturbations importantes des transmissions sans fil sont le canal multi-trajets et le bruit additif gaussien. Une bonne estimation du canal en réception permet une limitation des erreurs de décision après égalisation. La connaissance du bruit ou du RSB permet une meilleure adaptation de certains paramètres de transmission comme la constellation, le rendement du code correcteur ou encore la puissance d'émission du signal. La littérature concernant l'estimation du RSB ou du canal est abondante, cependant il apparait que les méthodes d'estimation du RSB se basant sur le critère MMSE supposent le canal connu [3], ce qui est rarement le cas en pratique. De même, l'estimation de canal LMMSE (pour Linear-MMSE) nécessite la connaissance des statistiques du bruit et du canal.

Comme l'estimation MMSE de la variance du bruit nécessite une bonne estimation de canal, nous proposons dans cet article d'utiliser la méthode LMMSE, qui offre d'excellentes performances d'estimation [1]. Effectuée sur un symbole connu du récepteur appelé pilote, celle-ci nécessite la connaissance de la variance du bruit et de la matrice de covariance du canal. L'es-

timement du bruit étant dépendante de celle du canal et vice-versa, nous proposons donc un algorithme itératif pour effectuer une estimation conjointe RSB-canal. Dans [5], cette méthode est étudiée dans un cas où la matrice de covariance du canal est supposée connue. On se place ici dans un contexte plus réaliste, où cette matrice doit être estimée. Dans la suite, on considèrera le signal pilote reçu \mathbf{U} après la transformée de Fourier discrète de taille M :

$$\mathbf{U} = \mathbf{P}\mathbf{H} + \mathbf{W}, \quad (1)$$

où $\mathbf{H} = [H_0, H_1, \dots, H_{M-1}]^T$ (T est l'opérateur transposition) est le vecteur contenant les échantillons de la réponse fréquentielle du canal tel que pour tout $m = 0, 1, \dots, M-1$, $|H_m|$ suit une loi de Rayleigh. $\mathbf{W} = [W_0, W_1, \dots, W_{M-1}]^T$ est le vecteur contenant les échantillons du bruit additif gaussien tel que $W_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ est la matrice diagonale dont les éléments P_m sont des porteuses pilotes telles que $|P_m| = 1$. A partir de (1), on définit l'estimation de canal selon le critère des moindres carrés (ou LS), simplement obtenue par

$$\hat{\mathbf{H}}^{LS} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{H} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}. \quad (2)$$

On définit aussi le moment d'ordre 2 du signal reçu

$$M_2 = E \left\{ \frac{1}{M} \|\mathbf{U}\|^2 \right\} = P_S + \sigma^2, \quad (3)$$

où $E \{ \cdot \}$ est l'espérance mathématique et $\|\cdot\|$ la norme matricielle de Frobenius¹ et P_S la puissance du signal non bruité. L'estimation LS est simple à réaliser, mais est limitée par sa forte sensibilité au bruit.

2 Algorithme proposé

Nous détaillons ici les étapes de l'algorithme proposé pour l'estimation conjointe du RSB et du canal de transmission grâce au critère MMSE. Cet algorithme est une adaptation de celui donné dans [5], appliqué au cas où la matrice de covariance du canal est a priori inconnue et doit être estimée. On note (i) l'indice de l'itération.

1. **Initialisation** : Fixer un seuil e_σ servant de point d'arrêt. Initialiser l'estimation de la variance du bruit $\sigma_{(i=0)}^2$. Effectuer une estimation de la matrice de covariance du canal grâce à son estimée LS : $\hat{\mathbf{R}}_H^{LS} = \hat{\mathbf{H}}^{LS} (\hat{\mathbf{H}}^{LS})^H$.
2. Effectuer une estimation LMMSE du canal grâce à $\sigma_{(i=0)}^2$ et $\hat{\mathbf{R}}_H^{LS}$:

$$\hat{\mathbf{H}}_{(1)}^{LMMSE} = \hat{\mathbf{R}}_H^{LS} (\hat{\mathbf{R}}_H^{LS} + \sigma_{(i=0)}^2 (\mathbf{P}\mathbf{P}^H)^{-1})^{-1} \hat{\mathbf{H}}^{LS}, \quad (4)$$

où $\mathbf{P}\mathbf{P}^H$ est la matrice identité \mathbf{I}_d , car pour tout m on a $|P_m| = 1$.

3. Effectuer l'estimation MMSE de la variance du bruit :

$$\sigma_{(1)}^2 = \frac{1}{M} E \left\{ \|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{U} - \hat{\mathbf{H}}_{(1)}^{LMMSE}\|^2 \right\} \\ = \frac{1}{M} E \left\{ \|\hat{\mathbf{H}}^{LS} - \hat{\mathbf{H}}_{(1)}^{LMMSE}\|^2 \right\}. \quad (5)$$

4. Si $i = 1$, effectuer une seconde estimation de la matrice de covariance du canal grâce à sa première estimée LMMSE : $\hat{\mathbf{R}}_H^{LMMSE} = \hat{\mathbf{H}}_{(1)}^{LMMSE} (\hat{\mathbf{H}}_{(1)}^{LMMSE})^H$.
5. **Boucle** : Pour $i \geq 2$, effectuer l'estimation de canal :

$$\hat{\mathbf{H}}_{(i)}^{LMMSE} = \hat{\mathbf{R}}_H^{LMMSE} (\hat{\mathbf{R}}_H^{LMMSE} + \sigma_{(i-1)}^2 \mathbf{I}_d)^{-1} \hat{\mathbf{H}}^{LS}, \quad (6)$$

6. Pour $i \geq 2$, effectuer l'estimation de variance du bruit :

$$\sigma_{(i)}^2 = \frac{1}{M} E \left\{ \|\hat{\mathbf{H}}^{LS} - \hat{\mathbf{H}}_{(i)}^{LMMSE}\|^2 \right\}. \quad (7)$$

7. Tant que $|\sigma_{(i)}^2 - \sigma_{(i-1)}^2| > e_\sigma$, retourner à l'étape 5, avec $i \leftarrow i + 1$, ou aller à l'étape 8.

8. On note i_f l'indice de l'itération finale. Effectuer l'estimation du RSB noté $\hat{\rho}$: $\hat{\rho} = M_2 / \sigma_{(i_f)}^2 - 1$.

9. Fin de l'algorithme.

La figure 1 résume l'algorithme sous forme d'un organigramme.

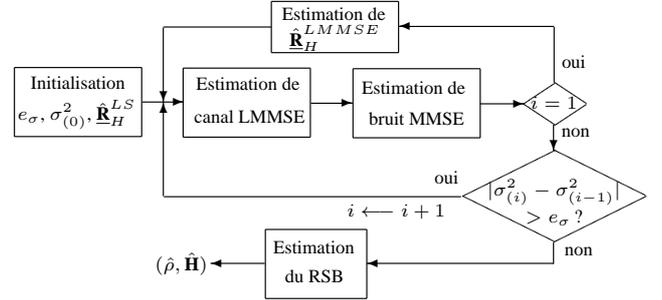


FIGURE 1 – Organigramme de l'algorithme proposé.

Il est nécessaire d'estimer à nouveau la matrice de covariance à l'étape 4 car, si $\hat{\mathbf{R}}_H^{LS}$ était utilisée à chaque étape, l'algorithme convergerait vers zéro. Ceci vient du fait que $\hat{\mathbf{R}}_H^{LS}$ est estimée sur un seul symbole pilote, ce qui rend cette matrice bruitée. $\hat{\mathbf{R}}_H^{LMMSE}$ étant plus proche de la matrice de covariance exacte, il est possible de prouver la convergence de l'algorithme vers des valeurs $\hat{\rho}$ et $\hat{\mathbf{H}}$ différentes de zéro.

3 Convergence de l'algorithme

Pour montrer la convergence de l'algorithme pour les estimations du RSB et du canal, il suffit de montrer que la variance du bruit (7) converge. En effet, si (7) converge, alors en réinjectant dans (6), on montre que l'estimation de canal converge. De plus, à partir de $\hat{\rho} = M_2 / \sigma_{(i_f)}^2 - 1$, on montre que le RSB converge aussi.

En réinjectant (6) dans (7), on remarque que $\sigma_{(i)}^2$ est une suite fonction de $\sigma_{(i-1)}^2$. En se basant sur les développements donnés dans [5], on déduit l'expression scalaire de cette suite, telle que $\sigma_{(i)}^2 = f_2(\sigma_{(i-1)}^2)$. En posant $x = \sigma_{(i)}^2$, on exprime alors $f_2(x)$:

$$f_2(x) = \frac{x^2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\lambda_m + \sigma^2}{(\lambda_m + \sigma^2 + \hat{\sigma}_{(i=0)}^2)^2 + x^2}, \quad (8)$$

où les λ_m sont les valeurs propres de la matrice de covariance du canal. En utilisant le théorème du point fixe, on démontre que si $f_2(x) = x$ a une solution, alors la suite $(\sigma_{(i)}^2)$ converge vers cette solution. De plus, on peut montrer que la suite $(\sigma_{(i)}^2)$ converge vers une valeur non nulle si l'équation $f_2(x) = x$ a une solution différente de zéro. On remarque dans (8) que l'initialisation $\sigma_{(i=0)}^2$ joue un rôle dans la convergence de cette suite. En étudiant les dérivées première et seconde de f_2 , on peut donner une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur $\sigma_{(i=0)}^2$ pour la convergence de l'algorithme. Plus précisément, pour obtenir une solution différente de zéro, il faut que

1. La norme de Frobenius d'une matrice \mathbf{A} est donnée par $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)}$, où $\text{tr}(\cdot)$ est l'application trace et $(\cdot)^H$ est l'opérateur de transposition-conjugaison.

$$\hat{\sigma}_{(i=0)}^2 \geq \Lambda M_2, \quad (9)$$

où Λ est un nombre réel choisi tel que $\Lambda \gg 1$. La figure 2 montre l'allure de f_2 pour deux valeurs différentes de l'initialisation $\hat{\sigma}_{(i=0)}^2$. Pour $\hat{\sigma}_{(i=0)}^2 = M_2$, on remarque que la seule solution de $f_2(x) = x$ est $x = 0$, tandis que pour $\hat{\sigma}_{(i=0)}^2 = 10M_2$, l'équation $f_2(x) = x$ est vérifiée pour zéro mais aussi pour $x \approx 1.5$. On vérifie donc la CNS (9). Cependant, le choix de Λ est empirique et n'est donc pas optimal. Il est possible d'optimiser la valeur prise par $\hat{\sigma}_{(i=0)}^2$ en utilisant l'estimation de la variance $\sigma_{(i_f)}^2$ effectuée lors de la trame précédente. En effet, en remplaçant σ^2 par son estimation $\sigma_{(i_f)}^2$ dans (8), la résolution de

$$\frac{\sigma_{(i_f)}^4}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\lambda_m + \sigma_{(i_f)}^2}{(\lambda_m + \sigma_{(i_f)}^2)^3} - = 0, \quad (10)$$

permet de trouver une valeur optimale de $\hat{\sigma}_{(i=0)}^2$. Evidemment, la résolution directe de (10) étant très complexe, on peut utiliser un algorithme simple tel que la dichotomie pour obtenir $\hat{\sigma}_{(i=0)}^2$.

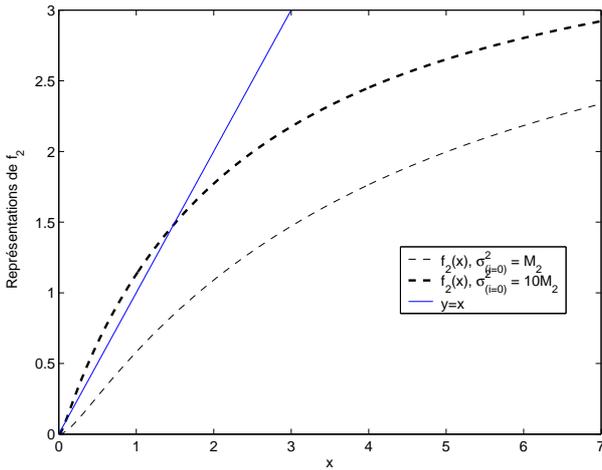


FIGURE 2 – Allure de f_2 en fonction de x pour deux valeurs de ΛM_2 , comparée avec $y = x$.

4 Résultats de simulations

Les simulations sont effectuées à partir des paramètres du standard Digital Radio Mondiale (DRM/DRM+, voir [2]), créé pour l'émission de la radio numérique dans les bandes AM et FM actuelles. On considère une modulation OFDM à 201 porteuses avec une fréquence d'échantillonnage de 12 kHz. La constellation choisie est une MAQ-16, le préfixe cyclique a une durée de 2.6 ms. Aucun codage de canal n'est effectué.

Le canal est simulé grâce au modèle *US Consortium*. C'est un canal à quatre trajets, dont les retards s'étendent sur 2.33 ms, et dont la fréquence Doppler maximum vaut 2 Hz. Le standard

DRM impose un placement des pilotes en quinconce dans la trame OFDM. Cependant, comme notre méthode n'est valable que pour une répartition des pilotes par préambule, nous nous autorisons une modification du standard DRM sur ce point, mais en conservant un ratio identique entre le nombre de pilotes et le nombre de symboles utiles. Le tableau 1 résume les paramètres du canal *US Consortium*.

TABLE 1 – Tableau des paramètres du canal *US Consortium*.

<i>US Consortium</i>				
trajet	1	2	3	4
delai (ms)	0	0.7	1.5	2.2
gain	1	0.7	0.5	0.25
fréq. Doppler (Hz)	0.1	0.5	1	2

Sur la figure 3, on trace l'erreur quadratique moyenne normalisée (ou NMSE) de l'estimation du RSB en fonction du RSB, donnée par

$$NMSE_{RSB} = E \left\{ \frac{\rho - \hat{\rho}}{\rho} \right\}. \quad (11)$$

On compare l'estimation du RSB proposée avec trois méthodes de la littérature : la méthode de Ren [4], qui nécessite deux symboles OFDM pilotes par préambule, la méthode de Xu [7], qui n'en nécessite qu'un et le classique M_2M_4 [6]. L'initialisation $\hat{\sigma}_{(i=0)}^2$ est choisie en suivant la CNS seulement.

On remarque que pour les valeurs de $RSB \geq 3$ dB, la méthode proposée est plus performante que les deux techniques de référence citées, et atteint même le NMSE du cas parfait pour $RSB \geq 6$ dB. On conclut que comparativement aux méthodes de référence, l'algorithme proposé a un meilleur compromis entre le nombre de pilote par préambule et les performances atteintes.

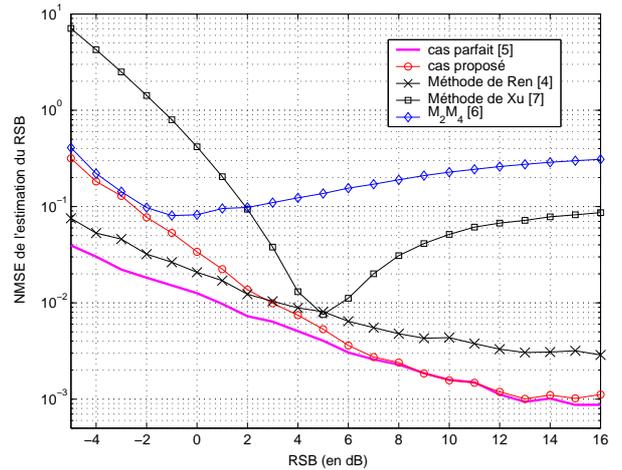


FIGURE 3 – NMSE de l'estimation du RSB en fonction du RSB.

Sur la figure 4, on trace l'erreur quadratique moyenne nor-

malisée (ou NMSE) de l'estimation du RSB en fonction du RSB, comparée aux méthodes de référence, et pour une initialisation $\hat{\sigma}_{(i=0)}^2$ optimale. On remarque que dans ce cas, l'algorithme proposé dépasse les performances des méthodes de référence et est très proche du cas parfait.

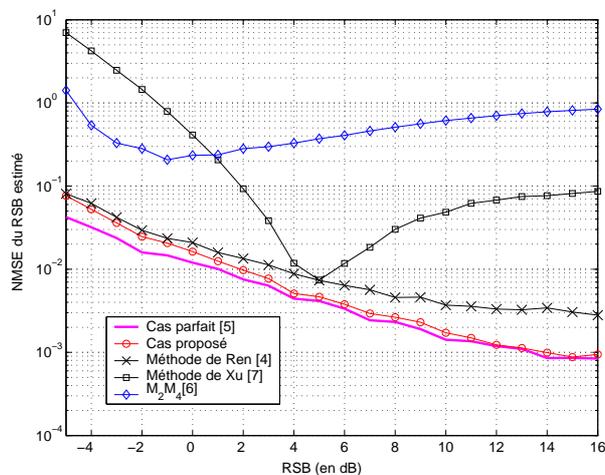


FIGURE 4 – NMSE de l'estimation du RSB en fonction du RSB.

Sur la figure 5, on compare l'estimation de canal proposée avec les estimations parfaite et LS, dont les performances sont mesurées par le taux d'erreur binaire (TEB).

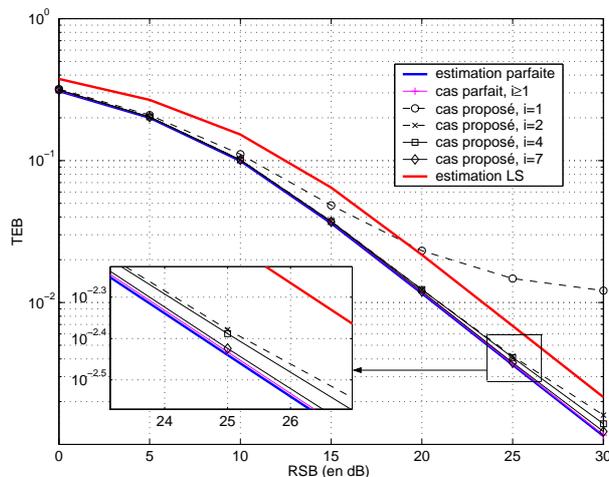


FIGURE 5 – Courbes de TEB pour l'estimation de canal en fonction du RSB.

On remarque que l'écart entre les courbes de la méthode proposée et l'estimation parfaite vaut 0.2 dB pour $i \geq 7$. De plus, la courbe de TEB se superpose avec celle tracée dans le cas parfait. Cela vérifie que si la variance du bruit converge, alors l'algorithme converge, et le fait qu'on atteigne la qualité d'estimation de LMMSE, même sans connaissance a priori ni de la matrice de covariance du canal ni de la variance du bruit.

5 Conclusion

Dans ce papier, une méthode itérative d'estimation conjointe du canal et du RSB a été proposée. Grâce à la seule estimation LS du canal en entrée de l'algorithme proposé, la technique proposée permet d'atteindre quasiment les performances des estimations effectuées dans un cas parfait. De plus, l'algorithme nécessite seulement un symbole OFDM pilote par préambule, ce qui améliore le compromis entre le nombre de pilotes par préambule et les performances atteintes. Les travaux à venir concerneront une possible utilisation de cet algorithme dans le domaine de la détection de bande libre.

Références

- [1] O. Edfors, M. Sandell, J.-J. van de Beek, S. K. Wilson, et P. O. Börjesson, "OFDM Channel Estimation by Singular Value Decomposition," *IEEE Trans. on Communications*, volume 46, numéro 7, pages 931 – 939, July 1998.
- [2] ETSI, "Digital Radio Mondiale (DRM) ;System Specification," ETSI, Rapport Technique ETSI ES 201 980 V 3.1.1, August 2009.
- [3] D. R. Pauluzzi et N. C. Beaulieu, "A Comparison of SNR Estimation Techniques for the AWGN Channel," *IEEE Trans. on Communications*, volume 48, numéro 10, pages 1681 – 1691, October 2000.
- [4] G. Ren, H. Zhang, et Y. Chang, "SNR Estimation Algorithm Based on the Preamble for OFDM Systems in Frequency Selective Channels," *IEEE Transactions on Communications*, volume 57, numéro 8, pages 2230 – 2234, August 2009.
- [5] V. Savaux, Y. Louët, M. Djoko-Kouam, et A. Skrzypczak, "An Iterative and Joint Estimation of SNR and Frequency Selective Channel for OFDM Systems," dans *European Wireless*, Poznan, Poland, 2012.
- [6] H. Xu, G. Wei, et J. Zhu, "A Novel SNR Estimation Algorithm for OFDM," dans *IEEE Vehicular Technology Conference*, May 2005, pages 3068 – 3071.
- [7] X. Xu, Y. Jing, et X. Yu, "Subspace-Based Noise Variance and SNR Estimation for OFDM Systems," dans *IEEE Mobile Radio Applications Wireless Communication Networking Conference*, March 2005, pages 23 – 26.