

Distribution des observables en interférométrie optique polychromatique et impact sur l’ajustement de modèle

Antony SCHUTZ, Martin VANNIER, David MARY, André FERRARI *

Laboratoire J.L.Lagrange, Université de Nice-Sophia Antipolis, CNRS UMR 7293, Observatoire de la Côte d’Azur, Nice, France
prenom.nom@unice.fr

Résumé – L’interférométrie optique polychromatique fournit des observables correspondant au module de la transformée de Fourier (TF) de la scène céleste observée, échantillonnée à des fréquences spatiales déterminées par les positions des télescopes et la longueur d’onde d’observation. Ces observables sont généralement supposées Gaussiennes. Les tests statistiques réalisés dans cette communication ont montré une meilleure adéquation à une loi de Student. Cette distribution est alors utilisée pour l’ajustement d’un modèle de disque sur une étoile synthétique résolue. Les simulations obtenues avec un bruit réel montrent que le modèle de Student apporte une amélioration des performances d’estimation par rapport au modèle Gaussien.

Abstract – Polychromatic optical interferometry provides observables which correspond to the modulus of the Fourier Transform of the celest scene, sampled at frequencies given by the positions of the telescopes and the observation wavelength. These observables are usually assumed normally distributed. Statistical tests prove that a better fit is obtained using a Student t-distribution. This distribution is then used in a model fitting framework applied to synthetic stars. Simulations using a real noise show that the Student model improves the estimation performances w.r.t. the classical Gaussian model.

1. Introduction

La résolution d’un télescope est proportionnelle à l’inverse de son diamètre. Les plus grands d’entre eux ont une taille d’une dizaine de mètres. Les interféromètres optiques ou radio sont, dans une certaine mesure, capables de dépasser cette limite. L’interférométrie consiste à faire interférer un réseau de télescopes par paires ; la résolution est alors proportionnelle à l’inverse de la séparation spatiale de la plus grande paire.

L’interférométrie optique ne conduit pas directement à des images mais à des observables interférométriques. Les *visibilités* V correspondent au module de la transformée de Fourier (TF) de la scène céleste observée, à une fréquence spatiale déterminée par la position de la paire de télescopes. Les *clôtures de phase* sont une relation linéaire entre les phases de trois échantillons complexes de la TF. Compte tenu du faible nombre de télescope, l’échantillonnage de l’espace de Fourier est en général très parcimonieux.

Les grands interféromètres optiques actuels, par exemple l’instrument AMBER [1] installé sur le VLTI, sont équipés de spectrographes qui fournissent des observations multi longueur d’ondes, et donc des informations astrophysiques riches sur les scènes observées. L’aspect multichromatique permet en outre d’augmenter la couverture des fréquences spatiales. Les observations multichromatiques en interférométrie optique étant récentes, les propriétés statistiques de ces observables sont encore mal connues, et ce malgré leur importance pour l’étape de reconstruction d’image [2]. En particulier, les visibilités sont

généralement supposées Gaussiennes [3].

Cette communication présente tout d’abord une analyse statistique de la distribution des visibilités obtenues sur l’instrument AMBER. Les tests réalisés sont clairement en faveur d’une loi de Student.

Dans un second temps, cette distribution est utilisée pour estimer les paramètres d’un objet synthétique entaché de bruit réel ou simulé. Les résultats obtenus montrent clairement un gain par rapport à l’hypothèse Gaussienne généralement admise.

2. Modèle de visibilité et couverture des fréquences spatiales

Chaque paire $\{a, b\}$ de télescopes observant à la longueur d’onde λ , et dont la séparation projetée sur le ciel est nommée base \mathbf{B}_{ab} , fournit une visibilité $|V(\mathbf{B}_{ab}/\lambda)|$ qui est le module de la transformée de Fourier de la distribution d’intensité à la fréquence spatiale \mathbf{B}_{ab}/λ .

Dans le cas de l’utilisation d’un spectrographe, il y a N_λ observations simultanées dans un ensemble de longueurs d’ondes $\lambda_i, i = 1, \dots, N_\lambda$, ce qui pour une paire de télescopes donnée donne N_λ mesures aux fréquences spatiales $\mathbf{B}_{ab}/\lambda_i, i = 1, \dots, N_\lambda$. La figure 1 (a) illustre un échantillonnage réaliste obtenu en interférométrie optique polychromatique dans le plan des fréquences spatiales (u, v) . On peut remarquer que l’échantillonnage des fréquences spatiales y est très parcimonieux. La figure 1 (b) montre les points de visibilité, en fonction de la fréquence radiale pour un objet simple. Chaque mesure à une longueur de base donnée correspond à une longueur d’onde.

La courbe noire représente la courbe de visibilité radiale théorique pour l’objet observé.

* Le travail présenté dans cet article est soutenu par le projet POLCA (ANR-2010-BLAN-0511-02).

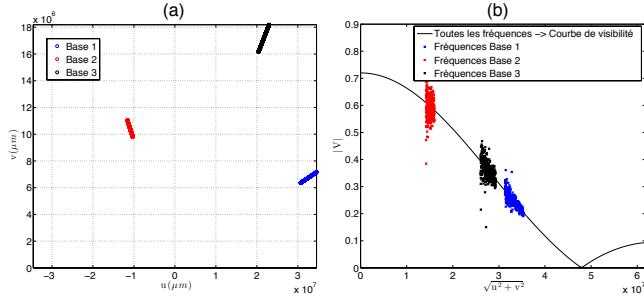


FIGURE 1 – (a) : couverture des fréquences spatiales. (b) visibilités en fonction de la fréquence radiale par base.

3. Analyse statistique des données VLTI/AMBER

L’hypothèse Gaussienne est généralement admise pour les bruits des visibilités en interférométrie optique. Dans le but d’étudier cette hypothèse, différents jeux de données provenant d’observations effectuées au VLTI utilisant l’instrument AMBER ont été analysés [1].

Cet instrument peut, dans certains cas, donner accès à plus de 500 longueurs d’ondes ($N_\lambda = 500$) et utilise 3 paires de télescopes ($N_{\text{Base}} = 3$) simultanément. Pour couvrir une large gamme de cas, trois jeux de données provenant de configurations instrumentales, d’acquisitions et de résolutions différentes sont utilisés.

3.1 Estimation du bruit

La visibilité mesurée V est le produit de deux termes : V_* qui est la visibilité correspondant à l’objet étudié et V_T qui regroupe les termes de perturbations (ou bruits) atmosphériques et instrumentales. Ce terme représente la fonction de transfert globale de l’interféromètre [4, 5]. Il est donc nécessaire pour extraire le bruit V_T de connaître avec précision la visibilité V_* de l’objet observé.

Un calibrateur, objet céleste utilisé pour la calibration d’une observation, est une source ponctuelle (ou quasi ponctuelle) dont la visibilité V_* est bien connue. Ce type d’objet peut être assimilé à un point ou à un disque uniforme pour lequel le spectre est soit plat (source ponctuelle) soit une tâche d’Airy paramétrée par le diamètre de la source.

Après correction de l’influence du diamètre de l’objet V_* , il est également nécessaire de compenser dans V_T une pente résiduelle issue d’effets chromatiques liés à la turbulence atmosphérique. On désignera par V_T^p les visibilités corrigées de l’effet de pente.

3.2 Test statistique

Le test du χ^2 [6] est utilisé, avec une Probabilité de Fausse Alarme (PFA) de 5%, afin de tester différentes distributions des bruits. Quatre lois sont ainsi évaluées : la loi Normale (\mathcal{N}) qui est généralement admise par la communauté [3], la loi Lognormale ($\text{Log } \mathcal{N}$) considérée dans [1], la loi de Cauchy (\mathcal{C}) et la loi de Student (t).

	Spectrale				Temporelle			
	\mathcal{N}	t	$\text{Log } \mathcal{N}$	\mathcal{C}	\mathcal{N}	t	$\text{Log } \mathcal{N}$	\mathcal{C}
UT-MR-NoSF								
V	74	48	81	99	10	3	35	98
V_T^p	20	12	26	100	13	7	30	99
AT-BR-SF								
V	55	12	51	100	10	0	12	18
V_T^p	78	3	51	100	10	0	18	10
AT-BR-SF								
V	12	0	12	15	6	2	13	98
V_T^p	10	0	10	10	14	6	20	98

TABLE 1 – Test du χ^2 pour les trois jeux de données. Pourcentage du taux de rejet pour une PFA de 5%.

Ces deux derniers choix sont motivés par le fait que dans le processus de réduction des données les visibilités sont construites à partir de rapports de variables aléatoires [4]. Si les variables concernées dans le rapport sont Gaussiennes et centrées alors la distribution résultante est une loi de Cauchy [7]. Si ce n’est pas le cas les visibilités suivent une loi de rapport plus générale comme par exemple la loi de Student.

Une autre caractéristique importante de la loi de Student est sa flexibilité liée à la présence du paramètre de forme ν . Ainsi pour $\nu = 1$ elle correspond à une loi de Cauchy et quand $\nu \rightarrow \infty$ elle converge vers une loi Gaussienne.

3.2 Stratégie d’analyse et jeux de données

Lors d’une observation un grand nombre de “trames” successives sont acquises. Afin de disposer d’un grand nombre de données d’analyse les “trames” ne seront pas moyennées temporellement. Deux analyses ont été envisagées :

- Une analyse spectrale (la distribution en longueur d’onde pour une base projetée donnée),
- une analyse temporelle (l’évolution temporelle pour une longueur d’onde donnée).

Les visibilités analysées sont les visibilités (V_T) et les visibilités corrigées de l’effet de pente (V_T^p). Afin de couvrir une large gamme de cas possibles, trois jeux de données de configurations différentes ont été utilisés :

- Les télescopes principaux (UT) en moyenne résolution (MR) sans suiveur de frange (NoSF).
- Les télescopes auxiliaires (AT) en moyenne et basse résolution (MR et BR) avec suiveur de frange (SF).

Les résultats obtenus pour ces configurations, qui représentent une grande partie des cas possibles, sont d’un intérêt certain pour les astronomes.

3.3 Résultats des tests

Les résultats sont moyennés sur l’ensemble des fichiers, des bases ainsi que sur la dimension restante. Les résultats de l’analyse sont résumés dans la table 1. Les valeurs données correspondent au taux de réjections des tests (en %) : un 1 est

compté quand le test rejette la distribution proposée avec une PFA de 5%. Les résultats obtenus sont clairement en faveur de la distribution de Student. La distribution de Cauchy possède le plus haut taux de rejet. Les lois Lognormale et normale ont des résultats similaires, légèrement en faveur de la loi normale.

Contrairement à ce qui est généralement admis les résultats montrent que les observables ne suivent pas une loi Gaussienne mais une loi de rapport de type Student. Compte tenu de la remarque faite sur le processus de réduction dans la section 3.2, il n'est pas surprenant qu'une loi de rapport "flexible" donne de meilleurs résultats.

4. Application à l'ajustement de modèle

4.1 Modèle et estimateur

Nous analysons dans cette section l'impact de la prise en compte d'une loi de Student comparé à une loi Gaussienne pour l'estimation du diamètre d'une étoile résolue. Un tel astre peut, en première approximation, être considéré comme un disque uniforme dans le ciel, en quel cas ses visibilités V_* sont de la forme :

$$V_*(r, a, D) = a \left| 2 \frac{J_1(r D)}{r D} \right| \quad (1)$$

où J_1 est la fonction de Bessel du premier ordre avec $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ la composante radiale des fréquences spatiales (u, v) , D le diamètre angulaire de l'astre et a un facteur d'amplitude. Ces paramètres seront estimés dans la suite par maximum de vraisemblance (sous hypothèse d'indépendance) en supposant le bruit Gaussien ou Student. L'estimateur du maximum de vraisemblance prend donc la forme :

$$\{\hat{a}, \hat{D}, \hat{\xi}\} = \arg \min_{(a, D, \xi) \in \Theta} \left(\sum_{i=1}^N \rho(y_i; V_*(r_i, a, D), \xi) \right) \quad (2)$$

où $\{a, D, \xi\}$ est le jeux de paramètres à estimer sous les contraintes Θ . Le paramètre ξ et la fonctionnelle ρ dépendent de la statistique choisie.

$V_*(r_i, a, D)$ représente la visibilité à la r_i^{eme} fréquence radiale. Notons qu'à chaque mesure de visibilité mesurée sur AMBER est associée une estimation de sa variance σ_i^2 , disponible grâce au format OIFITS [8]. Les variances σ_i^2 sont donc supposées connues. Sous hypothèse de bruit Gaussien :

$$\rho_g(y; V, \sigma) = \ln(\sigma \sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2} \left(\frac{y - V_*(r, a, D)}{\sigma} \right)^2 \quad (3)$$

les paramètres sont $\{a, D\}$. Et sous hypothèse de bruit Student :

$$\rho_s(y; V, \eta, \nu) = -\ln \left(\frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\sqrt{\nu\pi\eta^2} \Gamma(\nu/2)} \right) + \frac{\nu + 1}{2} \ln \left(1 + \frac{(y - V_*(r, a, D))^2}{\nu\eta^2} \right) \quad (4)$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler et ν le paramètre de forme. Les paramètres sont $\{a, D, \nu\}$. Le paramètre de forme ν est contraint à $\nu > 2$ pour garantir une variance finie $\sigma^2 = (\nu/$

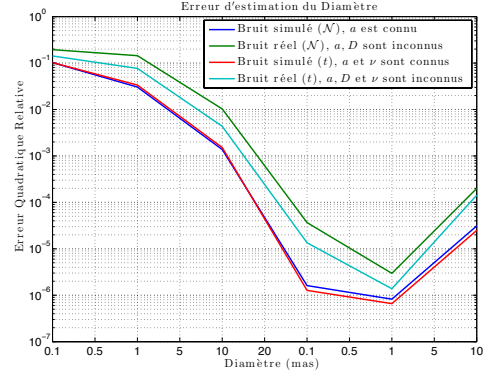


FIGURE 2 – Erreur quadratique moyenne relative pour l'estimation du diamètre.

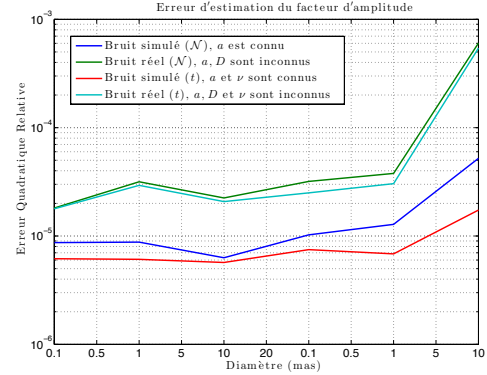


FIGURE 3 – Erreur quadratique moyenne relative pour l'estimation du facteur d'amplitude.

$(\nu - 2))\eta^2$. La variance σ^2 étant supposée connue, $\nu\eta^2$ est donc remplacé par $(\nu - 2)\sigma^2$ dans (4). Enfin, les paramètres a et D sont estimés sous contrainte de positivité.

La mesure est composée de $N = N_\lambda \times N_{\text{Base}}$ échantillons. Suivant la statistique envisagée il y aura 2 à 3 paramètres à estimer. L'optimisation du critère à minimiser (2) est réalisée par un algorithme à régions de confiances utilisant les expressions analytiques du gradient et de l'Hessien du critère [9].

Il est important de souligner que des algorithmes sont disponibles dans le cas Gaussien [10]. Cependant, l'objectif de ces simulations étant d'analyser les effets du modèle statistique et non de l'algorithme d'optimisation, l'optimisation dans le cas Gaussien et student a été réalisée avec le même algorithme.

4.2 Simulations avec des bruits réels et synthétiques

Les simulations ont été réalisées en utilisant 6 objets différents avec les diamètres [0.1, 0.5, 1, 5, 10, 20] milli seconde d'arc (mas), dont les visibilités sont données en (1). Ces diamètres sont réalistes pour la configuration interférométrique utilisée.

- Deux jeux de données ont été utilisés pour les simulations.
- Un premier jeu de données a été obtenu en bruitant les visibilités synthétiques avec les 500 réalisations de bruit réel utilisé dans la section 3. Dans ce cas les paramètres estimés sont (a, D) dans le cas du modèle Gaussien et

(a, D, ν) pour le modèle Student.

- Un second jeu de données a été obtenu en utilisant 500 réalisations d’un bruit synthétique de distribution Gaussienne ou Student. Le paramètre de forme est supposé connu et un seul paramètre (a ou D) est estimé à la fois : le facteur d’amplitude sera connu pour l’estimation du diamètre et vice versa. Soulignons que dans ce cas les variances σ_i^2 sont exactes, contrairement au cas des signaux réels. Cette configuration particulièrement favorable conduit à des performances “limites” de référence des estimateurs.

Les erreurs quadratiques moyennes relatives, estimées à partir des 500 réalisations de bruit, sont présentées dans la figure 2 pour le diamètre et dans la figure 3 pour l’amplitude.

- Pour l’estimation d’un seul paramètre dans le cas du bruit synthétique on constate que : pour l’estimation du diamètre (Fig. 2 courbes bleue et rouge) les deux statistiques sont équivalentes. Pour l’ajustement du facteur d’amplitude (Fig. 3 courbes bleu et rouge) l’estimation est légèrement meilleure pour la loi de Student. Ces courbes donnent bien des performances d’estimation limite.
- Dans le cas d’un bruit réel, et donc pour l’estimation de 2 paramètres sous hypothèse Gaussienne et 3 sous hypothèse Student, les résultats montrent que l’erreur d’estimation de D est significativement plus faible pour la loi de Student (Fig. 2 courbes turquoise et vert) et sont équivalentes pour le facteur d’amplitude (Fig. 3 courbes turquoise et vert)

Il convient de noter que la configuration instrumentale conditionne également le résultat mais ce fait dépasse le cadre du travail exposé ici. Par ailleurs, le gain obtenu par la loi de Student s’explique aussi assez naturellement par le fait que ses queues de distribution, plus lourdes que celles d’une Gaussienne, sont plus adaptées pour modéliser les points “aberrants” présents dans les données. Pour les mêmes raisons la loi de Student est déjà considérée en économie comme une alternative à la loi normale [11] et est connue pour donner des estimations plus robustes.

4.3 Estimation du diamètre d’un calibrateur

Les mêmes algorithmes ont été appliqués sur des observations réelles obtenues sur l’instrument interférométrique AMBER du VLTI. La source mesurée, HD 92449, est un calibrateur, dont le diamètre théorique, estimé par des observations antérieures, est de 1.914 ± 0.351 mas. Les observations acquises sur cet objet (3 au cours de la nuit) ont elles-mêmes été étalonnées par une autre source de calibration (HD 90853) dont le diamètre théorique est estimé avec une erreur de ± 0.168 mas.

Les diamètres estimés à partir de chaque jeu de données sont présentés dans la table 2 pour les deux distributions. Ces résultats sont comparés aux diamètres estimés par un algorithme de référence pour l’ajustement de données interférométriques, LITpro [10], basé sur un critère Gaussien. La même observable est utilisée pour les trois algorithmes.

Les résultats obtenus sur chaque jeu de données ont moins de dispersion en utilisant le critère de Student, et demeurent dans la marge d’erreur associée au diamètre du calibrateur. Ces résultats

Fichier	\mathcal{N}	t	LITpro
1	1.384	2.145	2.05
2	1.798	2.231	1.658
3	1.567	2.2	1.931

TABLE 2 – Estimation du diamètre d’un calibrateur : HD-92449. Diamètre “connu” : 1.914 ± 0.351 (mas).

peuvent néanmoins suggérer l’existence d’un léger biais. Ce point nécessite une étude approfondie utilisant un plus grand nombre de données.

5. Conclusion

Les visibilités, une grandeur utilisée en interférométrie polychromatique, ont été analysées statistiquement. Bien qu’il soit admis que cette grandeur suive une distribution Gaussienne, les tests statistiques d’ajustement de distribution sur des données réelles s’avèrent être en faveur d’une loi de rapport de type Student. Compte tenu de ce résultat, une comparaison des résultats d’ajustement obtenus pour déterminer le diamètre d’une source avec un terme d’attache aux données suivant une loi Gaussienne et une loi de Student a été réalisée. Les résultats ont mis en évidence une amélioration sensible en utilisant une loi de Student.

Références

- [1] F. Millour et al. *AMBER on the VLTI : Data Processing and Calibration Issues*, The 2007 ESO Instrument Calibration Workshop, pp. 461–470, Jan. 2007.
- [2] E. Thiébaud et J.-F. Giovannelli. *Image reconstruction in optical interferometry*, IEEE Signal Processing Magazine, vol. 27, no. 1, pp. 97–109, Jan. 2010.
- [3] S. Meimon *Reconstruction d’images astronomiques en interférométrie optique*, Thèse de doctorat, 2005
- [4] E. Tatulli et al. *Interferometric data reduction with AMBER/VLTI. Principle, estimators, and illustration*, A&A, vol. 464, no. 1, pp. 29–42, 2007.
- [5] F. Malbet et al. *The third version of the AMBER data reduction software*, Proc. SPIE 7734, Optical and Infrared Interferometry II, 77344C (August 02, 2010)
- [6] E.L. Lehmann, J.P. Romano. *Testing statistical hypotheses*, Springer Texts in Statistics Springer, New York, Third edition, (2005)
- [7] G. Marsaglia *Ratios of normal variables and ratios of sums of uniform variables*, Journal of the American Statistical Association , Vol. 60, No. 309 (Mar., 1965), pp. 193-204
- [8] T.A. Pauls et al. *A Data Exchange Standard for Optical (Visible/IR) Interferometry*, The Publications of the Astronomical Society of the Pacific, Volume 117, Issue 837, pp. 1255-1262.
- [9] J.J. Moré et al. *Computing a Trust Region Step*, SIAM J. Sci. and Stat. Comput., 4(3), pp. 553–572, 1983.
- [10] Tallon-Bosc et al. *LITpro : a model fitting software for optical interferometry*, Proceedings of SPIE Conference, Volume 7013, pp. 70131J-1, 70131J-9, 2008.
- [11] K. Lange et al. *Robust statistical modeling using the t distribution*, Journal of the American Statistical Association , Vol. 84, No. 408 (Dec., 1989), pp. 881-896