

Quantification de la robustesse de la super-résolution par minimisation L1

Yann TRAONMILIN, Saïd LADJAL, Andrés ALMANSA

CNRS LTCI Telecom Paristech
46, rue Barrault 75013 PARIS

{yann.traonmilin, said.ladjal, andres.almansa} at telecom-paristech.fr

Résumé – Cet article étudie la robustesse aux bruits de type outlier dans le cadre de la super-résolution. On utilise l'équivalence entre reconstruction parcimonieuse et robustesse aux outliers pointée par Candès et Tao. Elle permet de déduire des bornes sur le nombre d'images acquises en fonction de la quantité d'outliers qui garantissent une reconstruction parfaite par minimisation L1.

Abstract – In this article, we study outlier robustness properties of the L1-norm super-resolution. We recall the equivalence between sparse recovery property and robustness from Candès and Tao. We deduce bounds on the number of captured images with respect to the number of outliers which guarantee perfect reconstruction with L1 minimization.

1 Introduction

L'objectif de la super-résolution (SR) est de retrouver une image haute résolution à partir de versions de basse résolution (BR) de celle-ci. Ce sujet est couvert par une vaste littérature qui a été revue à plusieurs reprises [1, 2]. On retient que l'approche variationnelle est la plus utilisée pour résoudre le problème de super-résolution.

Classiquement, cela consiste à minimiser une fonctionnelle comprenant une attache aux données et une régularisation déduite d'un modèle a priori. La norme L^2 est la plus fréquemment choisie pour l'attache aux données. Plus récemment, la minimisation L^1 a été utilisée pour débruiter des images contaminées par des outliers (données aberrantes) [3]. Il a été montré qu'elle permettait une robustesse aux outliers dans le cadre de la super-résolution [4, 5]. Seulement, une régularisation est généralement ajoutée à l'attache aux données, ce qui revient à faire une hypothèse sur la régularité de l'image. Dans [6], on montre que lorsque le nombre d'images BR est suffisant, il est probable que la régularisation devienne inutile, mais ce résultat s'applique mal au cas d'outliers non bornés en amplitude.

Candès and Tao [7] ont montré que la robustesse aux outliers par minimisation L^1 est équivalente au problème de reconstruction parcimonieuse et [8] donne une caractérisation de cette capacité de reconstruction parcimonieuse (*Null Space Property* NSP). Les détails de cette équivalence sont décrits dans [9]

Dans cet article, on montre en utilisant ces propriétés qu'une reconstruction parfaite par super-résolution L^1 peut être possible lorsque les données sont contaminées par des outliers. On obtient la garantie d'une reconstruction parfaite lorsque le nombre d'images BR est suffisant.

2 Modèle variationnel pour la super résolution

Les images BR, que nous concaténons en un seul vecteur w pour simplifier les notations, sont générées par une application linéaire A à partir d'une image de haute résolution u_0 et d'un bruit n :

$$w = Au_0 + n. \quad (1)$$

A inclut un mouvement ainsi qu'un sous échantillonnage pour chaque image BR et s'écrit :

$$A : \mathbb{R}^{ML \times ML} \rightarrow (\mathbb{R}^{L \times L})^N \\ u \rightarrow (A_i u)_{i=1, N} = (SQ_i u)_{i=1, N} \quad (2)$$

où M est le facteur de sous-échantillonnage, N est le nombre d'images BR, $L \times L$ est la taille des images BR, u est une image HR de taille $ML \times ML$, les A_i sont les applications linéaires qui génèrent les images BR, S est l'opérateur de sous-échantillonnage d'un facteur M et les Q_i sont des mouvements affines aléatoires qui affectent chaque image. Elle est presque sûrement injective lorsque N est supérieur à M^2 (ce que l'on suppose vérifié pour la suite) [6]. La minimisation de l'attache aux données L^2 permet d'avoir un bruit de reconstruction borné lorsque le bruit d'acquisition n est borné. Dans le cas d'un bruit de type outlier, on écrit la minimisation L^1 :

$$\operatorname{argmin}_u \|Au - w\|_1 \quad (3)$$

avec $w = Au_0 + n_0$. On cherche des conditions sur A pour s'assurer que u_0 est l'unique solution de (3) lorsque n_0 est de la forme $n_0 = n.T$ avec T un vecteur de 0 et 1 représentant un support (le \cdot est le produit coordonnée à coordonnée). Pour cela, on définit la notion de matrice pardonnante :

Définition 2.1. Matrice pardonnante Soit \mathcal{T} un ensemble de supports dans \mathbb{R}^p ($\mathcal{T} \subset \{0, 1\}^p$). A est \mathcal{T} -pardonnante si pour tout $T \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{R}^p$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$, on a :

$$u_0 = \arg\min_u \|Au - (Au_0 + n.T)\|_1 \quad (4)$$

et u_0 est l'unique minimiseur.

Lorsque le support des outliers est de cardinal K , il est montré dans [7] que le pardon est équivalent à la capacité de reconstruction parcimonieuse des matrices B dont le noyau est l'image de A ($BA = 0$). D'autre part, [8] montre que la capacité de reconstruction parcimonieuse est équivalente à une propriété de non concentration du noyau (la NSP). Lorsque l'on combine ces deux équivalences, on obtient que A est pardonnante pour les outliers de cardinal K si et seulement si l'espace image de A vérifie la propriété de non concentration (on dit alors que A pardonne K outliers). Ce résultat peut s'étendre à des ensembles de supports quelconques \mathcal{T} [9]. La super résolution L^1 est robuste aux outliers de support dans \mathcal{T} si et seulement si $\text{Im}A$ vérifie la propriété suivante :

Définition 2.2. Propriété de non concentration (PNC) Soient \mathcal{T} un ensemble de supports de \mathbb{R}^p et V un sous espace de \mathbb{R}^p . V a la propriété de non concentration pour \mathcal{T} si pour tout $v \in V \setminus \{0\}$ et $T \in \mathcal{T}$:

$$\|v.T\|_1 < \|v.T^c\|_1 \quad (5)$$

où T^c est le complément du support T .

Cette propriété permet de faire des hypothèses différentes sur le support du bruit en considérant des ensembles \mathcal{T} particuliers.

3 Conditions de reconstruction parfaite en présence d'outliers

3.1 Condition suffisante pour le K -pardon

La PNC permet de trouver des conditions suffisantes de reconstruction sur le nombre d'images BR lorsque K outliers contaminent les données. Ces conditions font intervenir le conditionnement de A .

Définition 3.1. Conditionnement Le conditionnement L^p d'un opérateur A est défini par :

$$\kappa_{A,p} = \frac{\sup_{\|u\|_p=1} \|Au\|_p}{\inf_{\|u\|_p=1} \|Au\|_p} \quad (6)$$

En utilisant la PNC, on montre la propriété suivante.

Proposition 3.1. Soit A une matrice de super résolution. Soit $\kappa_{A_{T^c},1}^m$, le conditionnement L^1 maximum des A_{T^c} (les A dont les lignes sont restreintes à T^c). Supposons :

$$N > K(M^2 \kappa_{A_{T^c},1}^m + \frac{1}{L^2}) \quad (7)$$

Alors A est K -pardonnante.

Démonstration. Soit T un support de cardinal K . On cherche une condition suffisante pour que

$$\frac{\|A_T u\|_1}{\|A_{T^c} u\|_1} < 1 \quad (8)$$

soit vrai pour tous les supports T de taille K . On commence par borner la norme d'opérateur L^1 de A_T (A restreint à T). Soient a_i les lignes de A :

$$\frac{\|A_T u\|_1}{\|u\|_1} = \frac{\sum_{i \in T} |a_i, u\rangle|}{\|u\|_1} \leq \frac{\sum_{i \in T} \sum_j |a_{i,j} u_j|}{\|u\|_1} \quad (9)$$

On a $|a_{i,j}| \leq 1$ car tous les coefficients de A sont des échantillons d'un sinus cardinal. En conséquence :

$$\frac{\|A_T u\|_1}{\|u\|_1} \leq \frac{\sum_{i \in T} \sum_j |u_j|}{\|u\|_1} \leq K \quad (10)$$

Ensuite on borne le rapport $\frac{\|A_T u\|_1}{\|A_{T^c} u\|_1}$. On utilise le conditionnement L^1 de A_{T^c} , noté $\kappa_{A_{T^c},1}$. On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\|A_T u\|_1}{\|A_{T^c} u\|_1} &\leq \frac{K \|u\|_1}{\|A_{T^c} u\|_1} \\ &\leq K \left(\inf \frac{\|A_{T^c} u\|_1}{\|u\|_1} \right)^{-1} \\ &\leq K \frac{\kappa_{A_{T^c},1}}{\|A_{T^c}\|_1} \end{aligned} \quad (11)$$

On utilise le fait que la norme d'opérateur L^1 de $\|A_{T^c}\|_1$ peut être bornée inférieurement par des valeurs particulières. On remarque que l'opérateur SR transforme les images HR constantes en images BR constantes ayant la même intensité. En conséquence, $\|A_{T^c}\|_1 \geq (NL^2 - K)/(ML)^2$ et :

$$\frac{\|A_T u\|_1}{\|A_{T^c} u\|_1} \leq K(ML)^2 \frac{\kappa_{A_{T^c},1}}{NL^2 - K} \quad (12)$$

On en déduit la proposition. \square

Grâce à l'équivalence entre propriété de reconstruction parcimonieuse et pardon, on peut utiliser la *Restricted Isometry Property* (RIP, [7]) pour trouver une condition suffisante de K -pardon en utilisant des normes L^2 . On rappelle la définition de la RIP.

Définition 3.2. Restricted Isometry Property B a la restricted isometry property d'ordre J avec constante $\delta \in]0, 1[$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^{N(L \times L)}$ et pour tout support T tel que $|T| = J$

$$(1 - \delta) \|x.T\|_2 \leq \|B(x.T)\|_2 \leq (1 + \delta) \|x.T\|_2 \quad (13)$$

Montrer la RIP d'ordre $J = K + K'$ avec constante $\delta < \frac{\sqrt{K'} - \sqrt{K}}{\sqrt{K'} + \sqrt{K}}$ pour B donne la capacité de reconstruction parcimonieuse à B pour les supports de taille K (Voir [10]). En conséquence, si $\ker B = \text{Im}A$ a la PNC alors A est K -pardonnante.

Proposition 3.2. Si pour tout T de cardinal J :

$$\frac{\|A(A^H A)^{-1} A^H(x.T)\|_2}{\|x.T\|_2} \leq \sqrt{\delta} \quad (14)$$

alors il existe B ayant la RIP d'ordre J et constante δ telle que $\ker B = \text{Im}A$.

Démonstration. Etant donné une matrice A , on définit B comme la projection orthogonale sur $(\text{Im}A)^\perp$: $B = P_{(\text{Im}A)^\perp} = I - A(A^H A)^{-1} A^H$. On réexprime l'équation (13) en fonction de A . On commence par l'élever au carré :

$$(1 - \delta)^2 \|x.T\|_2^2 \leq \|B(x.T)\|_2^2 \leq (1 + \delta)^2 \|x.T\|_2^2. \quad (15)$$

D'après le théorème de Pythagore,

$$\|x.T\|_2^2 = \|A(A^H A)^{-1} A^H(x.T)\|_2^2 + \|B(x.T)\|_2^2 \quad (16)$$

On obtient en remplaçant dans l'équation (15) :

$$(1 - \delta)^2 \leq 1 - \frac{\|A(A^H A)^{-1} A^H(x.T)\|_2}{\|x.T\|_2} \leq (1 + \delta)^2 \quad (17)$$

On en déduit que si pour tout T de cardinal J :

$$\frac{\|A(A^H A)^{-1} A^H(x.T)\|_2}{\|x.T\|_2} \leq \sqrt{\delta} \quad (18)$$

alors B a la RIP d'ordre J et constante δ . \square

Proposition 3.3. *Supposons*

$$N > M^2 C_1^{-1} K \kappa_{A,2}^4 \quad (19)$$

où $C_1 = 0.0670$. Alors A est K -pardonnante.

Démonstration. On montre d'abord que $\|A_T^H\|_2 = \|A_T\|_2 \leq \sqrt{J}$. En utilisant Cauchy-Schwarz :

$$\frac{\|A_T u\|_2^2}{\|u\|_2^2} = \frac{\sum_{i \in T} | \langle a_i, u \rangle |^2}{\|u\|_2^2} \leq \frac{\sum_{i \in T} \|a_i\|_2^2 \|u\|_2^2}{\|u\|_2^2}. \quad (20)$$

On a $\|a_i\|_2 \leq 1$ car ce sont des sinus cardinaux. En conséquence :

$$\frac{\|A_T u\|_2}{\|u\|_2} \leq \sqrt{K} \quad (21)$$

On borne maintenant le ratio :

$$\begin{aligned} \frac{\|A(A^H A)^{-1} A^H(x.T)\|_2}{\|x.T\|_2} &\leq \sigma_{max} \frac{\|(A^H A)^{-1} A^H(x.T)\|_2}{\|x.T\|_2} \\ &\leq \sigma_{max} \sigma_{min}^{-2} \|A_T^H\|_2 \\ &\leq \frac{\kappa_{A,2}^2 \sqrt{J}}{\sigma_{max}} \end{aligned} \quad (22)$$

où σ_{\min} sont les valeurs extrêmes des valeurs singulières de A . En remplaçant avec une valeur admissible de δ , on trouve la condition :

$$\frac{\kappa_{A,2}^4 (K + K')}{\sigma_{max}^2} \leq \frac{\sqrt{K'} - \sqrt{K}}{\sqrt{K} + \sqrt{K'}}. \quad (23)$$

On prend $K' = 3K$ (que l'on a trouvé optimal pour la constante C_1). On obtient alors la condition :

$$\frac{\kappa_{A,2}^4}{\sigma_{max}^2} \leq \frac{C_1}{\sqrt{K}} \quad (24)$$

$\sigma_{max} \geq \frac{\|A u\|_2}{\|u\|_2}$ car σ_{max} est la norme d'opérateur de A . On prend pour u une image constante, ce qui donne : $\sigma_{max} \geq \sqrt{N/M^2}$. Finalement la condition devient,

$$N > M^2 C_1^{-1} K \kappa_{A,2}^4 \quad (25)$$

\square

Dans [11, 6], il est montré que le conditionnement $\kappa_{A,2}$ tend vers 1 pour un grand nombre d'images avec un mouvement aléatoire. On peut de plus montrer que l'on ne peut pas avoir de borne meilleure que linéaire en fonction du nombre d'outliers en exhibant un cas particulier [9].

3.2 Etude d'une structure d'outlier particulière

Ici, on illustre les bénéfices de pouvoir choisir une structure d'outlier particulière. Soit \mathcal{T} l'ensemble des supports qui contaminent au plus N_c images BR. De la même façon que précédemment, on essaie de trouver une condition suffisante pour la NCP avec $T \in \mathcal{T}$. Cette structure, permet d'avoir $K = N_c L^2$ outliers tant qu'ils ne contaminent pas plus de N_c images. Soit \mathcal{S} l'ensemble des indices des images BR contaminées ($|\mathcal{S}| = N_c$). On montre la proposition suivante :

Proposition 3.4. *Une condition suffisante de \mathcal{T} -pardon est*

$$N_c C_2 C_3 \|(A_{T^c}^H A_{T^c})^{-1}\|_1 < 1 \quad (26)$$

avec C_2, C_3 des constantes qui dépendent de la taille des images.

Démonstration. On commence par borner plus strictement la norme d'opérateur.

$$\begin{aligned} \frac{\|A_T u\|_1}{\|u\|_1} &\leq \sum_{i \in \mathcal{S}} \|A_i\|_1 \\ &\leq \sum_{i \in \mathcal{S}} \|S Q_i\|_1 \\ &\leq C_2 N_c \end{aligned} \quad (27)$$

où C_2 est une borne supérieure pour $\|A_i\|_1$. C_2 est la norme L^1 maximale qu'une colonne de A_i peut atteindre. En utilisant cette borne, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\|A_T u\|_1}{\|A_{T^c} u\|_1} &\leq \frac{\|A_T u\|_1 \|u\|_1}{\|u\|_1 \|A_{T^c} u\|_1} \\ &\leq \frac{\|u\|_1 C_2 N_c}{\|A_{T^c} u\|_1}. \end{aligned} \quad (28)$$

On introduit la pseudo-inverse $A_{T^c}^\dagger = (A_{T^c}^H A_{T^c})^{-1} A_{T^c}^H$ (on rappelle que A_{T^c} est de rang plein presque sûrement si $N - N_c > M^2$) :

$$\begin{aligned} \sup_u \frac{\|u\|_1}{\|A_{T^c} u\|_1} &= \sup_{v \in \text{Im} A_{T^c}} \frac{\|A_{T^c}^\dagger v\|_1}{\|v\|_1} \\ &\leq \|(A_{T^c}^H A_{T^c})^{-1}\|_1 \sup_{v \in \text{Im} A_{T^c}} \frac{\|A_{T^c}^H v\|_1}{\|v\|_1} \\ &\leq \|(A_{T^c}^H A_{T^c})^{-1}\|_1 C_3 \end{aligned} \quad (29)$$

où C_3 est le maximum de la norme L^1 des colonnes de $Q_i^H S^H$ (ou des ligne des A_i). Pour des signaux 1D, la norme L^1 des *sinc* est grossièrement bornée par le logarithme de la taille de son support. \square

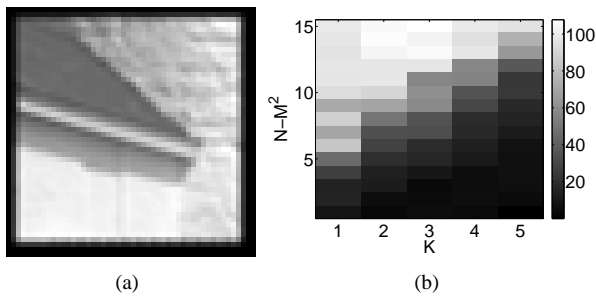


FIGURE 1 – Robustesse aux outliers (a) image HR utilisée pour toutes les expériences (b) 10% centile du PSNR (en dB) en fonction du nombre d’images contaminées K et du nombre d’images $N - M^2$

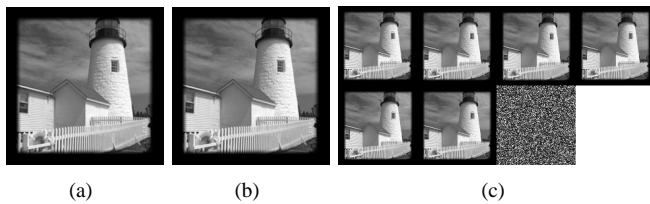


FIGURE 2 – interpolation SR L^1 pour $M = 2$ and $N = 7$ avec une image contaminée (a) image HR (b) image reconstruite (c) images BR (outliers sur la dernière image)

Le terme $\|(A_{T_c}^H A_{T_c})^{-1}\|_1$ ne peut pas être borné sans hypothèse sur les mouvements. On sait qu’en moyenne $(A_{T_c}^H A_{T_c})^{-1} \sim \frac{1}{N} I$ [6] lorsque le support T est fixé et $N \rightarrow \infty$. De plus on peut estimer numériquement les constantes. Asymptotiquement, la contrainte devient $N_c < C_4 N$ (pour $R = 200$, on a $C_4 = 60$). Ce qui est bien mieux que le résultat précédent (l’équation (19)) ou la constante aurait valu 97000 pour $R = 200$. La constante C_4 reste grande pour des cas pratiques, mais on sait qu’elle ne peut être inférieure à 2 [9]. On a utilisé un algorithme de moindres carrés itératif pondéré pour minimiser la norme L^1 [10, 9]. La Figure 1 montre une évaluation expérimentale du nombre d’images nécessaires pour une reconstruction parfaite lorsque K images sont contaminées. Pour chaque K, N , on calcule le PSNR (*peak signal-to-noise ratio*, le rapport signal sur bruit en decibels normalisé par l’amplitude maximale de la référence) pour le résultat de 30 expériences avec différents mouvements. On montre le 10-ème centile (90% des reconstructions ont un meilleur PSNR). Dans la Figure 2, on insère une image LR composée de la valeur absolue d’un bruit gaussien de variance 125 (les pixels ont des valeurs dans $[0, 255]$). Dans ce cas, 6 images non bruitées de plus donnent une reconstruction parfaite de l’image de haute résolution.

4 Conclusion

On a étudié les capacités de rejet d’outliers de la super résolution L^1 de manière théorique. On a montré que si le ratio

images non bruitées / images bruitées est suffisamment grand, on peut garantir la reconstruction parfaite. On a donné des bornes théoriques pour assurer cette reconstruction parfaite. En pratique, moins d’images semblent nécessaires pour l’obtenir.

Références

- [1] S. Farsiu, D. Robinson, M. Elad, and P. Milanfar, “Advances and challenges in super-resolution,” *Int. J. Imaging Syst. Technol.*, vol. 14, no. 2, pp. 47–57, 2004.
- [2] J. Tian and K.-K. Ma, “A survey on super-resolution imaging,” *Signal, Image and Video Processing*, vol. 5, pp. 329–342, Sept. 2011.
- [3] M. Nikolova, “A Variational Approach to Remove Outliers and Impulse Noise,” vol. 20, no. 1-2, pp. 99–120, 2004.
- [4] S. Farsiu, M. D. Robinson, M. Elad, and P. Milanfar, “Fast and robust multiframe super resolution,” *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 13, pp. 1327–1344, Oct. 2004.
- [5] K.-H. Yap, Y. He, Y. Tian, and L.-P. Chau, “A Nonlinear -Norm Approach for Joint Image Registration and Super-Resolution,” *Signal Processing Letters, IEEE*, vol. 16, pp. 981–984, Nov. 2009.
- [6] Y. Traonmilin, S. Ladjal, and A. Almansa, “On the amount of regularization for Super-Resolution interpolation,” in *20th European Signal Processing Conference 2012 (EUSIPCO 2012)*, (Bucharest, Romania), Aug. 2012.
- [7] E. J. Candes and T. Tao, “Decoding by linear programming,” *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 51, pp. 4203–4215, Dec. 2005.
- [8] A. Cohen, W. Dahmen, and R. DeVore, “Compressed sensing and best k-term approximation,” *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 22, no. 1, 2009.
- [9] Y. Traonmilin, S. Ladjal, and A. Almansa, “Outlier Removal Power of the L1-Norm Super-Resolution,” in *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, vol. 7893 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 198–209, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [10] I. Daubechies, R. DeVore, M. Fornasier, and C. S. Güntürk, “Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery,” *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 63, no. 1, pp. 1–38, 2010.
- [11] F. Champagnat, G. Le Besnerais, and C. Kulcsár, “Statistical performance modeling for superresolution : a discrete data-continuous reconstruction framework,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 26, pp. 1730–1746, July 2009.