Géométrie de l'Information et structures géométriques de la métrique de Fisher: métrique hessienne de Jean-Louis Koszul, métrique quantique de Roger Balian et métrique symplectique de Jean-Marie Souriau

FREDERIC BARBARESCO[1]

[1] THALES AIR SYSTEMS, Advanced Radar Concepts Department
Voie Pierre-Gilles de Gennes, 91470 Limours, France

[1]frederic.barbaresco@thalesgroup.com

Résumé – Maurice Fréchet a introduit en 1939, la borne inférieure de la variance de tout estimateur statistique, donnée par l'inverse de la matrice de Fisher, cette dernière définissant la métrique de la « Géométrie de l'Information ». Le mathématicien Jean-Louis Koszul a montré que cette métrique pouvait être définie de façon plus générale comme le hessien de l'Entropie (transformée de Legendre du logarithme de la fonction caractéristique). De façon analogue, le physicien Roger Balian a élaboré une métrique de Fisher quantique comme le hessien de l'Entropie de von Neumann. Enfin, le physicien Jean-Marie Souriau a donné une nouvelle version covariante de cette métrique de Fisher pour les groupes dynamiques, où elle apparaît comme une capacité thermique géométrique via le cocycle symplectique lié au groupe et une température géométrique.

Abstract - Maurice Fréchet introduced in 1939, the lower bound of any statistical estimator variance, given by the inverse of the Fisher matrix, the latter defining the "Information Geometry" metric. The mathematician Jean-Louis Koszul showed that this metric could be defined in a more general way as the hessian of the Entropy (Legendre transform of the characteristic function logarithm). In a similar way, the physicist Roger Balian developed a quantum Fisher metric as the hessian of the von Neumann Entropy. Finally, the physicist, Jean-Marie Souriau gave a new covariant version of this Fisher metric for the dynamic groups, where it appears as a geometrical heat capacity, via the symplectic cocycle linked to the group and a geometrical temperature.

1 Préambule

Nous allons exposer la définition de Koszul de la métrique de Fisher comme une métrique hessienne. Cette définition sera étendue dans le domaine quantique selon la définition de Balian. Nous conclurons avec une définition générale donnée par Souriau dans un cadre élargi faisant intervenir la géométrie symplectique.

2 Métrique hessienne de Fisher-Koszul

Jean-Louis Koszul [1,2,3,4] a introduit une métrique hessienne affinement invariante sur un cône convexe saillant Ω dans un espace vectoriel E, via la fonction caractéristique ψ.

Définition de la fonction caractéristique de Koszul: *Soit* $d\xi$ *la mesure de Lebesque sur* E^*, *l'intégrale suivante:*

$$\psi_\Omega(x)=\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi,x\rangle}d\xi \quad \forall x\in\Omega \tag{1}$$

avec Ω^* *le cône dual, est une fonction analytique sur* Ω, *avec* $\psi_\Omega(x)\in\left]0,+\infty\right[$, *appelée* ***fonction caractéristique*** *du cône* Ω.

Cette fonction possède les propriétés suivantes:

- Si $g\in Aut(\Omega)$ alors $\psi_\Omega(gx)=\left|\det g\right|^{-1}\psi_\Omega(x)$ (2)
- ψ_Ω est logarithmiquement strictement convexe ($\phi_\Omega(x)=\log(\psi_\Omega(x))$ est strictement convexe)

Koszul a alors introduit une 1-forme et une 2-forme:

1-forme de Koszul $\boldsymbol{\alpha}$: *La 1-forme différentielle*

$$\alpha=d\phi_\Omega=d\log\psi_\Omega=d\psi_\Omega/\psi_\Omega \tag{3}$$

est invariante par tous les automorphismes $G=Aut(\Omega)$ *de* Ω. *Si* $x\in\Omega$ *et* $u\in E$ *alors:*

$$\langle\alpha_x,u\rangle=-\int_{\Omega^*}\langle\xi,u\rangle.e^{-\langle\xi,x\rangle}d\xi \text{ et } \alpha_x\in-\Omega^* \tag{4}$$

et une 2-forme:

2-forme de Koszul $\boldsymbol{\beta}$: *La 2-forme différentielle symétrique*

$$\beta=D\alpha=d^2\log\psi_\Omega \tag{5}$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, *invariante par* $G=Aut(\Omega)$. $D\alpha>0$

On peut alors introduire la métrique de Koszul suivante:

Métrique de Koszul: $D\alpha$ *définit une structure Riemannienne invariante par* $Aut(\Omega)$, *de métrique Riemannienne* $g=d^2\log\psi_\Omega$ (7)

$$\left(d^2\log\psi(x)\right)(u)=\frac{1}{\psi(u)^2}\left[\int_{\Omega^*}F(\xi)^2d\xi.\int_{\Omega^*}G(\xi)^2d\xi-\left(\int_{\Omega^*}F(\xi).G(\xi)d\xi\right)^2\right]>0$$

with $F(\xi)=e^{-\frac{1}{2}\langle x,\xi\rangle}$ and $G(\xi)=e^{-\frac{1}{2}\langle x,\xi\rangle}\langle u,\xi\rangle$

La positivité est donnée par l'inégalité de Schwarz, et

$$d^2 \log \psi_\Omega(u,v) = \int_{\Omega^*} \langle \xi, u\rangle \langle \xi, v\rangle e^{-\langle \xi, u\rangle} d\xi \tag{8}$$

Un difféomorphisme définit les coordonnées duales:

$$x^* = -\alpha_x = -d \log \psi_\Omega(x) \tag{9}$$

$$x^* = \int_{\Omega^*} \xi . e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi$$

$$\langle -x^*, h\rangle = d_h \log \psi_\Omega(x) = -\int_{\Omega^*} \langle \xi, h\rangle e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi \tag{10}$$

En posant $\Phi(x) = -\log \psi_\Omega(x)$, Gromov a remarqué que l'application $\Phi \mapsto M(\Phi) = \int_\Omega \det(Hess(\Phi(x))).dx$ obéit à l'inégalité de Brunn-Minkowsky :

$$[M(\Phi_1 + \Phi_2)]^{1/n} \geq [M(\Phi_1)]^{1/n} + [M(\Phi_2)]^{1/n} \tag{11}$$

Si on calcule la transformée de Legendre de $\Phi(x)$:

$$\Phi^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle - \Phi(x) \text{ avec } x^* = D_x\Phi \text{ et } x = D_{x^*}\Phi^* \tag{12}$$

qui s'écrit sous la forme d'une équation de Clairaut :

$$\Phi^*(x^*) = \left\langle (D_x\Phi)^{-1}(x^*), x^* \right\rangle - \Phi\left[(D_x\Phi)^{-1}(x^*)\right] \tag{13}$$

En utilisant, $-\langle x^*, x\rangle = \int_{\Omega^*} \log e^{-\langle \xi, x\rangle} . e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi$ et $-\langle \xi, x\rangle = \log e^{-\langle \xi, x\rangle}$, on obtient l'entropie de Shannon:

$$\Phi^*(x^*) = \left[\left(\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi \right) . \log \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi - \int_{\Omega^*} \log e^{-\langle \xi, x\rangle} . e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi \right] / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi$$

$$\Phi^*(x^*) = \left[-\int_{\Omega^*} \frac{e^{-\langle \xi, x\rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi} . \log \left(\frac{e^{-\langle \xi, x\rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi} \right) d\xi \right] \tag{14}$$

Si on note $p_x(\xi) = e^{-\langle \xi, x\rangle} / \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi$ comme une densité de probabilité, $\Phi^*()$ a la forme d'une Entropie de Shannon :

$$\Phi^* = -\int_{\Omega^*} p_x(\xi) \log p_x(\xi) d\xi \tag{15}$$

On remarque que $x^* = \int_{\Omega^*} \xi . p_x(\xi) d\xi$ (16)

et $\log p_x(\xi) = -\langle x, \xi\rangle - \log \int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi = -\langle x, \xi \rangle + \Phi(x)$ (17)

Ce qui nous permet d'écrire la relation:

$$\int_{\Omega^*} \Phi^*(\xi) p_x(\xi) d\xi = \Phi^* \left(\int_{\Omega^*} \xi . p_x(\xi) d\xi \right) \tag{18}$$

Cette dernière relation peut s'écrire:

$$E[\Phi^*(\xi)] = \Phi^*(E[\xi]) \ , \ \xi \in \Omega^* \tag{19}$$

qui montre que le barycentre de l'Entropie est égale à l'Entropie du barycentre, obtenue pour $x^* = D_x\Phi$. Cette densité est la densité à Maximum d'Entropie:

$$\underset{p_x(.)}{Max} \left[-\int_{\Omega^*} p_x(\xi) \log p_x(\xi) d\xi \right] \text{ tel que } \int_{\Omega^*} \xi . p_x(\xi) d\xi = x^* \tag{20}$$

En posant $\bar{\xi} = \Theta(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$ et son inverse $x = \Theta^{-1}(\bar{\xi})$, la densité est donnée par: $p_{\bar{\xi}}(\xi) = \frac{e^{-\langle \xi, \Theta^{-1}(\bar{\xi})\rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi, \Theta^{-1}(\bar{\xi})\rangle} d\xi}$ (21)

avec $\bar{\xi} = \int_{\Omega^*} \xi . p_{\bar{\xi}}(\xi) d\xi$ et $\Phi(x) = -\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle x, \xi\rangle} d\xi$ (22)

Si nous nous ramenons à la définition classique de la métrique de Fisher $I(x)$, le modèle de Koszul la fait apparaître comme une métrique hessienne :

$$\log p_x(\xi) = -\langle x, \xi \rangle + \Phi(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 \log p_x(\xi)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} \tag{23}$$

$$I(x) = -E_\xi \left[\frac{\partial^2 \log p_x(\xi)}{\partial x^2} \right] = -\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \log \psi_\Omega(x)}{\partial x^2}$$

$$I(x) = E_\xi\left[\xi^2\right] - E_\xi[\xi]^2 \tag{24}$$

En 1977, Crouzeix obtenu également la relation:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \left[\frac{d^2\Phi^*}{dx^{*2}} \right]^{-1} \tag{25}$$

Si on cherche le produit scalaire qu'il faut choisir dans ce modèle de Koszul, il apparait que le produit scalaire de Cartan défini à partir de la forme de Killing $B(.,.)$ est invariant par les automorphismes du cône convexe :

$$\langle x, \xi \rangle = -B(x, \eta(\xi)) \text{ avec } B(x,y) = Tr(ad_x ad_y)$$

$$\eta : \text{involution de Cartan}, \ \forall \sigma \in Aut(\Omega) \ B(\sigma(x), \sigma(y)) = B(x,y)$$

3 Métrique de Fisher quantique de Balian

Roger Balian [5,6,7] a étendu cette approche dans le cadre de la physique quantique en considérant le hessien de l'Entropie de Von Neumann. En définissant 2 quantités scalaires ayant un sens physique :

- $Tr\left[\hat{D}\,\hat{O}\right]$ valeurs moyennes à travers les deux espaces duaux des observables et des états
- $S = -Tr\left[\hat{D} \log(\hat{D})\right]$ Entropy dans l'espace des états

L'Entropie S peut être écrite comme un produit scalaire $S = -\left\langle \hat{D}, \log(\hat{D}) \right\rangle$ où $\log(\hat{D})$ est un élément de l'espace des observables, permettant une structure géométrique physique dans ces espaces. La différentielle seconde d^2S est une forme quadratique non négative des coordonnées de $\hat{D}$ qui est induit par la concavité de l'Entropie de Von Neumann S. Roger Balian a introduit la distance ds entre l'état $\hat{D}$ et l'état voisin $\hat{D} + d\hat{D}$ comme la racine carrée de :

$$ds^2 = -d^2S = Tr\left[d\hat{D}.d \log \hat{D}\right] \tag{26}$$

où le tenseur métrique Riemannien est le hessien de $-S(\hat{D})$ comme fonction d'un ensemble de coordonnées indépendantes de $\hat{D}$. Il est alors possible d'introduire le logarithme d'une fonction caractéristique quantique :

$$F(\hat{X}) = \log Tr \exp \hat{X} \tag{27}$$

L'Entropie de Von Neumann apparaît alors comme la transformée de Legendre de ce terme :

$$S(\hat{D}) = F(\hat{X}) - \left\langle \hat{D}, \hat{X} \right\rangle \tag{28}$$

avec $S(\hat{D}) = -Tr\hat{D} \log \hat{D} = -\left\langle \hat{D}, \log \hat{D} \right\rangle$ (29)

où $\hat{X}$ et $\hat{D}$ sont les variables conjuguées de la transformée de Legendre, et faisant apparaître la dualité algébrique/géometrique entre $\hat{D}$ et $\ln \hat{D}$.

$F(\hat{X})$ caractérise les états d'équilibre thermodynamique canoniques avec $\hat{X} = \beta.\hat{H}$ et où $\hat{H}$ est l'Hamiltonien.

$$dF = Tr\hat{D}d\hat{X} \text{ avec la densité } \hat{D} = \frac{\exp \hat{X}}{Tr \exp \hat{X}} \quad (30)$$

dF sont les dérivés partielles de $F(\hat{X})$ par rapport aux coordonnées de $\hat{X}$. $\hat{D}$ est hermitien, normalisé et positif et peut être interprété comme une matrice densité. La transformée de Legendre apparaît avec:

$$\begin{aligned} S(\hat{D}) &= -Tr\hat{D}\log \hat{D} = -Tr\left(\hat{D}\left(\hat{X} - \log Tr \exp \hat{X}\right)\right) \\ &= -Tr\hat{D}\hat{X} + Tr\left(\hat{D}\right)\log Tr \exp \hat{X} \end{aligned} \quad (31)$$

$$Tr\left(\hat{D}\right) = 1 \Rightarrow S(\hat{D}) = F\left(\hat{X}\right) - \left\langle \hat{D}, \hat{X} \right\rangle$$

Roger Balian a définit la métrique hessienne duale à partir de *F*, $ds^2 = d^2F$ dans l'espace conjugué $\hat{X}$:

$$ds^2 = -dS^2 = Trd\hat{D}d\hat{X} = d^2F \quad (32)$$

La normalisation de $\hat{D}$ implique $Trd\hat{D} = 0$ et $Trd^2\hat{D} = 0$.

4 Capacité Géométrique de Souriau

Souriau a défini l'ensemble canonique de Gibbs sur une variété symplectique *M*, pour assurer la covariance sous l'action d'un groupe de Lie. Comme les variétés symplectiques possèdent une mesure complètement continue, la mesure de Liouville, invariante par les difféomorphismes, tous les états statistiques sont le produit de la mesure de Liouville par la fonction scalaire donnée par la fonction de répartition généralisée $e^{\Phi(\beta) - \langle \beta, U(\xi) \rangle}$ définie par l'énergie U (définie dans le dual de l'algèbre de Lie du groupe dynamique considéré) et la température (de Planck) « géométrique » β, où Φ est une constante de normalisation telle que la masse de probabilité soit égale à 1, $\Phi(\beta) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda$.

Jean-Marie Souriau généralise les états d'équilibre de Gibbs pour toutes les variétés symplectiques qui ont un groupe dynamique. L'ensemble de Gibbs est le sous-ensemble (dans l'algèbre de Lie) propre ouvert le plus large pour que l'intégrale précédente converge. La dérivée de Φ, $Q = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ (la chaleur thermodynanique) est égale à la valeur moyenne de l'énergie U. L'opposée de la dérivée de cette chaleur généralisée Q, $K = -\frac{\partial Q}{\partial \beta}$ est symétrique et définie positive, analogue à une capacité thermique « géométrique », qui est l'équivalent de la métrique de Fisher. Comme précédemment, l'Entropie s est donnée par la transformée de Legendre de Φ, $s = \langle \beta, Q \rangle - \Phi$. Si le groupe qui agit correspond à la translation en temps, on retrouve la thermodynamique classique, mais Souriau a remarqué que la thermodynamique classique n'est pas covariante par les groupes de la physique (groupe de Galilée et de Poincaré). Cette rupture de symétrie fournit de nouvelles équations découvertes par Souriau [8-12].

Pour chaque température β, Souriau a introduit un tenseur $\tilde{\Theta}_\beta$, égale à la somme du cocycle $\tilde{\Theta}$ du cobord (de la chaleur, via [.,.] crochets de Lie):

$$\tilde{\Theta}_\beta(Z_1, Z_2) = \tilde{\Theta}(Z_1, Z_2) + \left\langle Q, ad_{Z_1}(Z_2) \right\rangle \quad (33)$$
$$\text{avec } ad_{Z_1}(Z_2) = [Z_1, Z_2]$$

Ce tenseur $\tilde{\Theta}_\beta$ possède les propriétés suivantes:

- $\tilde{\Theta}(X,Y) = \langle \Theta(X), Y \rangle$ où Θ est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ avec des valeurs dans $\mathfrak{g}^*$, avec $\Theta(X) = T_e\theta(X(e))$ où θ le 1-cocycle du groupe de Lie *G*. $\tilde{\Theta}(X,Y)$ est constant sur *M* et l'application $\tilde{\Theta}(X,Y): \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \Re$ est une forme bilinéaire anti-symétrique, et est appelé Cocycle Symplectic de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associée à l'application moment J, avec les propriétés:
  $$\tilde{\Theta}(X,Y) = J_{[X,Y]} - \{J_X, J_Y\} \quad (34)$$
  avec $\{.,.\}$ crochet de Poisson, J l'application moment
  $$\tilde{\Theta}([X,Y],Z) + \tilde{\Theta}([Y,Z],X) + \tilde{\Theta}([Z,X],Y) = 0 \quad (35)$$
  où J_X application linéaire de $\mathfrak{g}$ vers une fonction différentielle sur M : $\begin{matrix} \mathfrak{g} \to C^\infty(M,R) \\ X \to J_X \end{matrix}$ et l'application différentielle associée J, appelée application moment:
  $$\begin{aligned} &J: M \to \mathfrak{g}^* \text{ with } x \mapsto J(x) \\ &\text{tel que } J_X(x) = \langle J(x), X \rangle, X \in \mathfrak{g} \end{aligned} \quad (36)$$
  Si à la place de J, on prend l'application moment:
  $$J'(x) = J(x) + Q \ , \ x \in M \quad (37)$$
  où $Q \in \mathfrak{g}^*$ est constant, le cocycle symplectique θ est remplacé par $\theta'(g) = \theta(g) + Q - Ad_g^* Q$ où $\theta' - \theta = Q - Ad_g^* Q$ le 1-cobord de G à valeurs dans $\mathfrak{g}^*$. Nous avons également la propriété suivante:
  $$\theta(g_1 g_2) = Ad_{g_1}^* \theta(g_2) + \theta(g_1) \text{ and } \theta(e) = 0 \quad (38)$$
- $\beta \in Ker\, \tilde{\Theta}_\beta$, tel que $\tilde{\Theta}_\beta(\beta, \beta) = 0 \ , \ \forall \beta \in \mathfrak{g}$ (39)
- Le tenseur symétrique associé g_β, défini sur toutes les valeurs de $ad_\beta(.) = [\beta, .]$ est défini positif:
  $$g_\beta([\beta, Z_1], [\beta, Z_2]) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, [\beta, Z_2]) \quad (40)$$
  $$g_\beta([\beta, Z_1], Z_2) = \tilde{\Theta}_\beta(Z_1, Z_2) \ , \ \forall Z_1 \in \mathfrak{g}, \ \forall Z_2 \in \mathrm{Im}(ad_\beta(.))$$
  $$g_\beta(Z_1, Z_2) \geq 0 \ , \ \forall Z_1, Z_2 \in \mathrm{Im}(ad_\beta(.)) \quad (41)$$
  où l'application linéaire $ad_X \in gl(\mathfrak{g})$ est la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définie par $X, Y \in \mathfrak{g}(= T_e G) \mapsto ad_X(Y) = [X, Y]$, et $ad_X^* \in gl(\mathfrak{g}^*)$ la représentation co-adjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, application linéaire qui satisfait, pour $\xi \in \mathfrak{g}^*$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$: $\langle ad_X^*(\xi), Y \rangle = \langle \xi, -ad_X(Y) \rangle$

Ces équations sont universelles car elles ne dépendent pas de la variété symplectique mais uniquement du groupe dynamique *G*, du cocycle symplectique Θ, de la température géométrique β et de la chaleur géométrique Q. Souriau a appelé ce modèle, la « thermodynamique des groupes de Lie » [14,15, 16]. Nous donnons alors le théorème principal de Souriau.

Théorème fondamental de la thermodynamique:

Soit Ω*, le plus large sous-ensemble propre ouvert de* $\mathfrak{g}$*, algèbre de Lie de G, tel que* $\int_M e^{-\beta.U(\xi)}d\lambda$ *et* $\int_M \xi.e^{-\beta.U(\xi)}d\lambda$ *sont des intégrales convergentes, cet ensemble* Ω *est convexe et est invariant pour toute transformation* $Ad_g(.)$*, où* $g \mapsto Ad_g(.)$ *est la représentation adjointe de G, tel que* $Ad_g = T_e i_g$ *avec* $i_g : h \mapsto ghg^{-1}$*. Soit* $a : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ *une action affine unique* a *telle que la partie linéaire est la représentation coadjointe de* G*, qui associe à chaque* $g \in G$ *l'isomorphisme linéaire* $Ad_g^* \in GL(\mathfrak{g}^*)$*, satisfaisant pour chaque* $\xi \in \mathfrak{g}^*$ *et* $X \in \mathfrak{g}$ *:* $\left\langle Ad_g^*(\xi), X \right\rangle = \left\langle \xi, Ad_{g^{-1}}(X) \right\rangle$*. Alors, les équations fondamentales sont données par :*

$$\beta \to Ad_g(\beta) \tag{42}$$

$$\Phi \to \Phi - \theta\left(g^{-1}\right)\beta \tag{43}$$

$$s \to s \tag{44}$$

$$Q \to a(g,Q) = Ad_g^*(Q) + \theta(g) \tag{45}$$

C.M. Marle a montré qu'il n'existe qu'un 1-cocycle $\theta : G \to E$ du groupe de Lie G tel que $\Theta(X) = T_e\theta(X(e))$, avec Θ le 1-cocycle de l'algèbre de Lie associée. De plus, $\tilde{\Theta}$ possède une différentielle extérieure $d\tilde{\Theta}$ qui s'annule, indiquant que $\tilde{\Theta}$ est un 2-cocycle. Il est alors possible de faire apparaître une métrique Riemannienne qui est une généralisation de la métrique de Fisher. Ainsi, si nous différentions l'équation de Souriau $Q\left(Ad_g(\beta)\right) = Ad_g^*(Q) + \theta(g)$, la relation suivante apparaît:

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta}\left(-[Z_1,\beta],.\right) = \tilde{\Theta}\left(Z_1,[\beta,.]\right) + \left\langle Q, Ad_{.Z_1}([\beta,.]) \right\rangle = \tilde{\Theta}_\beta\left(Z_1,[\beta,.]\right) \tag{46}$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial \beta}\left([Z_1,\beta],Z_2.\right) = \tilde{\Theta}\left(Z_1,[\beta,Z_2]\right) + \left\langle Q, Ad_{.Z_1}([\beta,Z_2]) \right\rangle = \tilde{\Theta}_\beta\left(Z_1,[\beta,Z_2]\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial Q}{\partial \beta} = g_\beta\left([\beta,Z_1],[\beta,Z_2]\right) \tag{47}$$

On observe alors que la métrique de Fisher $I(\beta) = -\frac{\partial Q}{\partial \beta}$ est exactement équivalente à la métrique de Souriau définie via le cocycle symplectique:

$$I(\beta) = \tilde{\Theta}_\beta\left(Z_1,[\beta,Z_2]\right) = g_\beta\left([\beta,Z_1],[\beta,Z_2]\right) \tag{48}$$

Cette métrique de Souriau-Fisher a été considérée par Souriau comme **une *généralisation de la "capacité thermique"*.** Souriau l'appelle K et la nomme **"*capacité géométrique*"**. En effet, on peut lier cette capacité à la capacité calorifique classique de la thermodynamique:

$$\beta = \frac{1}{kT}, K = -\frac{\partial Q}{\partial \beta} = -\frac{\partial Q}{\partial T}\left(\frac{\partial(1/kT)}{\partial T}\right)^{-1} = kT^2\frac{\partial Q}{\partial T} \tag{49}$$

On peut observer que *Q* est lié à une moyenne de *U*, et *K* est lié à une variance de *U*:

$$I(\beta) = -\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \mathrm{var}(U) = \int_M U(\xi)^2.p_\beta(\xi)d\omega - \left(\int_M U(\xi).p_\beta(\xi)d\omega\right)^2$$

Dans les équations fondamentales, on observe que l'Entropie s est inchangée, et Φ est modifié mais linéairement par rapport à β, avec la conséquence que la métrique de Souriau-Fisher est invariante:

$$s\left[Q\left(Ad_g(\beta)\right)\right] = s(Q(\beta)) \tag{50}$$

$$I\left(Ad_g(\beta)\right) = \frac{\partial^2\left(\Phi - \theta\left(g^{-1}\right)\beta\right)}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = I(\beta) \tag{51}$$

5 Références

1. Koszul J.L., Domaines bornées homogènes et orbites de groupes de transformations affines, Bull. Soc. Math. France 89, pp. 515-533., 1961
2. Koszul J.L., Ouverts convexes homogènes des espaces affines, Math. Z. 79, pp. 254-259., 1962
3. Koszul J.L., Variétés localement plates et convexité, Osaka J. Math. , n°2, p.285-290, 1965
4. Koszul J.L., Déformations des variétés localement plates, .Ann Inst Fourier, 18 , 103-114., 1968
5. Balian, R. & al, H. Dissipation in many-body systems: A geometric approach based on information theory. Phys. Rep. 1986, 131, 1–146.
6. Balian R., A Metric for Quantum States Issued from von Neumann's Entropy, Geometric Science of Information, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8085, F. Nielsen, & Barbaresco, Frederic (Eds.), pp. 513-518, 2014
7. Balian R., The Entropy-Based Quantum Metric, Entropy 2014, 16, 3878-3888
8. Souriau J.M., Définition covariante des équilibres thermodynamiques, Suppl. Nuov. Cimento, n°1, pp. 203–216, 1966
9. Souriau, J.M. Géométrie de l'espace de phases. Comm. Math. Phys. 1966, 374, pp.1–30
10. Souriau, J.M. Structure des systèmes dynamiques; Ed. Dunod, Paris, France, 1970.
11. Souriau, J.M. Thermodynamique et géométrie. In Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II; Springer: Berlin 1978, pp. 369–397.
12. Souriau, J.M. Mécanique classique et géométrie symplectique. CNRS Marseille. Cent. Phys. Théor. 1984, Report ref. CPT-84/PE-1695.
13. Libermann, P.; Marle, C.M. Symplectic Geometry and Analytical Mechanics; Springer Science & Business Media: Berlin/Heidelberg, 1987.
14. Barbaresco, F., Koszul Information Geometry and Souriau Geometric Temperature/Capacity of Lie Group Thermodynamics. Entropy, 2014, n°16, pp. 4521-4565.
15. Barbaresco F., Symplectic Structure of Information Geometry: Fisher Metric and Euler-Poincaré Equation of Souriau Lie Group Thermodynamics, GSI'15 conference, Paris, October 2015
16. Kosmann-Schwarzbach Y., Simeon-Denis Poisson les Mathématiques au Service de la Science, Ed. Ecole Polytechnique, 2013
17. Fréchet, M. Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons. Revue de l'Institut International de Statistique 1943, 11, 182–205.