

Optimisation exacte de critères parcimonieux en norme ℓ_0 par programmation mixte en nombres entiers

Sébastien BOURGUIGNON¹, Jordan NININ², Hervé CARFANTAN³, Marcel MONGEAU⁴

¹LUNAM Université - École Centrale de Nantes, IRCCyN, 1 rue de la Noë, F-44321 Nantes, France

²ENSTA-Bretagne, Lab-STICC, 2 rue François Verny, F-29806 Brest cedex 9, France

³Université de Toulouse - CNRS, IRAP, 14 avenue Édouard Belin, F-31400 Toulouse, France

⁴ENAC, Labo MAIAA, F-31055, Toulouse, France

sebastien.bourguignon@ec-nantes.fr, jordan.ninin@ensta-bretagne.fr,
herve.carfantan@irap.omp.eu, marcel.mongeau@enac.fr

Résumé – L’approximation parcimonieuse vise à obtenir une solution approchée d’un système linéaire ayant le moins de composantes non nulles possible. Elle peut s’exprimer sous la forme d’un problème d’optimisation bi-objectif dans lequel sont minimisées une mesure de fidélité aux données et la « norme » ℓ_0 mesurant la parcimonie. Ce problème, essentiellement combinatoire, est souvent contourné par la relaxation convexe de la norme ℓ_0 , ou par des techniques heuristiques d’exploration combinatoire partielle. Cependant, pour de nombreux problèmes inverses, de telles approches échouent à déterminer le minimum global. Nous proposons l’optimisation globale de ces problèmes en norme ℓ_0 par l’intermédiaire de programmes mixtes en nombres entiers, mêlant variables réelles et entières. Des formulations contraintes et pénalisées sont proposées, pour différentes mesures ℓ_p de fidélité aux données. L’efficacité algorithmique de ces formulations est évaluée sur des données simulées de déconvolution impulsionnelle. Nous montrons que la résolution exacte de tels problèmes est faisable pour des problèmes inverses de taille raisonnable, pour lesquels les solutions classiques échouent à localiser la solution et l’exploration combinatoire serait prohibitive.

Abstract – Sparse approximation addresses the problem of solving approximately a linear system with a vector having as few non-zero components as possible. It reduces to a bi-objective optimization problem, where both a data misfit measure and the ℓ_0 -“norm” sparsity measure are minimized. Optimization is essentially combinatorial and is often tackled through the convex relaxation of the ℓ_0 norm, or by heuristic partial combinatorial exploration techniques. In many inverse problems, however, such approaches fail in determining the global optimum. We propose the global optimization of ℓ_0 -norm-based criteria through Mixed Integer Programming, which involves both continuous and integer variables. Constrained and penalized formulations are proposed, involving different ℓ_p -norm data fitting measures. Algorithmic efficiency of all formulations is evaluated on simulated sparse deconvolution problems. We show that exact optimization of such problems is possible on certain moderate size inverse problems, whereas usual methods fail in locating sparsest solutions and exhaustive enumeration remains prohibitive.

1 Introduction

L’approximation parcimonieuse consiste à rechercher, sous un modèle $\mathbf{y} \simeq \mathbf{H}\mathbf{x}$, une solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^Q$ contenant un grand nombre de composantes nulles, approchant des données $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$. Le dictionnaire \mathbf{H} peut représenter une transformée générique (souvent *redondante*, *i.e.*, telle que $Q > N$), résulter d’une phase d’apprentissage ou encore de la discrétisation d’un modèle physique continu. Un exemple de ce dernier cas est la déconvolution impulsionnelle, où l’opérateur \mathbf{H} correspond à une opération de filtrage, souvent passe-bas ou passe-bande, d’un train d’impulsions \mathbf{x} par un instrument de mesure [1]. En statistique, un problème similaire concerne la sélection de variables dans des modèles de régression linéaire [2]. Ce problème peut s’écrire comme un problème d’*optimisation bi-objectif* :

$$\min_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{x}\|_0, d(\mathbf{y}, \mathbf{H}\mathbf{x})), \quad (1)$$

où la « norme » ℓ_0 , $\|\mathbf{x}\|_0 := \text{Card}\{q | x_q \neq 0\}$, mesure la parcimonie de \mathbf{x} et $d(\mathbf{y}, \mathbf{H}\mathbf{x})$ mesure l’erreur entre les données

\mathbf{y} et le modèle $\mathbf{H}\mathbf{x}$. Hormis le cas de dictionnaires très spécifiques, ce problème intrinsèquement combinatoire s’avère très difficile. Les approches classiques en traitement du signal envisagent des solutions approchées, basées soit sur la relaxation de la norme ℓ_0 par la norme ℓ_1 ($\|\mathbf{u}\|_1 := \sum_k |u_k|$), rendant le premier objectif convexe, soit sur des méthodes dites gloutonnes qui construisent une approximation parcimonieuse en ajoutant itérativement des composantes non nulles à l’estimé courant en initialisant à zéro. De nombreux développements théoriques ont établi des conditions suffisantes pour que la relaxation ℓ_1 ou les approches gloutonnes puissent résoudre le problème initial (1) (voir par exemple [3] et ses références pour une revue des différents algorithmes et de leurs conditions d’optimalité). Cependant, ces conditions ne sont pas vérifiées dans de nombreux cas réels, en particulier si les colonnes du dictionnaire sont très corrélées. Mentionnons également des travaux visant plus explicitement l’optimisation de critères en norme ℓ_0 , par des approximations continues successives de la norme ℓ_0 [4] ou

des algorithmes de seuillage dur itératif [5]. Dans le meilleur des cas, cependant, ces algorithmes possèdent uniquement des propriétés de convergence locale.

Nous proposons de résoudre de façon exacte le problème d'approximation parcimonieuse en le reformulant comme un programme mixte en nombres entiers (PMNE) garantissant l'obtention d'une solution optimale. Une telle résolution exacte requiert un temps de calcul bien plus élevé que les approches existantes. Sur certains problèmes de taille raisonnable, cependant, nous montrons qu'une solution exacte peut être calculée de la sorte, alors qu'une exploration combinatoire exhaustive reste prohibitive et que les algorithmes d'approximation parcimonieuse existants produisent des solutions non satisfaisantes.

2 Programme mixte en nombres entiers

La programmation mixte en nombres entiers (PMNE) concerne l'optimisation de problèmes comportant à la fois des variables continues et des variables entières [6]. De tels problèmes semblent particulièrement adaptés aux critères en norme ℓ_0 , laquelle introduit naturellement des variables de décision *binaires* pour chaque composante (nulle ou non nulle ?).

2.1 Définitions

Un PMNE à fonction de coût quadratique et à contraintes quadratiques s'écrit de manière générique :

$$\min_{\mathbf{v}} \mathbf{v}^T \mathbf{F} \mathbf{v} + \mathbf{c}^T \mathbf{v}, \text{ t.q. } \begin{cases} \mathbf{v}^T \mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{d}^T \mathbf{v} \leq e, \\ \mathbf{H}_{\text{in}} \mathbf{v} \leq \mathbf{b}_{\text{in}}, \mathbf{H}_{\text{eq}} \mathbf{v} = \mathbf{b}_{\text{eq}}, \\ \mathbf{l}_b \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{u}_b, \\ v_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

où $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^J$ contient les variables d'optimisation et \mathcal{I} est l'ensemble des indices correspondant aux composantes de \mathbf{v} contraintes à des valeurs entières. Lorsque la fonction de coût et les contraintes sont linéaires, on parle de *programme linéaire en nombres entiers* (PLNE). Si seules les contraintes sont linéaires, on considère un *programme quadratique en nombres entiers* (PQNE). Enfin, un *programme linéaire en nombres entiers à contraintes quadratiques* (PLNECQ) correspond au cas où la fonction de coût ne comporte pas de terme quadratique.

2.2 Principes de résolution

Les problèmes de PMNE sont intrinsèquement difficiles, mais les méthodes de résolution ont connu un essor considérable au cours des quinze dernières années, aussi bien par l'augmentation des capacités de calcul que grâce aux progrès accomplis dans la résolution de programmes linéaires, l'utilisation de techniques mathématiques avancées et à la mise en œuvre informatique [6]. Les méthodes classiques de résolution de PMNE (comme celles utilisées dans le solveur CPLEX) s'appuient essentiellement sur une stratégie de type *Branch and Bound* : un arbre de décision est construit pour l'ensemble des

variables binaires. Ensuite, une partie de ces variables est fixée et les contraintes de binarité sur les autres variables discrètes sont relâchées dans $[0, 1]$. Le sous-problème correspondant, à variables continues, peut alors être résolu de manière efficace, et sa solution fournit une borne inférieure de l'optimum du problème initial (puisque le domaine réalisable de ce dernier est inclus dans le domaine réalisable du problème relâché). Des contraintes linéaires de type coupes de Gomory [7] sont ajoutées à chaque sous-problème ainsi généré, de manière à ce que la solution du sous-problème à valeurs continues converge itérativement vers une solution à variables entières (pour les variables entières du sous-problème). De tels plans de coupe permettent d'enlever des parties du domaine réalisable du sous-problème qui ne contiennent pas de variable entière, et ce pour un faible coût de calcul puisque la réalisation de chaque coupe correspond à la résolution d'un problème continu.

La recherche de stratégies de branchement efficaces (quelles variables sont relâchées ?), couplée à des méthodes de coupe performantes, est à la base de l'efficacité de ces méthodes, permettant d'envisager de résoudre des problèmes combinatoires de manière exacte sans avoir à résoudre explicitement tous les sous-problèmes correspondant à chaque combinaison possible.

3 Différents critères parcimonieux

Nous proposons plusieurs reformulations du problème d'approximation parcimonieuse sous la forme de PMNE par une reformulation des deux objectifs du problème (1).

3.1 Attache aux données en norme ℓ_p , $p = 1, 2, \infty$

En traitement du signal, l'attache aux données $d(\mathbf{y}, \mathbf{H}\mathbf{x})$ est souvent définie par la norme euclidienne $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2$. Dans un cadre statistique, ce choix correspond à une hypothèse d'erreurs $e = \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) selon une loi gaussienne centrée, auquel cas la vraisemblance des données s'exprime en fonction de $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2$. Par ailleurs, le choix de la norme ℓ_2 répond aussi à un argument *technique*, puisque sa nature continûment différentiable et convexe est à la base de nombreux algorithmes d'optimisation, y compris pour des problèmes parcimonieux (critère pénalisé en norme ℓ_1 par exemple). Le fait que, pour un ensemble donné de composantes non nulles, le minimiseur s'exprime explicitement en fonction des données (à partir des équations normales) est aussi à la base de la construction des algorithmes gloutons.

En revanche, le choix d'autres mesures $d(\mathbf{y}, \mathbf{H}\mathbf{x})$ peut se révéler approprié sous d'autres hypothèses statistiques. En particulier, la vraisemblance s'exprime en fonction de la norme ℓ_1 (resp. de la norme ℓ_∞ , $\|\mathbf{u}\|_\infty := \max_k |u_k|$) si les échantillons e_n sont i.i.d. suivant une loi de Laplace (resp. une loi uniforme). Sur le plan calculatoire, la résolution de PMNE s'appuyant généralement sur la résolution de sous-problèmes linéaires, il est intéressant ici d'envisager également de telles mesures, *linéaires par morceaux*. Notons que, pour ces derniers cas, très peu d'algorithmes ont été proposés.

3.2 Neuf formulations en norme ℓ_0

Nous considérons trois approches mono-objectif pour le problème (1), selon que l'un des objectifs est passé en contrainte ou que l'on minimise une somme pondérée des deux termes. Plus précisément, nous étudions les neuf formulations suivantes.

– Formulations à erreur bornée ($\mathcal{P}_{0/p}$) :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ t.q. } \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_p \leq \epsilon_p, \quad p = 1, 2, \infty$$

– Formulations à degré maximal de parcimonie ($\mathcal{P}_{p/0}$) :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_p \text{ t.q. } \|\mathbf{x}\|_0 \leq K_p, \quad p = 1, 2, \infty$$

– Formulations pénalisées (\mathcal{P}_{0+p}) :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 + \lambda_p \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_p^p, \quad p = 1, 2$$

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 + \lambda_\infty \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_\infty.$$

Notons que les trois types de formulations, $\mathcal{P}_{0/p}$, $\mathcal{P}_{p/0}$, et \mathcal{P}_{0+p} , ne sont pas équivalentes en raison de la non-convexité de la norme ℓ_0 . Par ailleurs, les possibles propriétés d'unicité de la solution diffèrent selon le problème considéré. Supposons que toute combinaison de N colonnes de la matrice $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^Q$ est linéairement indépendante (*Unique Representation Property* [8]). Soit \mathbf{H}_S (resp. \mathbf{x}_S) l'ensemble des colonnes de \mathbf{H} (resp. des composantes de \mathbf{x}) indexées par un support donné $S \subset \{1, \dots, Q\}$, supposé de taille inférieure à N . Alors $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}_S \mathbf{x}_S\|_2^2$ est strictement convexe et admet un minimiseur unique. Les minimiseurs des problèmes $\mathcal{P}_{2/0}$ et \mathcal{P}_{0+2} sont donc des points isolés (de supports distincts) dès lors qu'ils contiennent au plus N composantes non nulles. Ce n'est plus forcément le cas des problèmes $\mathcal{P}_{p/0}$ et \mathcal{P}_{0+p} pour $p = 1$ et $p = \infty$, les normes ℓ_1 et ℓ_∞ n'étant pas strictement convexes. Par ailleurs, les problèmes à erreur bornée $\mathcal{P}_{0/p}$ admettent en général une infinité de solutions : le minimum de la fonction objectif (le nombre de composantes non nulles) peut être atteint en différents supports, et l'ensemble $\{\mathbf{x}_S \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{H}_S \mathbf{x}_S\|_p \leq \epsilon_p\}$ est en général infini pour un support S donné.

4 Éléments de reformulation en PMNE

Nous proposons maintenant la reformulation de chacun des deux objectifs du problème (1). Pour ce faire, nous introduisons une hypothèse de borne sur la solution : $\|\mathbf{x}\|_\infty < M$. Notons que cet artifice permet de reformuler la norme ℓ_0 au moyen de variables binaires, mais ne change pas la solution.

4.1 Reformulation de la norme ℓ_0

La norme ℓ_0 introduit naturellement des variables binaires : $\|\mathbf{x}\|_0 = \sum_q b_q$ avec $b_q = 1$ si et seulement si $x_q \neq 0$. Moyennant l'hypothèse $\|\mathbf{x}\|_\infty < M$, on peut alors montrer que :

$$\|\mathbf{x}\|_0 \leq K \Leftrightarrow \exists \mathbf{b} \in \{0; 1\}^Q \text{ t.q. } \begin{cases} \sum_{q=1}^Q b_q \leq K \\ -M\mathbf{b} \leq \mathbf{x} \leq M\mathbf{b}, \end{cases}$$

$$\text{et } \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \|\mathbf{x}\|_0 \Leftrightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}, \mathbf{b} \in \{0,1\}^Q} \sum_{q=1}^Q b_q \text{ t.q. } -M\mathbf{b} \leq \mathbf{x} \leq M\mathbf{b},$$

où \mathcal{F} est le domaine réalisable du problème considéré. La première propriété permet de reformuler la contrainte de parcimonie des problèmes $\mathcal{P}_{p/0}$ en ajoutant des variables binaires et des contraintes d'inégalité linéaires ; la seconde permet de reformuler similairement la norme ℓ_0 intervenant dans les fonctions de coût des problèmes $\mathcal{P}_{0/p}$ et \mathcal{P}_{0+p} .

4.2 Reformulation de l'attache aux données

À partir de la reformulation de la norme ℓ_0 , les critères basés sur une attache aux données en norme ℓ_2 s'écrivent directement sous la forme de PQNE (pour $\mathcal{P}_{2/0}$ et \mathcal{P}_{2+0}) ou de PL-NECQ (pour $\mathcal{P}_{0/2}$). Pour les mesures d'erreur en norme ℓ_1 et ℓ_∞ , voyons comment reformuler les problèmes en PLNE.

4.2.1 Attache aux données en norme ℓ_1

Moyennant l'introduction de variables supplémentaires $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$, l'erreur en norme ℓ_1 s'écrit linéairement $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_1 = \sum_n w_n$, avec $w_n = |y_n - \mathbf{h}_n^\ell \mathbf{x}|$, où \mathbf{h}_n^ℓ représente la $n^{\text{ième}}$ ligne de la matrice \mathbf{H} . Sa minimisation s'obtient alors en relâchant les N dernières égalités en inégalités. On montre en effet que :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_1 \Leftrightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \sum_n w_n \text{ t.q. } -\mathbf{w} \leq \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x} \leq \mathbf{w}.$$

Cette propriété permet de reformuler la fonction de coût de $\mathcal{P}_{1/0}$ et \mathcal{P}_{0+1} sous forme linéaire en ajoutant des variables réelles et des contraintes d'inégalité linéaires. Pour $\mathcal{P}_{0/1}$ où l'erreur ℓ_1 apparaît en contrainte, on montre de même que :

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*) \in \text{Arg } \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ t.q. } \begin{cases} \sum_n w_n \leq \epsilon_1 \\ -\mathbf{w} \leq \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x} \leq \mathbf{w} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^* \in \text{Arg } \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ t.q. } \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_1 \leq \epsilon_1.$$

4.2.2 Attache aux données en norme ℓ_∞

Le problème $\mathcal{P}_{0/\infty}$ s'écrit directement à partir de contraintes d'inégalité linéaires puisque :

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_\infty \leq \epsilon_\infty \Leftrightarrow -\epsilon_\infty \mathbf{1}_N \leq \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x} \leq \epsilon_\infty \mathbf{1}_N.$$

Pour les problèmes $\mathcal{P}_{\infty/0}$ and $\mathcal{P}_{0+\infty}$, où l'erreur en norme ℓ_∞ apparaît dans la fonction de coût, on montre que :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_\infty \Leftrightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}, t \in \mathbb{R}} t \text{ t.q. } -t\mathbf{1}_N \leq \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x} \leq t\mathbf{1}_N,$$

en introduisant la variable supplémentaire $t \in \mathbb{R}$.

4.3 Reformulations des critères parcimonieux

À partir des reformulations précédentes, les neuf problèmes d'optimisation définis en § 3.2 peuvent être reformulés exactement sous la forme de PMNE. L'ensemble des reformulations est décrit dans [9]. À titre d'exemple, $\mathcal{P}_{1/0}$ se reformule en :

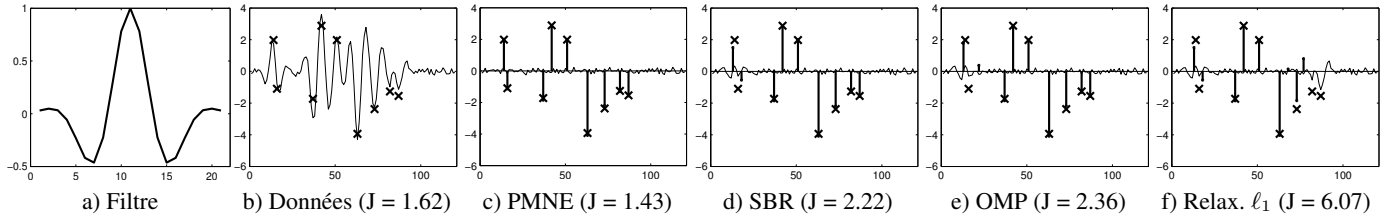


FIGURE 1 – Problème de déconvolution parcimonieuse. a) Réponse impulsionnelle h . b) Données (—) et vraie séquence composée de 9 pics (\times). c)-f) Solution exacte et différentes solutions approchées du problème $\mathcal{P}_{2/0}$ avec $K_2 = 9$: solution obtenue \hat{x} (\circ), vraie séquence (\times) et résidu d’estimation (—). J donne la valeur obtenue pour $\|y - H\hat{x}\|_2^2$ et la norme du bruit $\|e\|_2^2$ pour b).

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^Q, \mathbf{b} \in \{0;1\}^Q, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \sum_n w_n \text{ t.q. } \begin{cases} \sum b_q \leq K_1 \\ -\mathbf{w} \leq \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x} \leq \mathbf{w} \\ -M\mathbf{b} \leq \mathbf{x} \leq M\mathbf{b}. \end{cases}$$

5 Résultats

Les différentes formulations proposées sont mises en œuvre à base de PMNE sous IBM ILOG CPLEX. Les temps de calcul sont évalués sur des problèmes simulés de déconvolution parcimonieuse. La séquence $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{100}$ possède $K = 9$ composantes non nulles. Les positions et les amplitudes sont tirées aléatoirement – un exemple est présenté en figure 1. Le paramètre de chaque problème (ϵ_p , K_p ou λ_p) est réglé de manière à ce que toutes les solutions aient le bon nombre de composantes non nulles. La valeur de la borne M (voir § 4.1) a été réglée de façon heuristique, en l’initialisant à $\|\mathbf{H}^T \mathbf{y}\|_\infty / \|\mathbf{h}\|_2^2$. Si la borne est atteinte en la solution, la reformulation de la norme ℓ_0 vue au § 4.1 n’est pas valide. L’optimisation est alors relancée en multipliant M par 1.1, et ce autant de fois que nécessaire.

La table 1 présente le temps de calcul, moyenné sur 20 réalisations des données, pour chaque problème d’optimisation en fonction du niveau de bruit. La plupart des problèmes considérés ont été résolus en moins de 1000 secondes, mais tous les temps de calcul augmentent fortement avec le niveau de bruit. Pour une attache aux données ℓ_2 , la formulation $\mathcal{P}_{2/0}$ est la plus efficace alors que l’optimisation du critère à contrainte quadratique $\mathcal{P}_{0/2}$ s’avère très coûteuse. En norme ℓ_1 et ℓ_∞ , les formulations $\mathcal{P}_{0/p}$ s’avèrent de loin les plus efficaces, et sont les seules pour lesquelles la PMNE fournit une solution exacte en moins de 1000 s. Des résultats supplémentaires concernant les coûts de calcul peuvent être trouvés dans [9].

RSB	$\mathcal{P}_{0/2}$	$\mathcal{P}_{0/1}$	$\mathcal{P}_{0/\infty}$	$\mathcal{P}_{2/0}$	$\mathcal{P}_{1/0}$	$\mathcal{P}_{\infty/0}$	\mathcal{P}_{0+2}	\mathcal{P}_{0+1}	$\mathcal{P}_{0+\infty}$
30 dB	122	3	2.1	2.8	9.1	21	1.2	4.9	5.2
20 dB	243 ⁽³⁾	4.7	2.6	14	28	45 ⁽¹⁾	64	17 ⁽²⁾	121
10 dB	513 ⁽¹²⁾	21	45	35 ⁽¹⁾	182 ⁽¹⁾	206 ⁽⁴⁾	121 ⁽⁵⁾	234 ⁽²⁾	141 ⁽⁶⁾

TABLE 1 – Temps de calcul (s) pour l’optimisation des neuf problèmes reformulés en PMNE en fonction du rapport signal sur bruit, moyennés sur 20 réalisations des données. Entre parenthèses : nombre de réalisations n’ayant pas fourni de solution optimale en 1000 s.

La figure 1 compare les résultats, pour le problème $\mathcal{P}_{2/0}$ (à RSB = 20 dB) obtenus par PMNE et par quelques algorithmes courants en approximation parcimonieuse : SBR [10], OMP [3] et minimisation des moindres carrés pénalisés en norme ℓ_1 . Les solutions de SBR et OMP sont calculées de manière à com-

porter le bon nombre de pics. Pour l’approche en norme ℓ_1 , la solution est calculée pour l’ensemble des valeurs du paramètre de pénalisation [11]. Nous retenons ensuite, parmi les supports produisant des solutions à 9 pics, celui produisant la plus faible valeur du critère des moindres carrés. Alors que la solution par PMNE localise parfaitement les 9 pics, les trois algorithmes approchés produisent une valeur de critère bien plus élevée, et ne localisent correctement que 7 pics (pour OMP et SBR) et 5 pics (pour le critère pénalisé par la norme ℓ_1). Sur cet exemple, le nombre effectif de combinaisons évaluées sous CPLEX est d’environ $1.3 \cdot 10^6$, à comparer aux $C_{100}^9 \simeq 1.9 \cdot 10^{12}$ combinaisons possibles. Des simulations sur le même processeur ont permis d’estimer le temps de calcul pour l’ensemble des combinaisons à environ un an et demi.

Remerciements Ce travail a été réalisé dans le cadre d’un projet Jeunes Chercheurs du GdR ISIS et de l’association GRETSI (SB - JN). MM a été partiellement financé par l’Agence Nationale de la Recherche, projet JCJC ATOMIC 12-JS02-009-01.

Références

- [1] J Idier, Ed., *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*, Trait IC2, Série traitement du signal et de l’image, Hermès, Paris, 2001.
- [2] AJ Miller, *Subset Selection in Regression*, Chapman and Hall, London, UK, 2nd edition, 2002.
- [3] JA Tropp and SJ Wright, “Computational methods for sparse solution of linear inverse problems,” *Proc. IEEE*, vol. 98, no. 6, pp. 948–958, 2010.
- [4] H Mohimani, M Babaie-Zadeh, and C Jutten, “A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed ℓ^0 norm,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 1, pp. 289–301, 2009.
- [5] KK Herrity, AC Gilbert, and JA Tropp, “Sparse approximation via iterative thresholding,” in *Proc. IEEE ICASSP*, 2006, pp. 624–627.
- [6] RE Bixby, “A brief history of linear and mixed-integer programming computation,” *Doc. Math.*, vol. Optimization Stories, pp. 107–121, 2012.
- [7] RE Gomory, “Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 64, no. 5, pp. 275–278, 1958.
- [8] IF Gorodnitsky and BD Rao, “Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS : A re-weighted minimum norm algorithm,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, no. 3, pp. 600–616, 1997.
- [9] S Bourguignon, J Ninin, H Carfantan, and M Mongeau, “Exact resolution of sparse approximation problems via mixed-integer programming,” submitted to *IEEE Trans. Signal Process.*, 2015.
- [10] C Soussen, J Idier, D Brie, and J Duan, “From Bernoulli-Gaussian deconvolution to sparse signal restoration,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 59, no. 10, pp. 4572–4584, 2011.
- [11] DM Malioutov, M Çetin, and AS Willsky, “Homotopy continuation for sparse signal representation,” in *Proc. IEEE ICASSP*, 2005, pp. 733–736.