

# Modèle elliptique pour une transformée en ondelettes monogènes couleur

Raphaël SOULARD, Philippe CARRÉ

Laboratoire XLIM-SIC, UMR CNRS 7252  
Université de Poitiers - Blvd Curie Teleport 2 BP 30179, 86962 Futuroscope, France  
philippe.carre@univ-poitiers.fr - raphael.soulard@univ-poitiers.fr

**Résumé** – Nous nous intéressons dans cet article aux ondelettes analytiques couleur basées sur le signal monogène. Cette nouvelle approche dans les outils d’analyse d’un signal 2D permet une lecture géométrique et physique de l’image. Le but principal du papier est la proposition d’une nouvelle extension couleur de ce formalisme. Nous étudions un modèle d’atome de Fourier couleur elliptique, et proposons une transformée de Riesz couleur pour définir un signal monogène elliptique couleur. Dans le cadre des ondelettes, cette nouvelle représentation offre une analyse efficace des caractéristiques locales d’une image en termes de formes et de couleur à travers les concepts d’amplitude, d’orientation et de paramètres d’ellipse. Une application pour l’estimation de la fréquence instantanée (locale) couleur est alors décrite.

**Abstract** – This investigates color analytic wavelets based on the monogenic framework. This new approach towards analysis of 2D signals provides geometric and physical information from images. The main goal of the paper is to propose a new color extension of this formalism. A color elliptical Fourier atom model is studied, and a color Riesz transform is proposed so as to define a color elliptical monogenic signal. In the wavelet domain, this new representation offers an efficient analysis of images’ local features in terms of shape and color, through concepts of amplitude, phase, orientation and ellipse parameters. An application to color instantaneous (local) frequency estimation is given.

## 1 Introduction

Le point de départ de la représentation exposée dans cet article est l’extension du signal analytique. Une extension pour les images est fournie par le signal monogène, développé en détail par M. Felsberg [2] et reposant sur une généralisation isotrope de la transformée de Hilbert. Un second apport majeur est venu ces dernières années, de l’équipe de M. Unser [9], qui a proposé de nombreux développements autour des ondelettes monogènes adaptées pour les images en niveaux de gris. Il a été montré que l’extension des ondelettes à travers le concept monogène permet d’analyser plus finement la géométrie de l’image.

Après une présentation de la représentation monogène classique, nous proposons son extension à la couleur.

## 2 La transformée monogène

La définition du signal monogène utilise une généralisation de la transformée de Hilbert appelée transformée de Riesz. Si l’on applique la transformée de Riesz sur une image niveaux de gris  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  on obtient le signal à valeurs vectorielles dans  $\mathbb{R}^2$  suivant :

$$\mathbf{TR}[s](\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{TR}_1[s](\mathbf{x}) \\ \mathbf{TR}_2[s](\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * s \\ \frac{x_2}{2\pi\|\mathbf{x}\|^3} * s \end{pmatrix} \quad (1)$$

La transformée de Riesz est invariante par translation et changement d’échelle, et covariante par rotation. L’opérateur “spiral phase quadrature” proposé à la même époque que le signal monogène [4] mais dans le domaine de l’optique, est similaire. Le signal monogène est défini de façon analogue au signal analytique, en ce sens qu’il consiste en une combinaison du signal de départ  $s(\mathbf{x})$  avec sa transformée de Riesz :

$$s_M(\mathbf{x}) = ( s(\mathbf{x}) \quad \mathbf{TR}_1[s](\mathbf{x}) \quad \mathbf{TR}_2[s](\mathbf{x}) ) \quad (2)$$

Les caractéristiques locales interprétables s’obtiennent par la représentation polaire suivante :

$$s_M = ( A \cos \varphi \quad A \sin \varphi \cos \theta \quad A \sin \varphi \sin \theta ) \quad (3)$$

L’amplitude  $A$  et la phase  $\varphi$  sont analogues aux concepts connus dans le cas du signal analytique 1D. L’amplitude est une mesure d’énergie locale permettant de mettre en évidence la présence d’information. Dans le cas 2D, la phase porte une information géométrique qui permet de discriminer les contours de type “bord” des contours de type “ligne”. Enfin l’orientation locale  $\theta$  vient compléter la représentation par une information analogue à l’orientation d’un gradient [2], c’est-à-dire celle de direction locale dominante. La représentation monogène s’intègre naturellement dans une analyse multi-échelle. Dans le cadre des ondelettes, elle consiste en l’utilisation d’une ondelette primaire isotrope, dont la décomposition devra être combinée

avec celles de deux autres ondelettes obtenues par transformée de Riesz. Les trois sous-bandes produites à chaque échelles forment alors des signaux monogènes et peuvent être converties en amplitude, phase et orientation selon l'équation (3). Une décomposition sous forme de pyramide monogène a été proposée dans [9].

Toutefois se pose alors le problème de l'extension de cette représentation à la couleur et notamment la définition de notion de phase couleur. C'est l'objet de cet article, et nous proposons pour cela d'utiliser le modèle elliptique introduit par J. Lilly dans le contexte de la sismologie [5].

### 3 Représentation monogène couleur

Dans un précédent travail [6], nous avons développé une analyse monogène couleur autour des équations de Cauchy-Riemann, à la suite des travaux de [1]. Cette analyse doit être paramétrée par une couleur particulière, dépendante de l'application. Dans le but d'aboutir à une représentation plus universelle des images couleur, nous avons par la suite proposé une construction alternative utilisant la géométrie différentielle [8]. De cette proposition, des notions de phase, d'amplitude et de direction couleur ont été clairement définies. Nous avons également mené une discussion sur le calcul numérique de cette analyse avec la transformée de Radon [7].

Ici, nous proposons d'aller plus loin sur l'aspect couleur, en partant du concept d'atomes de Fourier. Le but de cette nouvelle approche est d'améliorer l'interprétation physique des différentes quantités produites par l'analyse monogène couleur.

#### 3.1 Atomes de Fourier

L'analyse de Fourier des signaux à valeurs vectorielles a été abordée ces dernières années notamment dans le cadre des Quaternions ou de l'algèbre de Clifford. Du point de vue du traitement d'images, l'aspect applicatif a souvent été limité par un manque d'interprétation intuitive des données obtenues. C'est pourquoi nous proposons ici de caractériser en détails un atome de Fourier couleur, classiquement défini par :

$$\mathbf{a}(t) = [ A^R \cos(\omega t + \varphi^R) \quad A^G \cos(\omega t + \varphi^G) \quad A^B \cos(\omega t + \varphi^B) ]^T$$

Avec l'analyse de Fourier classique utilisée sur chaque canal RGB, tout signal couleur peut être décomposé comme une somme d'atomes de Fourier. D'un atome peuvent être extraites trois amplitudes et trois phases, qui ne forment pas une lecture intuitive de l'information couleur. C'est pourquoi nous proposons de voir l'atome  $\mathbf{a}(t)$  comme la trajectoire d'un point dans le cube couleur. Nous l'illustrons sur la figure 1. Suivant cette approche, on peut montrer que  $\mathbf{a}(t)$  parcourt une ellipse dans le domaine RGB (dans un autre contexte voir [5]). Nous attendons de la

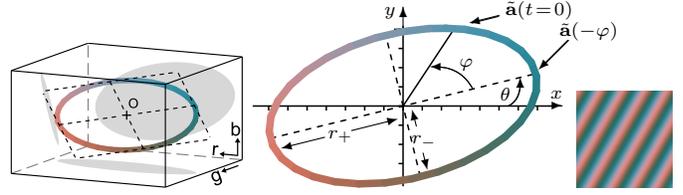


FIGURE 1 – Atome de Fourier Couleur (Trajectoire dans RGB, dans le plan, et atome 2D correspondant).

manipulation des paramètres de cette ellipse une meilleure compréhension non marginale de l'atome couleur.

#### 3.2 Le modèle elliptique

Lorsqu'une oscillation couleur est vue comme une ellipse, la notion d'amplitude peut naturellement être traduite par la *taille* de cette ellipse. Quant à la phase, elle est définie par la position relative du signal sur son parcours elliptique à  $t = 0$ , par rapport à l'apogée de l'ellipse, qui correspond à la "crête" de l'oscillation (voir figure 1). Il est attendu que les 4 autres paramètres de l'ellipse portent des informations de colorimétrie.

Une méthode de calcul des paramètres elliptiques à partir de trois analyses de Fourier indépendantes a été proposée dans le contexte d'analyse de trajectoire de particules en sismologie [5]. Nous proposons d'en revoir ici les relations principales, en partant des 6 paramètres "marginiaux"  $A^R, \varphi^R, A^G, \varphi^G, A^B$  et  $\varphi^B$  qui caractérisent la trajectoire de l'atome  $\mathbf{a}(t)$ .

Tout d'abord  $\mathbf{a}(t)$  admet le vecteur normal :

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A^G A^B \sin(\varphi^G - \varphi^B) \\ A^R A^B \sin(\varphi^B - \varphi^R) \\ A^R A^G \sin(\varphi^R - \varphi^G) \end{bmatrix} = \|\mathbf{n}\| \begin{bmatrix} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ -\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Le plan contenant l'ellipse est paramétré par  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

Ensuite en considérant la taille de l'ellipse à travers le plus grand rayon et le plus petit rayon notés  $r_+$  et  $r_-$  (figure 1), nous pouvons exprimer l'amplitude  $A$  et le paramètre de linéarité  $\lambda$  :

$$A = \sqrt{(A^R)^2 + (A^G)^2 + (A^B)^2} = \sqrt{r_+^2 + r_-^2} \quad (5)$$

$$\lambda = \sqrt{1 - 4 \frac{\|\mathbf{n}\|^2}{A^4}} = \frac{r_+^2 - r_-^2}{r_+^2 + r_-^2} \quad (6)$$

La rotation de l'ellipse dans le plan est mesurée par le troisième angle  $\alpha_3$ , calculé en même temps que la phase  $\varphi$  :

$$\alpha_3 = (\arg(\tilde{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{j}\tilde{\mathbf{a}}_2) - \arg(\tilde{\mathbf{a}}_1 - \mathbf{j}\tilde{\mathbf{a}}_2))/2$$

$$\varphi = (\arg(\tilde{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{j}\tilde{\mathbf{a}}_2) + \arg(\tilde{\mathbf{a}}_1 - \mathbf{j}\tilde{\mathbf{a}}_2))/2$$

où  $\tilde{\mathbf{a}}_1$  et  $\tilde{\mathbf{a}}_2$  sont définis par la rotation suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 \\ \tilde{\mathbf{a}}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 \\ -\cos \alpha_2 \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^R e^{\mathbf{j}\varphi^R} \\ A^G e^{\mathbf{j}\varphi^G} \\ A^B e^{\mathbf{j}\varphi^B} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Comme nous l'avons indiqué, il peut être vérifié que la phase  $\varphi$  est telle que  $\mathbf{a}(-\varphi)$  coïncide avec l'apogée de l'ellipse *i.e.*  $\|\mathbf{a}(-\varphi)\| = r_+$ . Pour plus de détails sur cette construction, nous renvoyons le lecteur à la référence [5].

Grâce à ce modèle elliptique, nous pouvons convertir les coefficients de Fourier calculés sur chacun des canaux en des informations intuitives d'amplitude et de phase complétées par une information colorimétrique  $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Nous sommes alors maintenant capables de définir un signal analytique couleur.

### 3.3 Signal analytique couleur

Le signal analytique permet une extraction de l'amplitude et de la phase locale sous l'hypothèse que le signal analysé "ressemble" à un atome de la forme  $a(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ . Dans le cas d'un signal couleur  $\mathbf{s}(t) = [s^r(t) \ s^g(t) \ s^b(t)]$  on peut définir une extension couleur en utilisant une transformée de Hilbert (notée  $\mathcal{H}$ ) sur chacun des canaux. Cette nouvelle représentation peut alors se mettre sous la forme d'un modèle elliptique :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_A(t) &= [s^r(t) \ s^g(t) \ s^b(t) \ \mathcal{H}s^r(t) \ \mathcal{H}s^g(t) \ \mathcal{H}s^b(t)] \\ &\rightarrow [A(t) \ \varphi(t) \ \lambda(t) \ \alpha_1(t) \ \alpha_2(t) \ \alpha_3(t)] \quad (8) \end{aligned}$$

Bien sûr, maintenant les paramètres de l'ellipse dépendent du temps. Nous illustrons sur la figure 2 un exemple de signal synthétique couleur 1D présentant des caractéristiques qui évoluent au cours du temps. Sur cette même figure, nous illustrons le chemin couleur tracé dans l'espace RGB, ainsi que les mesures de phase  $\varphi$  et d'amplitude  $A$  déduites. On peut constater sur cet exemple 1D que la phase es-

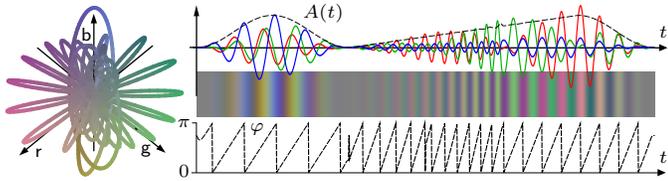


FIGURE 2 – Signal 1D couleur, amplitude et phase.

timée est très stable et correspond à la mesure attendue : à savoir d'une manière synthétique, puisque la fréquence du signal analysé évolue d'une manière régulière, la phase doit être localement linéaire ce qui est le cas. De plus, la pente de la phase est en accord avec la fréquence instantanée du signal. Notons que la qualité de l'estimation de la phase est une conséquence directe de l'utilisation du modèle elliptique et nous permet d'obtenir un calcul de la phase bien plus stable que dans nos travaux précédents.

Nous proposons maintenant de combiner ce nouveau formalisme avec la transformée de Riesz présentée dans le premier paragraphe afin d'obtenir une représentation monogène elliptique adaptée aux images couleur.

### 3.4 Transformée de Riesz couleur

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié comment analyser un signal couleur en le combinant avec sa version déphasée pour chaque canal (déphasage réalisé par la transformée de Hilbert  $\mathcal{H}$ ), suivant le formalisme du signal analytique. L'extension à l'image va suivre le même principe à travers l'utilisation du formalisme monogène, en combinant le signal avec sa transformée de Riesz. Il reste cependant une difficulté, les deux composantes de la transformée de Riesz  $\mathbf{TR}_1[s]$  et  $\mathbf{TR}_2[s]$  ne peuvent pas remplacer directement les termes  $\mathcal{H}s$  dans l'équation (8).

Nous proposons alors d'utiliser la transformée de Riesz directionnelle définie pour un signal scalaire 2D suivant une direction fixée  $\theta_+$  :

$$\mathbf{TR}_{\theta_+}[s] = \cos(\theta_+) \mathbf{TR}_1[s] + \sin(\theta_+) \mathbf{TR}_2[s] \quad (9)$$

La transformée de Riesz est ici utilisée comme une paire de filtres orientables ("steerable"). Le résultat est donc une version déphasée du signal 2D dans la direction  $\theta_+$ . Fait d'une seule composante, il peut donc être utilisé directement dans le modèle elliptique.

Il reste maintenant à définir la direction d'analyse  $\theta_+$  adaptée au but recherché : fournir une analyse fine des structures locales du signal couleur. Dans le cas scalaire, le choix naturel  $\theta_+ = \arg\{\mathbf{TR}_1[s] + \mathbf{jTR}_2[s]\}$  aboutit exactement au signal monogène classique. Dans le cas couleur, nous proposons d'estimer une unique direction pour les trois canaux RGB, ce qui correspond à une modélisation directionnelle des structures locales du signal. La méthode connue en détection de contours est celle du gradient couleur de Di Zenzo, qui sous-tend une maximisation de la variation locale en termes de distances couleur Euclidiennes.

Du fait du lien fort existant entre l'opérateur gradient et la transformée de Riesz [3], nous avons introduit un tenseur de structure couleur basé Riesz qui fournit la direction principale suivante :

$$\theta_+ = \frac{1}{2} \text{atan2} \left( \frac{h * \sum_{C \in \{R,G,B\}} (\mathbf{TR}_1[s^C])^2 - (\mathbf{TR}_2[s^C])^2}{h * \sum_{C \in \{R,G,B\}} 2 (\mathbf{TR}_1[s^C])(\mathbf{TR}_2[s^C])} \right) \quad (10)$$

où  $h$  est un noyau lissant (voir [8] pour plus de détails).

En utilisant cette direction d'analyse nous pouvons introduire une représentation monogène elliptique couleur.

### 3.5 Ondelettes monogènes couleur

La transformée en ondelettes monogènes couleur doit être basée sur des filtres passe-bande 2D isotropes, ce qui nous incite à utiliser des ondelettes 2D non séparables. Chaque sous-bande couleur obtenue par application indépendante de la transformée classique sur chaque canal RGB, peut alors être analysée à travers le modèle monogène elliptique présenté plus haut. Nous illustrons sur la figure 3 la représentation complète d'une image couleur  $\mathbf{s}$  pour la  $i$ -ème bande. Les parties issues de la transformée de Riesz  $\mathbf{TR}[\mathbf{s}_i]$  montrent le déphasage selon  $x$  et  $y$ .

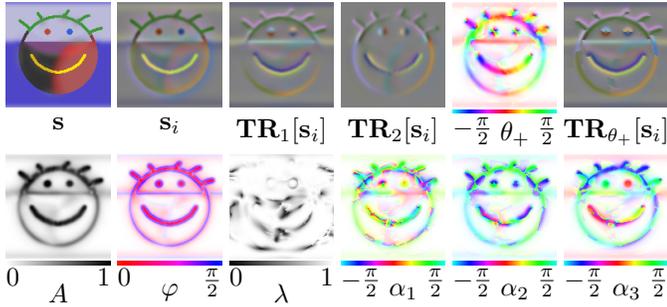


FIGURE 3 – Signal monogène elliptique couleur.

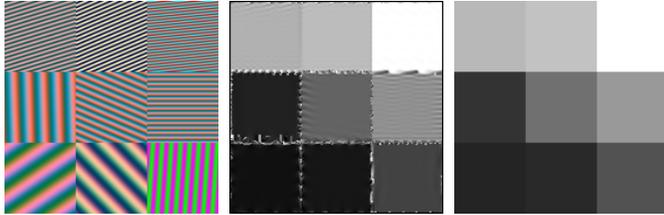


FIGURE 4 – Estimation de fréquence locale (image couleur de synthèse, estimation, référence théorique).

L’orientation du tenseur  $\theta_+$  illustré sur la figure est en accord avec notre perception, à savoir qu’il suit les ruptures présentes dans l’image. Dans ce cas, la transformée de Riesz directionnelle  $\mathbf{TR}_{\theta_+}[\mathbf{s}_i]$  permet bien un déphasage suivant la direction de variation couleur principale. Si l’on étudie les paramètres du modèle elliptique, l’amplitude  $A$  détecte bien les structures alors que la phase permet une caractérisation de leurs formes. Le paramètre de linéarité  $\lambda$  est proche de 1 indiquant que nous sommes en présence de “simples” oscillations couleur.

Nous ne pouvons dans le cadre de cet article développer plus en avant l’analyse de la décomposition. L’objectif atteint est la proposition d’une méthode numérique stable et rapide de calcul d’une transformée en ondelettes monogènes couleur. Il reste toutefois de nombreuses questions ouvertes, notamment dans l’interprétation que l’on peut donner à cette traduction riche de l’information.

Cette représentation est maintenant la base de différents travaux, nous menons par exemple actuellement une étude autour de l’estimation de la fréquence instantanée sur une image couleur pour des problématiques de segmentation. Il est bien connu dans la littérature du traitement du signal que la fréquence instantanée peut s’obtenir par dérivée de la phase locale. Or, la représentation proposée ici donne un accès direct à cette phase pour des images couleur. Nous illustrons sur la figure 4 un premier exemple d’estimation de la fréquence locale sur une image couleur de synthèse contenant des fréquences bien définies.

Le résultat est satisfaisant car il est numériquement stable, et ne comporte pas de biais : les valeurs moyennes mesurées correspondent bien aux valeurs théoriques.

## 4 Conclusion

Nous avons défini une nouvelle transformée en ondelettes monogènes couleur qui produit dans chaque sous-bande des coefficients vectoriels composés par des informations géométriques comme l’amplitude, la phase et l’orientation locales, ainsi que des informations colorimétriques portées par les paramètres elliptiques du modèle proposé. Les composants principaux de cette définition sont le modèle elliptique d’atome de Fourier couleur, la transformée de Riesz directionnelle et le tenseur de structure couleur. La construction est motivée par l’interprétation physique des données à travers une définition couleur réellement non-marginale qui aboutit à des informations séparées et complémentaires. La dérivée de la phase semble pouvoir être calculée numériquement pour obtenir un nouveau type d’information : la fréquence locale couleur. Ce travail pourrait donner naissance à une nouvelle génération de méthodes d’analyse type SIFT.

R. Soulard est financé en partie par Crescen2o.

## Références

- [1] G. Demarcq, L. Mascarilla, M. Berthier, and P. Courtellemont. The color monogenic signal : Application to color edge detection and color optical flow. *J. Math. Im. Vis. (JMIV)*, 40(3) :269–284, 2011.
- [2] M. Felsberg and G. Sommer. The monogenic signal. *IEEE Trans. Signal Process.*, 49(12) :3136–3144, 2001.
- [3] U. Köthe and M. Felsberg. Riesz-transforms versus derivatives : On the relationship between the boundary tensor and the energy tensor. In *Proc. Scale-Space, LNCS 3459*, pages 179–191. Springer, 2005.
- [4] K. G. Larkin, D. Bone, and M. A. Oldfield. Natural demodulation of two-dimensional fringe patterns. *J. Opt. Soc. Am.*, 18 (8) :1862–1870, 2001.
- [5] J. M. Lilly. Modulated oscillations in three dimensions. *IEEE Trans. Signal Process.*, 59(12) :5930–5943, 2011.
- [6] R. Soulard and P. Carré. Color monogenic wavelets for image analysis. In *Proc. IEEE Int’l Conf. on Image Processing*, pages 277–280, Brussels, Sep. 2011.
- [7] R. Soulard and P. Carré. A discrete approach to monogenic analysis through radon transform. In *Proc. App. Geom. Alg. in Comp. Sci. and Eng.*, number 40, La Rochelle, France, Jul. 2012.
- [8] R. Soulard, P. Carré, and C. Fernandez-Maloigne. Vector extension of monogenic wavelets for geometric representation of color images. *IEEE Trans. Image Process.*, 22(3) :1070–1083, Mar. 2013.
- [9] M. Unser, D. Sage, and D. Van De Ville. Multi-resolution monogenic signal analysis using the riesz-laplace wavelet transform. *IEEE Trans. Image Process.*, 18(11) :2402–2418, 2009.