

Détection quantique optimale sur un qubit bruité

François CHAPEAU-BLONDEAU

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS),
Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.

chapeau@univ-angers.fr

Résumé – Nous commençons par rappeler la théorie de la détection quantique, en l'exposant en parallélisme avec la théorie de la détection classique qui est usuelle en traitement du signal. Cette théorie quantique établit comment discriminer optimalement entre deux états accessibles à un système quantique, ceci en représentant de façon générique chacun des deux états quantiques par un opérateur densité. Une originalité ici, issue d'une vision commune en traitement du signal, est de considérer que les deux opérateurs densité à discriminer sont des états quantiques bruités. Ils sont réalisés par deux opérateurs densité initiaux, qui sont ensuite affectés par un bruit quantique, avant de devenir accessibles pour la détection. On peut donc aborder une optimisation plus poussée de la détection quantique, où en présence d'un bruit quantique spécifié, on recherche la paire d'états initiaux maximisant la performance de détection à partir de mesures bruitées. Nous accomplissons ici cette optimisation pour un qubit bruité. Ceci nous permet donc aussi de préciser cette notion de qubit bruité, en s'appuyant sur une présentation de l'approche générale pour décrire le bruit quantique affectant un système quantique, et s'apparentant notamment à la décohérence.

Abstract – First we briefly review the theory of quantum detection, through a presentation paralleling the theory of classical detection which is common in signal processing. This quantum theory establishes how to optimally discriminate between two states accessible to a quantum system, this by generically representing each of the two states by a density operator. An originality here, stemming from a standard vision in signal processing, is to consider that the two density operators to discriminate are noisy quantum states. They are realized by two initial density operators, which are then affected by a quantum noise, before they become accessible for detection. It is thus possible to address a further optimization of quantum detection, where in the presence of a specified quantum noise, one seeks the pair of initial states maximizing the detection performance from noisy measurements. We achieve here this optimization for a noisy qubit. This allows us also to specify the notion of noisy qubit, based on a presentation of the general approach to describe a quantum noise affecting a quantum system, related especially to decoherence.

1 Introduction

Les domaines récents de l'information quantique et du calcul quantique présentent de larges potentialités pour les sciences et technologies de l'information [1, 2]. On arrive à ce niveau quantique lorsque l'on pousse les dispositifs physiques vers leurs limites, par la miniaturisation et autres avancées technologiques. On y vient aussi pour tirer parti de phénomènes et ressources spécifiquement quantiques, inexistantes en classique, et qui recèlent des possibilités radicalement nouvelles pour le traitement de l'information [1, 2]. Le traitement du signal, qui s'intéresse à la fois aux dispositifs physiques pour l'observation et la mesure, ainsi qu'aux traitements et technologies de l'information associés, est naturellement concerné par ces évolutions vers le quantique. Dans cette perspective, nous abordons ici une problématique de référence en traitement du signal, la détection sur des signaux bruités, qui est étendue dans un cadre quantique. La détection ou discrimination d'états quantiques, ainsi que la prise en compte du bruit quantique comme les effets de la décohérence, constituent des problématiques fondamentales pour l'information quantique, et qui se trouvent toujours en cours d'investigation pour une meilleure maîtrise [1, 2]. Nous adoptons ici une orientation "signal", à la fois pour une présentation de la détection et du bruit en quantique, ainsi que pour un angle de vue original sur la détection à partir d'un système quantique bruité.

2 Détection quantique optimale

Nous exposons ici la théorie de la détection quantique en la référant, en parallélisme, à la théorie de la détection classique qui est usuelle en traitement du signal [3]. En théorie de

la détection classique, on considère un jeu de données $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^\top$ formé de N valeurs scalaires issues d'une mesure généralement bruitée. Le jeu de données mesuré \vec{x} a été produit sous l'une ou l'autre de deux hypothèses notées H_0 et H_1 , ceci avec les probabilités a priori P_0 et $P_1 = 1 - P_0$. À partir d'une mesure \vec{x} réalisée, il s'agit de décider (détecter) efficacement, voire optimalement, si cette mesure \vec{x} a été produite sous H_0 ou bien sous H_1 . En général, il est possible d'établir la probabilité $p(\vec{x}|H_j)$ qu'une mesure \vec{x} ait été produite sous l'hypothèse H_j , pour $j = 0, 1$. Une façon signifiante d'évaluer la performance considère la probabilité d'erreur de détection P_{er} (bien que d'autres indices de performance puissent aussi être considérés). Il est alors possible d'établir la stratégie de détection optimale qui minimise P_{er} . Cette stratégie évalue une fonction scalaire de la mesure \vec{x} , une statistique de test, $T(\vec{x})$, définie comme

$$T(\vec{x}) = P_1 p(\vec{x}|H_1) - P_0 p(\vec{x}|H_0), \quad (1)$$

et si $T(\vec{x})$ est trouvée > 0 alors le détecteur optimal décide l'hypothèse H_1 , dans le cas contraire ($T(\vec{x}) \leq 0$) il décide H_0 . Ce faisant, le détecteur optimal atteint le minimum de la probabilité d'erreur exprimable [4] par l'intégrale multiple sur l'espace de mesure \mathbb{R}^N ,

$$P_{er}^{\min} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |T(\vec{x})| d\vec{x}. \quad (2)$$

Usuellement en détection classique, la statistique de test est plutôt choisie comme le rapport de vraisemblance $T(\vec{x}) = p(\vec{x}|H_1)/p(\vec{x}|H_0)$ qui est comparé au seuil de décision P_0/P_1 pour détecter optimalement d'une façon équivalente. Toutefois, c'est la forme des Éqs. (1) puis (2) qui se retrouve mieux en détection quantique.

En détection quantique [5], la mesure opère sur un système quantique existant dans un espace de Hilbert \mathcal{H}_N de dimension N sur \mathbb{C} . Ce système quantique peut se trouver dans l'un ou l'autre de deux états quantiques, représentés en général par deux opérateurs densité ρ_0 et ρ_1 , qui sont deux opérateurs linéaires (matrices $N \times N$) hermitiques positifs de trace unité sur \mathcal{H}_N . De par sa préparation, le système quantique peut donc se trouver dans l'état ρ_0 avec la probabilité a priori P_0 , ou bien dans l'état ρ_1 avec la probabilité a priori $P_1 = 1 - P_0$. On envisage de faire une mesure sur le système quantique afin de décider s'il a été préparé dans l'état ρ_0 ou ρ_1 . On souhaite donc une mesure à deux résultats possibles, qui peut en quantique être constituée par un ensemble de deux projecteurs sur deux sous-espaces orthogonaux de \mathcal{H}_N , ou bien plus généralement, comme on le considère ici, par un ensemble de deux opérateurs positifs $\{M_0, M_1\}$ réalisant une décomposition de l'identité dans \mathcal{H}_N , c'est-à-dire vérifiant $M_0 + M_1 = I_N$. Le résultat de la mesure présente un caractère probabiliste inhérent à sa nature quantique. La détection optimale consiste à trouver les deux opérateurs de mesure $\{M_0, M_1\}$ minimisant la probabilité d'erreur de détection P_{er} .

Lorsque le système quantique se trouve dans l'état ρ_j , $j = 0$ ou 1 , la probabilité d'obtenir le résultat de mesure correspondant à l'opérateur de mesure M_k , $k = 0$ ou 1 , est donnée par la théorie quantique [1] comme la trace d'opérateur

$$\Pr\{M_k|\rho_j\} = \text{tr}(\rho_j M_k), \quad j = 0, 1, \quad k = 0, 1. \quad (3)$$

La probabilité d'erreur de détection, qui est définie selon la forme usuelle $P_{\text{er}} = \Pr\{M_1|\rho_0\}P_0 + \Pr\{M_0|\rho_1\}P_1$, vérifie donc, de par la linéarité de la trace,

$$P_{\text{er}} = \text{tr}(\rho_0 M_1)P_0 + \text{tr}(\rho_1 M_0)P_1 \quad (4)$$

$$= \text{tr}[\rho_0 M_1 P_0 + \rho_1 (I_N - M_1) P_1] \quad (5)$$

$$= P_1 - \text{tr}[(P_1 \rho_1 - P_0 \rho_0) M_1], \quad (6)$$

puisque $M_0 = I_N - M_1$ et $\text{tr}(\rho_j) = 1$ pour $j = 0, 1$. On introduit alors en quantique l'opérateur (hermitique) de test

$$T = P_1 \rho_1 - P_0 \rho_0, \quad (7)$$

qui constitue le pendant de la statistique de test scalaire $T(\vec{x})$ de l'Éq. (1) en classique. La probabilité d'erreur de l'Éq. (6) s'écrit alors

$$P_{\text{er}} = P_1 - \text{tr}(T M_1). \quad (8)$$

Nous cherchons donc l'opérateur positif M_1 , avec $0 \leq M_1 \leq I_N$, qui minimise P_{er} de l'Éq. (8), ce qui revient à trouver M_1 qui maximise $\text{tr}(T M_1)$ dans l'Éq. (8). On introduit alors la décomposition spectrale (la forme diagonale) de l'opérateur hermitique de test

$$T = \sum_{n=1}^N \lambda_n |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n| \quad (9)$$

sur la base orthonormée de ses N états propres $\{|\lambda_n\rangle\}$ associés aux N valeurs propres $\{\lambda_n\}$. Il vient alors

$$\text{tr}(T M_1) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \text{tr}(|\lambda_n\rangle \langle \lambda_n| M_1) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle \lambda_n | M_1 | \lambda_n \rangle. \quad (10)$$

Dans l'Éq. (10), chaque scalaire $\langle \lambda_n | M_1 | \lambda_n \rangle$ est un réel entre 0 and 1, car M_1 est un opérateur positif vérifiant $0 \leq M_1 \leq I_N$. Pour tout n , le maximum de 1 est atteint par $\langle \lambda_n | M_1 | \lambda_n \rangle$ quand M_1 est le projecteur $|\lambda_n\rangle \langle \lambda_n|$ sur le sous-espace propre engendré par $|\lambda_n\rangle$. L'opérateur de mesure M_1 maximisant la

somme de l'Éq. (10) est donc constitué en sommant tous les projecteurs $|\lambda_n\rangle \langle \lambda_n|$ associés à toutes les valeurs propres $\lambda_n > 0$, c'est-à-dire

$$M_1^{\text{opt}} = \sum_{\lambda_n > 0} |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n|, \quad (11)$$

pour ainsi atteindre pour $\text{tr}(T M_1)$ dans l'Éq. (10) le maximum $\sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n$. L'opérateur de mesure optimal M_1^{opt} qui permet de minimiser la probabilité d'erreur de détection P_{er} , est donc déterminé par l'Éq. (11) comme le projecteur sur le sous-espace propre de l'opérateur de test T engendré par les états propres $|\lambda_n\rangle$ associés aux valeurs propres $\lambda_n > 0$. L'opérateur complémentaire $M_0^{\text{opt}} = I_N - M_1^{\text{opt}}$ requis pour définir une mesure quantique valide, est donc le projecteur sur le sous-espace propre orthogonal (celui associé aux valeurs propres $\lambda_n \leq 0$). Cette caractérisation du détecteur quantique optimal fait le pendant au détecteur classique opérant dichotomiquement sur la statistique de test $T(\vec{x})$ comme décrit juste après l'Éq. (1).

Puisque $\text{tr}(T) = P_1 - P_0 = \sum_{n=1}^N \lambda_n$, le détecteur quantique optimal $\{M_0^{\text{opt}}, M_1^{\text{opt}}\}$ atteint le minimum de la probabilité d'erreur P_{er} exprimable comme

$$P_{\text{er}}^{\text{min}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^N |\lambda_n| \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{tr}(|T|), \quad (12)$$

qui fait le pendant avec la performance classique de l'Éq. (2).

La théorie de la détection quantique exposée ici est connue depuis en particulier la monographie [5], tout en recevant encore des développements [6, 7, 8]. Elle représente de façon générique les états quantiques par des opérateurs densité, sans préciser davantage leur constitution. Un point de vue complémentaire que nous allons adopter ici, et qui est commun dans une vision "signal", est de considérer que les opérateurs densité à discriminer en détection sont constitués par deux opérateurs densité initiaux contrôlés (*signaling states*), qui sont ensuite affectés par un bruit quantique, avant de devenir accessibles pour la détection. Les deux états quantiques pour effectuer la discrimination seront donc des états bruités, toujours représentables par deux opérateurs densité, mais au sujet desquels on dispose d'une caractérisation où interviennent d'une part les états initiaux non bruités et d'autre part le bruit quantique. On sera donc en position d'aborder une optimisation complémentaire de la détection quantique, en présence d'un bruit quantique spécifié, visant à établir la paire d'états initiaux maximisant la performance de la détection effectuée à partir de mesures bruitées.

Cette approche requiert notamment de se référer à une caractérisation explicite du bruit quantique. Nous allons la mener à bien ici sur un système quantique qui est un qubit, pour lequel les modèles pertinents de bruit quantique peuvent être traités analytiquement de façon explicite.

3 Détection sur un qubit bruité

Nous considérons le qubit, un système quantique de dimension $N = 2$ existant dans \mathcal{H}_2 , représentant par exemple les deux états de polarisation d'un photon ou de spin d'un électron. Pour le qubit, les deux états (ρ_0, ρ_1) introduits dans la Section 2 peuvent de façon générale être paramétrés en représentation de Bloch comme [1]

$$\rho_j = \frac{1}{2} \left(I_2 + \vec{r}_j \cdot \vec{\sigma} \right), \quad j = 0, 1, \quad (13)$$

avec les deux vecteurs de Bloch \vec{r}_j de \mathbb{R}^3 de norme euclidienne $\|\vec{r}_j\| \leq 1$, et $\vec{\sigma}$ un vecteur assemblant les trois matrices 2×2

de Pauli $[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z] = \vec{\sigma}$. Pour un état pur $\|\vec{r}_j\| = 1$ alors que $\|\vec{r}_j\| < 1$ pour un état mélangé. L'opérateur de test de l'Éq. (7) est alors en représentation de Bloch

$$T = \frac{1}{2} \left[(P_1 - P_0)I_2 + \vec{r} \vec{\sigma} \right], \quad (14)$$

caractérisé par le vecteur de Bloch test

$$\vec{r} = P_1 \vec{r}_1 - P_0 \vec{r}_0 = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^\top. \quad (15)$$

Les deux valeurs propres de T sont $\lambda_{\pm} = (P_1 - P_0 \pm \|\vec{r}\|)/2$, et les deux projecteurs sur les deux états propres $|\lambda_{\pm}\rangle$ orthogonaux dans \mathcal{H}_2 sont $|\lambda_{\pm}\rangle \langle \lambda_{\pm}| = (I_2 \pm \vec{r} \vec{\sigma} / \|\vec{r}\|)/2$, ce qui caractérise complètement le détecteur quantique optimal de la Section 2. Notamment sa performance de l'Éq. (12) est

$$P_{\text{er}}^{\text{min}} = \frac{1}{2} \left(1 - \|\vec{r}\| \right), \quad \text{si } \|\vec{r}\| \geq |P_1 - P_0|, \quad (16)$$

$$P_{\text{er}}^{\text{min}} = \min(P_0, P_1), \quad \text{si } \|\vec{r}\| < |P_1 - P_0|. \quad (17)$$

La spécificité ici est que nous considérons un bruit quantique qui va affecter le qubit préalablement à sa détection. D'une façon générale, un bruit quantique qui agit sur un système quantique transforme son état quantique ρ (un opérateur densité sur \mathcal{H}_N) en un état quantique bruité ρ' (un autre opérateur densité sur \mathcal{H}_N) selon une opération quantique linéaire et préservant la trace, qui peut s'écrire [1, 2]

$$\rho \longrightarrow \rho' = \mathcal{N}(\rho) = \sum_{\ell} \Lambda_{\ell} \rho \Lambda_{\ell}^{\dagger}. \quad (18)$$

Les Λ_{ℓ} dans l'Éq. (18) sont des opérateurs linéaires (opérateurs de Kraus) sur \mathcal{H}_N , qui vérifient $\sum_{\ell} \Lambda_{\ell}^{\dagger} \Lambda_{\ell} = I_N$; ils spécifient le bruit quantique en présence, et n'ont pas besoin d'être plus de N^2 pour décrire en toute généralité un bruit quantique affectant un système quantique dans \mathcal{H}_N . Pour le qubit dans \mathcal{H}_2 , l'action du bruit quantique de l'Éq. (18) est équivalente à une transformation affine [1] des vecteurs de Bloch de \mathbb{R}^3 ,

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = A\vec{r} + \vec{c}, \quad (19)$$

où A est une matrice 3×3 réelle et \vec{c} un vecteur de \mathbb{R}^3 qui ensemble caractérisent le bruit quantique affectant le qubit. Ainsi, on considère ici que la détection optimale opère, non plus sur les deux états quantiques initiaux (ρ_0, ρ_1) issus de l'Éq. (13), mais sur leur version bruitée $[\rho'_0 = \mathcal{N}(\rho_0), \rho'_1 = \mathcal{N}(\rho_1)]$, en présence d'un bruit quantique $\mathcal{N}(\cdot)$ caractérisé. Le vecteur de Bloch test \vec{r} de l'Éq. (15) qui contrôle la détection sur le qubit, devient pour le qubit bruité

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = A\vec{r} + \vec{c}', \quad (20)$$

avec $\vec{c}' = (P_1 - P_0)\vec{c}$. La caractérisation des Éqs. (15)–(17) du détecteur optimal reste la même, sauf qu'elle se base maintenant, non plus sur \vec{r} , mais sur \vec{r}' pour le qubit bruité. D'après les Éqs. (16)–(17), minimiser l'erreur du détecteur optimal opérant sur le qubit bruité, revient à maximiser la norme $\|\vec{r}'\|$, ou équivalentement $\|\vec{r}'\|^2$ donné via l'Éq. (20) par

$$\|\vec{r}'\|^2 = \vec{r}'^\top \vec{r}' = \|A\vec{r}\|^2 + 2\vec{v}^\top \vec{r} + \|\vec{c}'\|^2, \quad (21)$$

avec dans \mathbb{R}^3 le vecteur $\vec{v} = A^\top \vec{c}'$. Il s'agit donc de déterminer les deux états initiaux (ρ_0, ρ_1) , via leurs deux vecteurs de Bloch (\vec{r}_0, \vec{r}_1) associés au vecteur test \vec{r} de l'Éq. (15), pour réaliser le maximum de $\|\vec{r}'\|^2$ dans l'Éq. (21), sous la contrainte $\|\vec{r}\|^2 \leq 1$ car les vecteurs de Bloch (\vec{r}_0, \vec{r}_1) sont au plus de norme unité. On optimise ainsi la paire d'états initiaux (ρ_0, ρ_1) pour maximiser la performance du détecteur optimal opérant sur le qubit bruité par un bruit quantique caractérisé par A et \vec{c} donnés depuis l'Éq. (19). Nous illustrons maintenant la démarche sur un modèle de bruit spécifique et d'intérêt important pour le qubit.

4 Optimisation avec un bruit thermique

Nous considérons que le qubit est affecté par un bruit thermique aussi connu dans la littérature comme le *generalized amplitude damping noise* [1], et caractérisé par

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix}, \quad (22)$$

et $\vec{c} = [0, 0, (2p-1)\gamma]^\top$. Ce modèle de bruit quantique décrit l'interaction du qubit avec un bain thermique à une température T . Le paramètre $\gamma \in [0, 1]$ est un facteur d'amortissement qui souvent peut s'exprimer [1] en fonction du temps t d'interaction du qubit avec le bain thermique comme $\gamma = 1 - e^{-t/T_1}$, où T_1 est une constante de temps pour l'interaction (comme le temps de relaxation T_1 d'un spin en résonance magnétique). Aux longs temps d'interaction $t \rightarrow \infty$, il vient $\gamma \rightarrow 1$ et l'état quantique $\mathcal{N}(\rho)$ du qubit bruité relaxe vers l'état d'équilibre $\rho_{\infty} = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$. Dans cet état mélangé ρ_{∞} , le qubit présente une probabilité p d'être mesuré dans l'état quantique $|0\rangle$, et une probabilité $1-p$ d'être mesuré dans l'état quantique $|1\rangle$. On peut introduire les énergies E_0 et $E_1 \geq E_0$ pour respectivement les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Les probabilités à l'équilibre sont gouvernées par la distribution de Boltzmann, $p = \exp[-E_0/(k_B T)]/Z$ et $1-p = \exp[-E_1/(k_B T)]/Z$ avec $Z = \exp[-E_0/(k_B T)] + \exp[-E_1/(k_B T)]$. Dans le modèle de bruit thermique, la probabilité p est ainsi fixée par la température T du bain thermique. À $T = 0$ on a $p = 1$ et le qubit relaxe vers l'état pur fondamental $|0\rangle$, alors qu'à $T \rightarrow \infty$ on a $p \rightarrow 1/2$ et le qubit relaxe vers l'état maximalement mélangé $(|0\rangle\langle 0| + (|1\rangle\langle 1|))/2 = I_2/2$.

L'Éq. (19) en général incorpore une matrice A qui présente, comme cela est visible avec l'Éq. (22), un caractère contractant pour la norme $\|\vec{r}\|$, et en particulier transforme un état pur à $\|\vec{r}\| = 1$ en un état mélangé à $\|\vec{r}'\| < 1$, matérialisant un caractère aléatoire résultant de l'action du bruit.

La maximisation de $\|\vec{r}'\|^2$ de l'Éq. (21) est alors accomplie par le vecteur $\vec{r} = \vec{r}^{\text{opt}}$ défini par les composantes

$$\tau_z = \tau_z^{\text{opt}} = (P_1 - P_0)(2p - 1), \quad \tau_x^2 + \tau_y^2 = 1 - \tau_z^2, \quad (23)$$

qui atteint le maximum

$$\|\vec{r}'\|_{\text{max}}^2 = 1 - \gamma \left[1 - (P_1 - P_0)^2 (2p - 1)^2 \right] \quad (24)$$

utilisable avec les Éqs. (16)–(17) pour exprimer la performance du détecteur optimisé. La paire optimale d'états initiaux $(\rho_0^{\text{opt}}, \rho_1^{\text{opt}})$ est définie par les deux vecteurs de Bloch $(\vec{r}_0 = -\vec{r}^{\text{opt}}, \vec{r}_1 = \vec{r}^{\text{opt}})$, ce qui définit une paire d'états purs orthogonaux spécifiquement optimisés pour le bruit quantique en présence.

D'après l'Éq. (23) toute solution valide $\vec{r} = \vec{r}^{\text{opt}}$ se situe dans \mathbb{R}^3 sur la surface d'un cône d'axe Oz et d'angle d'ouverture que l'on note θ , l'angle de coélévation de tout $\vec{r} = \vec{r}^{\text{opt}}$ solution dans \mathbb{R}^3 . D'après l'Éq. (23), on a donc $\cos(\theta) = \tau_z^{\text{opt}} = (P_1 - P_0)(2p - 1)$. Ceci montre qu'en général, la paire optimale d'états initiaux $(\rho_0^{\text{opt}}, \rho_1^{\text{opt}})$, définie par \vec{r}^{opt} , dépend de la température T (via p) de la source de bruit thermique. Cette dépendance est illustrée par la Fig. 1 qui représente l'angle de coélévation θ de \vec{r}^{opt} de l'Éq. (23), en fonction de la température T , et qui montre la nécessité d'une paire optimale $(\rho_0^{\text{opt}}, \rho_1^{\text{opt}})$ pour chaque température de bruit T .

Pour le détecteur optimisé, la performance $P_{\text{er}}^{\text{min}} = P_{\text{er}}^{\text{min,opt}}$ résultant de l'Éq. (24) dépend elle à la fois de la température T (via p) de la source de bruit thermique, et de l'intensité du couplage (via γ) du qubit avec le bain thermique. La Fig. 2 présente

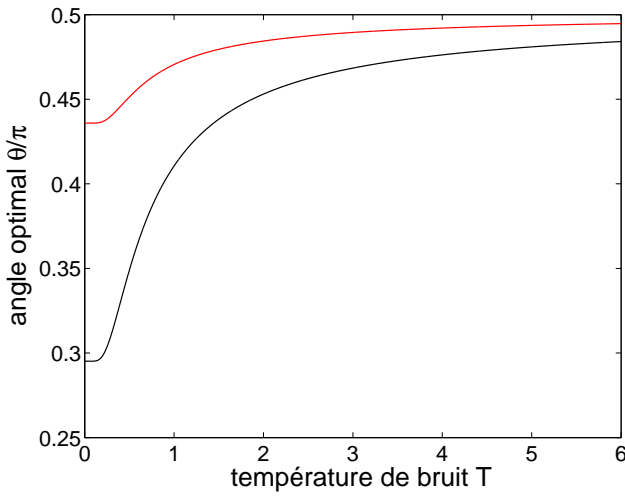


FIGURE 1 – Angle de coélévation optimal θ de $\vec{\tau}^{\text{opt}}$ de l'Éq. (23) qui définit la paire optimale d'états initiaux $(\rho_0^{\text{opt}}, \rho_1^{\text{opt}})$ maximisant la performance de la détection quantique sur le qubit bruité, en fonction de la température de bruit T . Avec pour les deux niveaux d'énergie du qubit $E_0 = 0$ et $E_1 = k_B$, le facteur d'amortissement $\gamma = 0.5$, et la probabilité a priori $P_0 = 0.2$ (noir) et $P_0 = 0.4$ (rouge).

la performance $P_{\text{er}}^{\text{min}} = P_{\text{er}}^{\text{min,opt}}$ du détecteur optimisé (traits pleins), et la compare à la performance $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ (moins bonne) d'un détecteur non optimisé (traits en tirets) selon la température de bruit T .

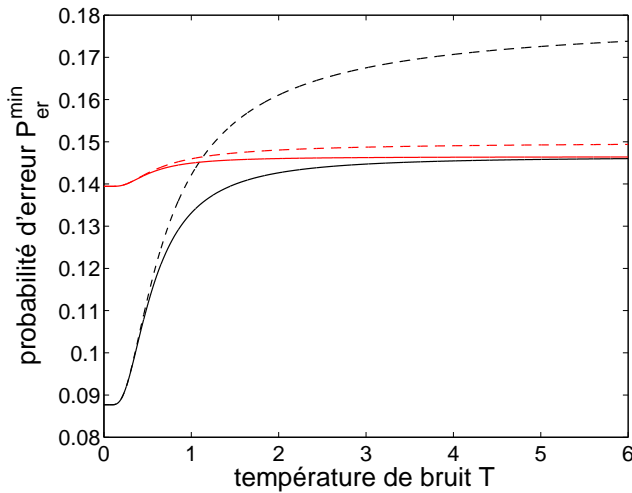


FIGURE 2 – Dans les conditions de la Fig. 1. Traits pleins : la probabilité d'erreur $P_{\text{er}}^{\text{min}} = P_{\text{er}}^{\text{min,opt}}$ du détecteur fonctionnant avec la paire optimale d'états initiaux $(\rho_0^{\text{opt}}, \rho_1^{\text{opt}})$ adaptée à la température T . Tirets : la probabilité d'erreur $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ du détecteur fonctionnant avec la paire fixée d'états initiaux (ρ_0, ρ_1) optimisée pour $T = 0$ seulement, et qui cesse d'être optimale pour $T > 0$.

Seulement dans le cas symétrique $P_0 = P_1$ a t'on, d'après l'Éq. (23), une paire optimisée $(\rho_0^{\text{opt}}, \rho_1^{\text{opt}})$ qui est invariante avec la température T de bruit. Cependant, dans ce cas $P_0 = P_1$, d'après l'Éq. (24), la performance $P_{\text{er}}^{\text{min}} = P_{\text{er}}^{\text{min,opt}}$ du détecteur optimisé, si elle non plus ne dépend plus de la température T du bain, reste toujours dépendante du bruit thermique, via le facteur d'amortissement γ qui caractérise le couplage du qubit avec le bain thermique. Aux temps $t \rightarrow \infty$, les deux états bruités ρ'_0 et ρ'_1 relaxent vers le même état d'équilibre ρ_∞ et deviennent ainsi indistinguables, pour toute température T .

5 Conclusion

Nous avons présenté dans un cadre "signal" la théorie de la détection quantique exposée en parallélisme avec la théorie de la détection classique. La notion de bruit, centrale en traitement du signal, a aussi été abordée dans le cadre quantique. On a ainsi abordé la question de la détection quantique optimale sur un qubit bruité. On a montré l'existence d'états quantiques initiaux $(\rho_0^{\text{opt}}, \rho_1^{\text{opt}})$ qui doivent être adaptés aux propriétés du bruit quantique afin de maximiser la performance en détection. Une illustration a été développée dans la situation d'intérêt significative d'un bruit quantique thermique, intervenant quand un qubit est couplé à un environnement représenté par un bain thermique à une température T quelconque, comme source de décohérence (l'altération des états quantiques causée par leur interaction avec l'environnement).

L'approche peut bien sûr être appliquée à d'autres bruits quantiques sur le qubit, selon les paramètres (A, \vec{c}) de la Section 3 caractérisant le bruit en représentation de Bloch. L'approche peut aussi être étendue à la détection sur des systèmes quantiques bruités de dimension supérieure à la dimension $N = 2$ du qubit, bien que dans ce cas les modèles de bruit quantique deviennent plus difficiles à traiter analytiquement. Ce point de vue où l'on cherche à optimiser différents phénomènes quantiques en fonction des propriétés d'un bruit quantique caractérisé séparément, peut aussi être adopté en lien avec d'autres phénomènes spécifiquement quantiques. On pourrait par exemple prendre ainsi en compte le bruit dans les corrélations non locales spécifiquement quantiques issues de l'intrication quantique [9, 10] qui aussi présentent de riches potentialités pour le traitement quantique du signal et de l'information.

Références

- [1] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
- [2] M. M. Wilde, *Quantum Information Theory*. Cambridge : Cambridge University Press, 2013.
- [3] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Detection Theory*. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1998.
- [4] F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance for an optimal detector with phase noise," *Signal Processing*, vol. 83, pp. 665–670, 2003.
- [5] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*. New York : Academic Press, 1976.
- [6] Y. C. Eldar, A. Megretski, G. C. Verghese, "Optimal detection of symmetric mixed quantum states," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, pp. 1198–1207, 2004.
- [7] S. M. Barnett, S. Croke, "Quantum state discrimination," *Advances in Optics and Photonics*, vol. 1, pp. 238–278, 2009.
- [8] F. Chapeau-Blondeau, "Quantum state discrimination and enhancement by noise," *Physics Letters A*, vol. 378, pp. 2128–2136, 2014.
- [9] I. S. Dotsenko, G. V. Voronov, "Quantum correlations of two-photon polarization states in the parametric down-conversion in the presence of white and colored noise," *Optics Communications*, vol. 282, pp. 2889–2893, 2009.
- [10] F. Chapeau-Blondeau, "Tsallis entropy for assessing quantum correlation with Bell-type inequalities in EPR experiment," *Physica A*, vol. 414, pp. 204–215, 2014. ■