

# Comment représenter une image avec un spaghetti ?

Nicolas CHAUFFERT<sup>1</sup>, Philippe CIUCIU<sup>1</sup>, Jonas KAHN<sup>2</sup>, Pierre WEISS<sup>3</sup>

<sup>1</sup>CEA NeuroSpin & Inria Saclay, Parietal team  
Bât. 145 - PC 156, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille 1, CNRS  
Cité scientifique Bât. M2, 59655 Villeneuve d'Asq Cedex, France

<sup>3</sup>ITAV, USR 3505, PRIMO Team  
Université de Toulouse, France

nicolas.chauffert@gmail.com, philippe.ciuciu@gmail.com  
jonas.kahn@math.univ-lille1.fr, pierre.armand.weiss@gmail.com

**Résumé** – Nous étudions ici le problème de projection d'une mesure sur un ensemble de mesures discrètes (une somme de Diracs). Des contraintes cinématiques sur la position des points nous permettent d'étendre ce problème de projection à des courbes discrètes. Nous proposons une analogie physique de ce problème avec la répartition de charges ponctuelles dans un potentiel. Ceci nous permet de proposer un algorithme pour déterminer une configuration de Diracs visuellement satisfaisante. Notre problème de projection généralise les résultats de stippling existants qui permettent la représentation d'images à partir de points isolés.

**Abstract** – We study the problem of projecting a given measure on a set of pushforward measures associated with some classes of parameterized functions. We propose an original numerical algorithm to solve the problem based on an analogy with an attraction-repulsion problem. This work is an extension of some recent stippling results that enables us to represent images with continuous curves.

## 1 Introduction

Le stippling est une stratégie qui consiste à approcher une image en niveau de gris par un ensemble de points noirs sur fond blanc. Cette technique est utilisée dans les imprimantes à jet d'encre. Un résultat de stippling est présenté à la Figure 1. L'objectif est que le rendu de l'image discrète soit similaire à

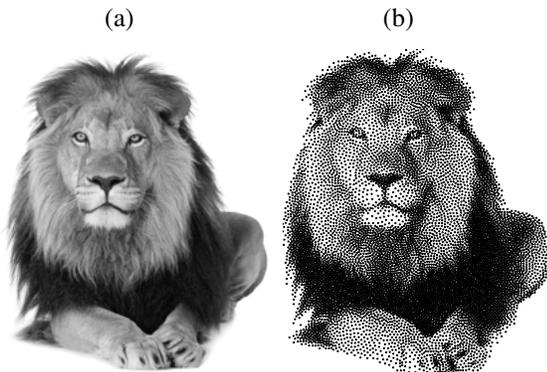


FIGURE 1 – Illustration du stippling. L'image (a) est une image en niveaux de gris, définie sur une grille de pixels. L'image (b) est une approximation de l'image (a) où les points noirs sont répartis sur un espace continu de manière à représenter au mieux l'image originale.

l'image d'origine. Une façon naturelle de trouver la position des points est la suivante :

$$\min_{(p_1, \dots, p_N) \in \Omega^N} \left\| h \star \left( \pi - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{p_i} \right) \right\|_2^2 \quad (1)$$

où  $\pi$  est la densité cible définie sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , et proportionnelle au niveau de gris de l'image,  $\delta_{p_i}$  est la mesure de Dirac au point  $p_i$ , et  $h$  est un noyau de convolution lié au système visuel humain. Ainsi, le problème posé vise à ce que l'écart entre les deux images soit minimal pour l'œil humain. En plissant les yeux, on peut faire varier  $h$  et ainsi rendre les deux images indiscernables. Comme nous l'expliquerons dans la section 3, ce problème est très proche du stippling à partir de potentiels d'attraction-répulsion [7, 8]. Ce principe peut avoir un large spectre d'application en approximation numérique d'intégrales, en physique quantique, en économie ou en biologie (distribution optimale de centres de services ou de populations) [3].

Dans cet article, on s'intéresse au cas particulier où les charges ne sont plus indépendantes mais sont réparties sur une courbe (discrète). L'objectif est donc de représenter une image par une courbe avec des contraintes cinématiques en effectuant une projection de la mesure  $\pi$  sur un ensemble de mesures portées par des Diracs comme le problème (1) avec des contraintes sur la position relative des Diracs. Notons que cet article reprend une partie des résultats obtenus dans notre preprint récent

[2]. Les preuves des résultats annoncés peuvent être retrouvées dans cet article. Ici, la principale nouveauté est l'introduction d'un nouveau potentiel pour les images couleurs.

## 2 Un problème de projection

Nous allons exprimer le problème de représentation d'images par une courbe continue comme un problème de projection d'une mesure sur un ensemble de mesures portées par des courbes. Une image  $\pi$  est représentée par une densité définie sur  $\Omega = [0, 1]^2$ , muni de la mesure de Lebesgue.

### 2.1 Définition de la mesure image

Soit  $(X, \gamma)$  un espace probabilisé. La mesure image de  $\gamma$  par une application  $p : X \rightarrow \Omega$  est définie pour tout  $B \subseteq \Omega$  mesurable, par :

$$p_*\gamma(B) := \gamma(p^{-1}(B))$$

Par exemple, si  $X = [0, 1]$  est muni de la mesure de Lebesgue et  $p$  est un processus stochastique défini sur  $[0, 1]$ , alors  $p_*\gamma(B)$  représente le temps relatif passé par le processus dans  $B$ .

Si  $\mathcal{P}$  est un ensemble de paramétrisations  $p : X \rightarrow \Omega$ , on peut ainsi définir l'ensemble des mesures images  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$  :

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}) := \{\mu = p_*\gamma, p \in \mathcal{P}\}.$$

### 2.2 Exemples de paramétrisations

Les paramétrisations qui vont nous intéresser sont les courbes discrètes, mais nous pouvons d'abord relier la définition précédente au problème de stippling (1) qui peut également s'écrire :

$$\min_{\mu \in \mathcal{M}(\Omega^N)} \|h \star (\pi - \mu)\|_2^2,$$

où

$$\mathcal{M}(\Omega^N) = \left\{ \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{p_i}, (p_i)_{1 \leq i \leq N} \in \Omega^N \right\}.$$

On a ainsi que  $\mathcal{M}(\Omega^N)$  est l'ensemble des mesures images de  $p : \{1, \dots, N\} \rightarrow \Omega$ , où  $\{1, \dots, N\}$  est muni de la mesure de comptage (i.e., si  $S \subseteq \{1, \dots, N\}$ ,  $\gamma(S) = |S|/N$ ).

Avec ces notations, nous sommes en mesure de généraliser le problème aux courbes discrètes, en ajoutant des dépendances entre les différents points. Pour une courbe discrète  $s \in \mathbb{R}^{2 \cdot N}$ , on note  $s(i) \in \mathbb{R}^2$  sa position au "temps"  $i$ . On définit  $D_1 : \mathbb{R}^{2 \cdot N} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \cdot N}$ , une discrétisation de l'opérateur de dérivée du premier ordre :

$$(D_1 s)(i) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 1, \\ s(i) - s(i-1) & \text{si } i \in \{2, \dots, N\}. \end{cases}$$

Dans la suite, on notera  $D_j$  l'opérateur de dérivation d'ordre  $j$ . Dans les expériences numériques, on prendra  $D_2 = -D_1^* D_1$ .

Définissons  $P_N^{m,q}$ , l'espace de courbes discrètes suivant :

$$P_N^{m,q} = \left\{ s \in \mathbb{R}^{2 \cdot N}, \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, N\}, s(i) \in \Omega, \right. \\ \left. \text{et } \forall j \in \{1, \dots, m\}, \|D_j s\|_q \leq \alpha_j \right\}. \quad (2)$$

Ici,  $\|\cdot\|_q$  est défini par :  $\|x\|_q = \left( \sum_{i=1}^N \|x(i)\|_2^q \right)^{\frac{1}{q}}$  pour  $q \in [1, +\infty)$  et  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \|x(i)\|_2$ . Ainsi,  $s \in P_N^{m,q}$  définit bien une fonction de  $\{1, \dots, N\} \rightarrow \Omega$ , et on peut donc définir l'ensemble des mesures images  $\mathcal{M}(P_N^{m,q})$ . Cet ensemble ainsi construit est l'ensemble des mesures portées par les courbes qui vérifient des contraintes cinématiques fixées, sur lequel on cherche à projeter une image  $\pi$ .

### 2.3 Définition du problème de projection

Le problème de projection qui nous intéresse s'écrit donc

$$\min_{\mu \in \mathcal{M}(P)} \|h \star (\pi - \mu)\|_2^2. \quad (4)$$

où les paramétrisations  $P$  que l'on considère sont de la forme  $P_N^{m,q}$  (on remarque sans perte de généralité que  $\Omega^N$  s'assimile à  $P_N^{m,q}$  pour  $m = 1$  et  $\alpha_1$  suffisamment grand). Dans [2], nous prouvons qu'un minimiseur au problème (4) existe si  $P$  est compact pour la convergence simple, ce qui est le cas ici car  $P$  est de dimension finie, fermé et borné. Nous montrons également un résultat de consistance pour une certaine classe de noyaux  $h$ , c'est à dire que si  $\mu_N$  est solution du problème (4) pour  $P = \Omega^N$  ou  $P = P_N^{m,\infty}$ , alors  $\mu_N \rightarrow \pi$ , i.e.,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) d\mu_N(x) = \int_{\Omega} f(x) d\pi(x)$$

pour toute fonction continue  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Ces résultats ne pourront pas être démontrés ici par manque de place. La formulation (4) permet une analyse mathématique du problème mais en trouver une solution n'est pas facile. Nous allons reformuler ce problème dans la section suivante afin de proposer un algorithme pour trouver une solution approchée au problème.

## 3 Projection et attraction-répulsion

L'usage de principes d'électrostatique a été introduit récemment pour réaliser du stippling d'images [7, 8]. Cette méthode semble actuellement constituer l'état de l'art. Dans [7, 8], les auteurs proposent de choisir les  $N$  points  $\{p_1, \dots, p_N\} \in \Omega^N$  comme la solution du problème variationnel suivant :

$$\min_{p \in \Omega^N} \underbrace{\frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(p_i - p_j)}_{\text{Potentiel de répulsion}} - \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} H(x - p_i) d\pi(x)}_{\text{Potentiel d'attraction}}, \quad (5)$$

où  $H$  est défini comme  $H(x) = \|x\|_2$ . Le terme d'attraction permet d'attirer les points vers les régions les plus sombres de l'image alors que le terme de répulsion vise à éloigner les

points les uns des autres. La proposition suivante montre que le problème d'attraction répulsion pour les courbes est équivalent au problème de projection de mesures (4). La preuve détaillée est proposée dans [2].

**Proposition 1.** Soit  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un noyau continu. On définit  $H$  par sa série de Fourier  $\hat{H}(\xi) = |\hat{h}|^2(\xi)$ . Soit  $P^*$  l'ensemble des solutions du problème électrostatique pour les courbes :

$$\min_{s \in P} \frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(s(i) - s(j)) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} H(x - s(i)) d\pi(x), \quad (6)$$

et  $\mathcal{M}^*$  l'ensemble des solutions du problème de projection (4), alors

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{M}(P^*).$$

## 4 Un algorithme de projection

La formulation variationnelle (6) a l'avantage de donner une intuition physique du problème de projection. De plus, il permet de développer un algorithme que nous présentons ici. Soit

$$\tilde{J}(p) := \underbrace{\frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(p_i - p_j)}_{F(p)} - \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} H(x - p_i) d\pi(x)}_{\tilde{G}(p)}. \quad (7)$$

Rappelons que nous avons montré dans la partie précédente que le problème de projection se ramenait à :

$$\min_{p \in P} \tilde{J}(p). \quad (8)$$

Pour la simulation informatique, nous devons remplacer  $\tilde{G}(p)$  par une approximation. Soit

$$G(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n H(x_j - p_i) \pi_j \simeq \tilde{G}(p),$$

Le problème de projection approché s'écrit ainsi

$$\min_{p \in P} J(p) := F(p) - G(p). \quad (9)$$

Si  $H$  est une fonction convexe, il en est de même de  $F$  et  $G$ . La fonction  $J$  est alors une différence de fonctions convexes. Une optimisation globale de  $J$  n'est donc pas envisageable pour des problèmes de tailles intéressantes. Cependant, la proposition suivante donne un algorithme convergeant vers un point critique de la fonctionnelle  $J$ . Ce résultat repose essentiellement sur les travaux récents [1]. On note  $P_P$  la projection orthogonale sur  $P$ , qui est bien définie car  $P$  est un ensemble convexe non vide.

**Proposition 2.** Supposons que  $H$  est une fonction  $C^1$  semi-algébrique avec un gradient continu  $L$ -Lipschitz. Soit  $0 < \tau < \frac{N}{3L}$ . La suite définie ci-dessous converge vers un point critique du problème (9)

$$p^{(k+1)} \in P_P \left( p^{(k)} - \tau \nabla J(p^{(k)}) \right), \text{ with } p^{(0)} \in \Omega^N. \quad (10)$$

Si  $H$  est convexe,  $0 < \tau < \frac{N}{2L}$  assure la convergence vers un point critique.

L'algorithme 1 repose sur ce résultat et est utilisé pour obtenir les résultats pratiques.

---

**Algorithme 1 :** Un algorithme de projection sur  $\mathcal{M}(P)$ .

---

**Entrées :**

- $\pi$  : mesure cible.
- $N$  : nombre de points sur la courbe discrète.
- $s^{(0)} \in P$  : paramétrisation initiale.
- $H$  : une fonction semi-algébrique à gradient Lipschitz.
- $nit$  : nombre d'itérations.

**Sorties :**

- $s^{(nit)}$  : approximation d'une courbe dans  $P^*$ .
- $\mu^{(nit)} = (s^{(nit)})_* \gamma_T$  : approximation d'un élément de  $\mathcal{M}^*$ .

**pour**  $0 \leq k \leq nit$  **faire**

- Calculer  $\eta^{(k)} = \nabla J(s^{(k)})$
  - Définir  $s^{(k+1)} = P_P(s^{(k)} - \tau \eta^{(k)})$
- 

Son implémentation requiert le calcul du gradient de  $J$  d'une part et la projection sur  $P$  d'autre part. Le calcul du gradient de  $F$  demande le calcul des interactions entre chaque paire de particule, dont un calcul direct se fait en  $\mathcal{O}(N^2)$  opérations. Dans nos expériences, nous avons recours à des algorithmes de sommation rapide [6, 4] utilisés dans les simulations de systèmes de particules (voir [8] pour l'application à l'estimation du gradient de  $F$ ).

L'ensemble  $P = P_N^{m,q}$  est convexe pour  $q \geq 1$ . La projection peut être obtenue par un algorithme itératif du premier ordre. Dans nos expériences, nous utilisons une descente de gradients accélérée appliquée au problème dual [5, 9].

## 5 Résultats

Dans cette section, nous présentons deux résultats obtenus à partir de notre algorithme. Le noyau  $H$  est la distance  $\ell_2$  (lissée en zéro pour assurer le caractère Lipschitzien du gradient). La Figure 2 représente la projection d'une image de Mona Lisa sur un espace de mesures portées par des courbes à dérivées premières et secondes bornées, discrétisée sur 80000 points. L'évolution au cours des itérations est représentée de (a) à (d). On a choisi une initialisation en spirale. La projection finale (e) est obtenue après 10000 itérations.

Afin de représenter une image couleur, une solution aurait consisté à projeter chaque canal de couleur (rouge-vert-bleu) sur un espace de courbes, et de représenter ensuite la superposition des 3 courbes de couleur. Cependant, ceci mène à une évolution indépendante des particules de couleurs différentes. Nous proposons ici d'ajouter une interaction supplémentaire entre les différentes courbes de couleur. Pour cela, posons  $\theta > 0$  et définissons la fonction suivante :

$$J_{\theta}^{(i,j,k)}(\mu) = |h \star [\pi_i - \mu_i - \theta((\mu_j - \pi_j) + (\mu_k - \pi_k))]|_2^2,$$

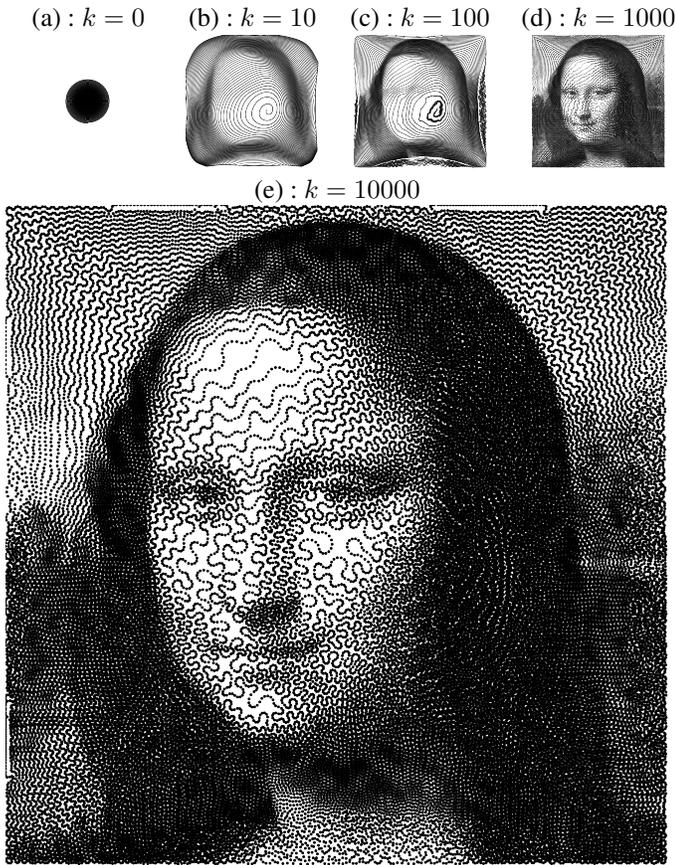


FIGURE 2 – Représentation de Mona Lisa par une courbe de  $P_{80000}^{2,\infty}$ .

où la mesure  $\mu = (\mu_i)_{i \in \{r,g,b\}}$  est une mesure vectorielle représentant les composantes rouges, vertes et bleues. Le problème de projection devient alors :

$$\min_{\substack{\mu_r \in \mathcal{M}(P_r) \\ \mu_g \in \mathcal{M}(P_g) \\ \mu_b \in \mathcal{M}(P_b)}} \sum_{\substack{(i,j,k) \in \{(r,g,b), \\ (g,b,r), (b,r,g)\}}} J_\theta^{(i,j,k)}(\mu).$$

Choisir  $\theta \neq 0$  permet d'ajouter interactions entre les points de différentes couleurs (on peut le voir en développant l'expression pour l'exprimer en termes d'attraction-répulsion). La figure (3) est obtenue avec  $\theta = 0.4$  et des contraintes cinématiques égales à celle de la Fig. 2. Les contraintes cinématiques sont identiques pour les trois courbes, et le nombre de points est sélectionné en fonction du niveau moyen dans chaque canal de l'image originale (c) à (e). Enfin, l'image finale (b) est obtenue par synthèse additive des couleurs.

## Références

[1] Hedy Attouch, Jérôme Bolte, and Benar Fux Svaiter. Convergence of descent methods for semi-algebraic and tame problems : proximal algorithms, forward-backward splitting, and regularized Gauss-Seidel methods. *Mathematical Programming*, 137(1-2) :91–129, 2013.

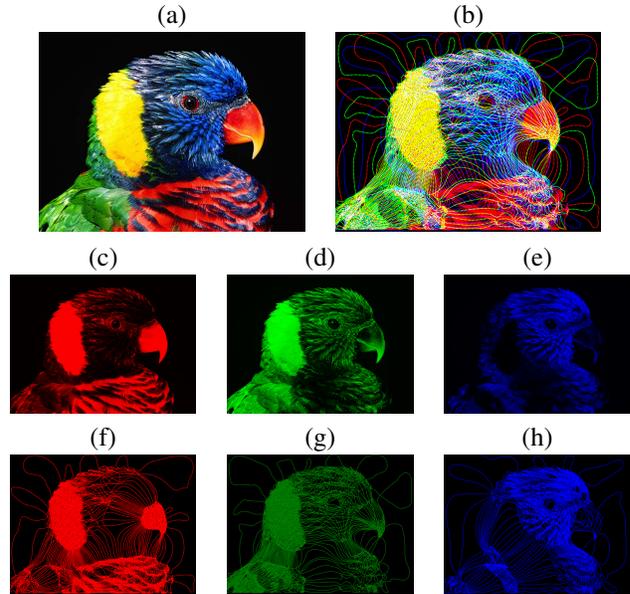


FIGURE 3 – Représentation d'une image couleur par superposition de 3 courbes de couleurs (f,g,h). Les différents canaux de l'image originale (a) sont représentés en (c,d,e). L'addition des 3 courbes est représentée en (b).

[2] Nicolas Chauffert, Pierre Weiss, Jonas Kahn, and Philippe Ciuciu. A projection algorithm on measures sets. *preprint*, 2015. [http://chauffertn.free.fr/Publis/2015/papier\\_projection.pdf](http://chauffertn.free.fr/Publis/2015/papier_projection.pdf).

[3] Manuel Gräf, Daniel Potts, and Gabriele Steidl. Quadrature errors, discrepancies, and their relations to halftoning on the torus and the sphere. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(5) :A2760–A2791, 2012.

[4] Jens Keiner, Stefan Kunis, and Daniel Potts. Using nfft 3—a software library for various nonequispaced fast fourier transforms. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 36(4) :19, 2009.

[5] Yu Nesterov. Gradient methods for minimizing composite functions. *Mathematical Programming*, 140(1) :125–161, 2013.

[6] Daniel Potts and Gabriele Steidl. Fast summation at nonequispaced knots by NFFT. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(6) :2013–2037, 2003.

[7] Christian Schmaltz, Pascal Gwosdek, Andrés Bruhn, and Joachim Weickert. Electrostatic halftoning. In *Computer Graphics Forum*, volume 29, pages 2313–2327. Wiley Online Library, 2010.

[8] Tanja Teuber, Gabriele Steidl, Pascal Gwosdek, Christian Schmaltz, and Joachim Weickert. Dithering by differences of convex functions. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4(1) :79–108, 2011.

[9] Pierre Weiss, Laure Blanc-Féraud, and Gilles Aubert. Efficient schemes for total variation minimization under constraints in image processing. *SIAM journal on Scientific Computing*, 31(3) :2047–2080, 2009.