

# Estimation bayésienne locale du paramètre de multifractalité à l'aide d'un algorithme de Monte Carlo Hamiltonien

S. COMBEXELLE<sup>1\*</sup>, H. WENDT<sup>1</sup>, J.-Y. TOURNERET<sup>1</sup>, N. DOBIGEON<sup>1</sup>, S. MCLAUGHLIN<sup>2</sup>, P. ABRY<sup>3</sup>

<sup>1</sup>IRIT - ENSEEIHT, CNRS UMR 5505, Université de Toulouse, F-31062 Toulouse, France

<sup>2</sup>Département d'Ingénierie et de Physique, Université Heriot-Watt, Edimbourg, Ecosse, Royaume-Uni

<sup>3</sup>Laboratoire de Physique, CNRS UMR 5672, Ecole Normale Supérieure de Lyon, F-69364 Lyon, France

{prénom.nom}@enseeiht.fr, s.mclaughlin@hw.ac.uk, patrice.abry@ens-lyon.fr

**Résumé** – La caractérisation de la texture d'une image peut être conduite via l'étude des fluctuations de la régularité locale de son amplitude dans le cadre théorique de l'analyse multifractale. Les images étant souvent composées de différentes textures, cette analyse doit être locale. Cet article s'attaque à ce problème en formulant un modèle bayésien par patch reposant sur un modèle semi-paramétrique récemment proposé pour la statistique du logarithme des coefficients dominants. Les estimateurs bayésiens sont obtenus via une procédure d'échantillonnage utilisant un algorithme de Monte-Carlo Hamiltonien. Les performances de ces estimateurs sont illustrées à l'aide de processus synthétiques.

**Abstract** – Image texture analysis can be conducted via the study of the fluctuations of the local regularity of image amplitudes within the theoretical framework of multifractal analysis. Images often being composed of several different textures, the analysis needs to be performed locally. The present contribution addresses this problem by formulating a patch-wise Bayesian model based on a recently introduced semi-parametric model for the statistics of log-wavelet leaders. The Bayesian estimators are computed via a Hamiltonian Monte Carlo sampling scheme. The estimation performance is illustrated with numerical simulations for synthetic processes with heterogeneous multifractal properties.

## 1 Introduction

**Contexte.** La texture constitue une des caractéristiques centrales d'une image. Sa description peut être envisagée dans le cadre mathématique de l'analyse multifractale, qui représente une instance spécifique de l'analyse d'invariance d'échelle permettant d'étudier les fluctuations de la régularité ponctuelle de l'amplitude d'une image. La caractérisation de la texture est ainsi réalisée via le *spectre multifractal*  $D(h)$  qui est défini comme la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points de même exposant de régularité ponctuelle  $h$  [5]. En pratique, les modèles multifractals se traduisent via un comportement en loi de puissance des moments empiriques de quantités multi-résolution de l'image  $X$  notées  $T_X(a, \mathbf{k})$  (des quantités qui dépendent à la fois de l'échelle d'analyse  $a = 2^j$  et de la position spatiale  $\mathbf{k}$ ),  $S(q, j) \equiv \frac{1}{n_j} \sum_{\mathbf{k}} [|T_X(j, \mathbf{k})|^q] \simeq a^{\zeta(q)}$ ,  $a_m \leq a \leq a_M$ , ou  $n_j$  est le nombre de coefficients  $T_X$  à l'échelle  $j$ . Des quantités multi-résolution spécifiques à l'analyse multifractale, les coefficients dominants notées  $d(j, \mathbf{k})$  (cf. section 2.1), seront utilisées dans ce travail [5, 11]. Les *exposants d'invariance d'échelle*  $\zeta(q)$  de ces lois de puissance sont intimement liés au spectre multifractal via une transformée de Legendre,  $D(h) \leq \inf_{q \in \mathbb{R}} [1 + qh - \zeta(q)]$ . Cette relation peut être exploitée en considérant les coefficients du développement polynomial  $\zeta(q) = \sum_{m \geq 1} c_m q^m / m!$ . Notamment, le *paramètre de multifractalité*  $c_2$  mesure la largeur de  $D(h)$  (i.e., le degré des fluctuations de la régularité) et permet de décider laquelle des deux classes de processus invariants d'échelle les

plus populaires est la mieux adaptée aux données : les processus auto-similaires [8] (pour lesquels  $c_2 \equiv 0$ ) ou les cascades multiplicatives multifractales [7] (pour lesquelles  $c_2 < 0$ ) [5, 11]. La contribution séminale [2] a montré que les coefficients  $c_m$  étaient liés aux cumulants du logarithme des quantités multi-résolution. Notamment,  $C_2(j) \equiv \text{Var} [\ln \ell(j, \mathbf{k})] = c_2^0 + c_2 \ln 2^j$ , ce qui permet d'estimer  $c_2$  via une régression linéaire de la variance empirique notée  $\widehat{\text{Var}}$  des log-coefficients dominants  $\ell(j, \mathbf{k}) = \ln d(j, \mathbf{k})$  [11]

$$\hat{c}_2 = \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \widehat{\text{Var}} [\ell(j, \cdot)]. \quad (1)$$

**Estimation locale de  $c_2$ .** Une image est souvent constituée de zones de textures différentes, ce qui rend nécessaire une estimation *locale* de  $c_2$ . Une telle analyse peut être réalisée sur des patches de petites tailles. Cependant, pour ce faire, (1) souffre de performances d'estimation défavorables (biais et variance élevés). Une alternative à (1) a récemment été proposée [3] et consiste en l'utilisation d'une modélisation plus complète de la statistique multivariée du vecteur des log-coefficients dominants centrés  $\bar{\ell}(j, \mathbf{k}) \triangleq \ell(j, \mathbf{k}) - \widehat{\mathbb{E}}[\ell(j, \cdot)]$  à l'échelle  $j$ , noté  $\ell_j$ , via la vraisemblance gaussienne

$$p(\ell_j | \boldsymbol{\theta}) \triangleq ((2\pi)^{n_j} \det \boldsymbol{\Sigma}_j(\boldsymbol{\theta}))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \ell_j^T \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \ell_j\right) \quad (2)$$

où  $\boldsymbol{\theta} \triangleq [c_2, c_2^0]^T$ . La matrice  $\boldsymbol{\Sigma}_j(\boldsymbol{\theta})$  est induite par le modèle de covariance  $\text{Cov}[\ell(j, \mathbf{k}), \ell(j, \mathbf{k} + \Delta \mathbf{k})] \approx \varrho_j(|\Delta \mathbf{k}|; \boldsymbol{\theta})$  (cf. (4) ci-dessous) où  $|\cdot|$  désigne la distance euclidienne. Le modèle (2) permet de réaliser l'estimation de  $c_2$  dans un cadre bayésien, via des algorithmes de Monte-Carlo par chaînes de

\*S. Combexelle est financé par la Direction Générale de l'Armement.

Markov (MCMC). Les performances très favorables de ces estimateurs bayésiens ont été démontrées dans [3]. Cependant, leur coût de calcul très élevé limite leur utilisation à une analyse grossière d'images sur un petit nombre de patches.

**Contributions.** Dans ce travail, nous proposons une procédure d'estimation bayésienne qui contourne ces limitations. La procédure repose sur le modèle statistique (2) via une approximation de Whittle formulée par transformée de Hankel qui rend son calcul efficace. Les contributions principales résident dans la formulation d'un modèle bayésien local par patch et d'un algorithme efficace pour l'évaluation des estimateurs bayésiens associés. L'originalité réside dans l'utilisation d'un algorithme d'échantillonnage Monte Carlo Hamiltonien (HMC), capable d'explorer de façon efficace la loi cible dans l'espace de grande dimension induit par le problème d'estimation locale, pour générer des échantillons permettant d'approcher les estimateurs bayésiens. Les performances des estimateurs proposés sont étudiées à l'aide de simulations numériques avec des processus synthétiques multifractals et se comparent de façon très favorable à celles obtenues avec l'estimateur classique (1), avec un coût de calcul deux fois plus faible que celui de [3].

## 2 Modèle et estimation bayésienne

### 2.1 Coefficients dominants

Soient  $\phi(x)$  et  $\psi(x)$  la fonction d'échelle et l'ondelette mère d'une analyse multi-résolution 1D [6]. Une base d'ondelettes 2D peut être définie via les produits tensoriels de  $\phi(x)$  et  $\psi(x)$  :  $\psi^{(0)}(\mathbf{x}) = \phi(x_1)\phi(x_2)$ ,  $\psi^{(1)}(\mathbf{x}) = \psi(x_1)\phi(x_2)$ ,  $\psi^{(2)}(\mathbf{x}) = \phi(x_1)\psi(x_2)$ ,  $\psi^{(3)}(\mathbf{x}) = \psi(x_1)\psi(x_2)$  dont les dilatations aux échelles  $a = 2^j$  et translations aux positions  $\mathbf{x} = 2^j \mathbf{k}$ ,  $\psi_{j,k}^{(m)}(\mathbf{x}) = 2^{-j} \psi^{(m)}(2^{-j} \mathbf{x} - \mathbf{k})$ , forment une base de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  pour une fonction  $\psi$  bien choisie. Les coefficients d'ondelette discrets d'une image  $X$  sont définis par  $c_X^{(m)}(j, \mathbf{k}) = \langle X, \psi_{j,k}^{(m)} \rangle$ ,  $m = 0, \dots, 3$  [6]. Appelons  $\lambda_{j,k}$  le cube dyadique centré sur  $\mathbf{k}2^j$  et de largeur  $2^j$ , et  $3\lambda_{j,k} = \bigcup_{n_1, n_2 = \{-1, 0, 1\}} \lambda_{j, k_1 + n_1, k_2 + n_2}$  la réunion de ce cube avec ces 8 voisins. Les coefficients dominants sont définis comme le maximum des coefficients d'ondelette dans ce voisinage à toutes les échelles plus fines [5, 11]

$$d(j, \mathbf{k}) \triangleq \sup_{m \in \{1, 2, 3\}, \lambda' \subset 3\lambda_{j,k}} |c_X^{(m)}(\lambda')|. \quad (3)$$

### 2.2 Modèle statistique

Nous rappelons le modèle statistique de [3] pour les log-coefficients dominants  $\ell_j$  d'images multifractales homogènes. **Vraisemblance.** La fonction  $\varrho_j(|\Delta \mathbf{k}|; \boldsymbol{\theta})$  à symétrie radiale qui modélise la covariance  $\text{Cov}[\ell(j, \mathbf{k}), \ell(j, \mathbf{k} + \Delta \mathbf{k})]$  dans la vraisemblance gaussienne (2) est donnée par [3]

$$\varrho_j(|\Delta \mathbf{k}|; \boldsymbol{\theta}) \triangleq \begin{cases} \varrho_j^0(|\Delta \mathbf{k}|; \boldsymbol{\theta}) & 0 < |\Delta \mathbf{k}| \leq 3 \\ \varrho_j^1(|\Delta \mathbf{k}|; \boldsymbol{\theta}) & 3 < |\Delta \mathbf{k}| \end{cases} \quad (4)$$

où  $\varrho_j^0(r; \boldsymbol{\theta}) \triangleq \frac{\varrho_j^1(3; \boldsymbol{\theta}) - c_2^0 - c_2 \ln 2^j}{\ln 4} \ln(1+r) + c_2^0 + c_2 \ln 2^j$  et  $\varrho_j^1(r; \boldsymbol{\theta}) \triangleq c_2 \ln(r/r_j) \mathbb{I}_{[0, r_j]}(r)$ ,  $r_j = \lfloor \sqrt{n_j}/4 \rfloor$ ,  $\lfloor \cdot \rfloor$  tronque à

la valeur entière inférieure et  $\mathbb{I}_A(r)$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $A$ , cf., [3] pour plus de détails.

En supposant que les log-coefficients dominants sont indépendants à des échelles différentes, la vraisemblance conjointe des log-coefficients dominants  $\mathbf{L} \triangleq [\ell_{j_1}, \dots, \ell_{j_2}]$  s'écrit directement comme le produit des vraisemblances gaussiennes (2)

$$p(\mathbf{L}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=j_1}^{j_2} p(\ell_j|\boldsymbol{\theta}). \quad (5)$$

**Vraisemblance de Whittle.** L'évaluation directe de (2) nécessite l'inversion des matrices  $\Sigma_j(\boldsymbol{\theta})$ , ce qui est coûteux et numériquement difficile même pour des images de tailles moyennes. À défaut, il a été proposé dans [3] d'évaluer (2) dans le domaine spectral via l'approximation de Whittle [12]

$$p(\ell_j|\boldsymbol{\theta}) \propto \exp - \left( \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m} \in J_j} \ln \phi_j(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}}; \boldsymbol{\theta}) + \frac{I_j(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}})}{\phi_j(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}}; \boldsymbol{\theta})} \right) \quad (6)$$

où  $I_j(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}}) \triangleq |\sum_{\mathbf{k}} \bar{\ell}(j, \mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}^T \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}})|^2 / n_j$  est le périodogramme de  $\{\bar{\ell}(j, \mathbf{k})\}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}} = 2\pi \mathbf{m} / n_j$  et  $\mathbf{m} \in J_j \triangleq \llbracket (-\sqrt{n_j} - 1)/2 \rrbracket : \lfloor \sqrt{n_j} - \lfloor \sqrt{n_j}/2 \rfloor \rrbracket^2$ . La fonction  $\phi_j(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}}; \boldsymbol{\theta})$  est la densité spectrale associée au modèle paramétrique de covariance (4) dont une version continue est donnée par l'intégrale  $\tilde{\phi}_j(\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\theta}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\omega})} \varrho_j(|\mathbf{x}|; \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x}$ . En utilisant la circularité de  $\varrho_j(|\mathbf{x}|; \boldsymbol{\theta})$ ,  $\tilde{\phi}_j(\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\theta})$  peut être réécrite sous forme d'une transformée de Hankel, ce qui amène à la forme explicite [4]

$$\tilde{\phi}_j(\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\theta}) = c_2 \tilde{\vartheta}_j^{(c_2)}(\boldsymbol{\omega}) + c_2^0 \tilde{\vartheta}_j^{(c_2^0)}(\boldsymbol{\omega}) \quad (7)$$

$$\tilde{\vartheta}_j^{(c_2)}(\boldsymbol{\omega}) \triangleq \frac{2\pi}{|\boldsymbol{\omega}|} \left[ \frac{J_0(r_j|\boldsymbol{\omega}|) - J_0(3|\boldsymbol{\omega}|)}{|\boldsymbol{\omega}|} + \ln\left(\frac{r_j 2^j}{3}\right) \int_0^3 \frac{r J_1(r|\boldsymbol{\omega}|)}{(1+r) \ln 4} dr \right]$$

$$\tilde{\vartheta}_j^{(c_2^0)}(\boldsymbol{\omega}) \triangleq \frac{2\pi}{|\boldsymbol{\omega}|} \int_0^3 \frac{r J_1(r|\boldsymbol{\omega}|)}{(1+r) \ln 4} dr$$

où  $J_n$  désigne la fonction de Bessel d'ordre  $n$ . Les versions discrètes  $\phi_j(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}}; \boldsymbol{\theta})$ ,  $\vartheta_j^{(c_2)}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}})$  et  $\vartheta_j^{(c_2^0)}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{m}})$  correspondantes sont obtenues en appliquant une discrétisation adéquate [4].

### 2.3 Modèle bayésien par patch

L'hypothèse de multifractalité homogène partout dans l'image est souvent peu réaliste. À défaut, nous supposons ici que les propriétés multifractales de la texture sont *localement homogènes* et proposons d'en effectuer l'analyse via  $M$  patches  $P_i$  de taille  $\tilde{N} \times \tilde{N}$ ,  $\tilde{N} < N$ , auxquels nous associons des vecteurs paramètre  $\boldsymbol{\theta}_i \triangleq [c_{2,i}, c_{2,i}^0]^T$  et  $\boldsymbol{\Theta} \triangleq \{\boldsymbol{\theta}_i\}_{i=1}^M$ .

**Vraisemblance.** Soient  $\mathbf{L}^{(i)} \triangleq [\ell_{j_1}^{(i)}, \dots, \ell_{j_2}^{(i)}]$  les log-coefficients dominants pour lesquels le cube dyadique  $\lambda_{j,k}$  est dans le patch  $i$ . La vraisemblance du patch  $i$  est donnée par (5) avec  $\mathbf{L}$  remplacé par  $\mathbf{L}^{(i)}$ , et sous l'hypothèse d'indépendance des patches (sans chevauchement), la vraisemblance de  $\mathbf{L}$  est

$$p(\mathbf{L}|\boldsymbol{\Theta}) = \prod_{i=1}^M p(\mathbf{L}^{(i)}|\boldsymbol{\theta}_i). \quad (8)$$

Notons que sans l'hypothèse d'indépendance, (8) est toujours valable, à une constante de normalisation  $Z(\boldsymbol{\Theta})$  près [1, Ch. 8].

**Loi a priori et posteriori et estimateurs bayésiens.** La loi a priori  $\pi(\Theta)$  pour  $\Theta$  peut être utilisée pour exploiter les informations supplémentaires connues sur  $\Theta$ . La loi a posteriori s'en déduit en appliquant la règle de Bayes

$$p(\Theta|\mathbf{L}) \propto p(\mathbf{L}|\Theta) \pi(\Theta) \quad (9)$$

et est utilisée pour définir les estimateurs bayésiens du maximum a posteriori  $\hat{\Theta}^{\text{MAP}}$  et d'erreur quadratique moyen minimale  $\hat{\Theta}^{\text{MMSE}}$  (MMSE pour "minimum mean square error").

### 3 Algorithme Monte Carlo Hamiltonien

La dépendance non-triviale de  $p(\Theta|\mathbf{L})$  par rapport à  $\Theta$  rend difficile le calcul explicite des estimateurs bayésiens. Nous proposons ici d'utiliser un algorithme HMC pour générer des échantillons  $\{\Theta^{(k)}\}_{k=1}^{N_{mc}}$  qui sont asymptotiquement ( $k \geq N_{bi}$ ) distribués selon  $p(\Theta|\mathbf{L})$  pour approcher les estimateurs bayésiens

$$\hat{\Theta}^{\text{MMSE}} \approx \frac{1}{N_{mc} - N_{bi}} \sum_{k=1}^{N_{mc}} \Theta^{(k)}, \quad \hat{\Theta}^{\text{MAP}} \approx \underset{k \geq N_{bi}}{\text{argmax}} p(\Theta^{(k)}|\mathbf{L}). \quad (10)$$

**Système Hamiltonien.** Un algorithme HMC est une méthode d'échantillonnage MCMC qui s'appuie sur la dynamique hamiltonienne. Cette méthode permet une exploration efficace de la loi cible (9) pour les situations où le vecteur paramètre  $\Theta$  est de grande dimension comme c'est le cas ici [9]. La loi cible (9) à échantillonner est associée à une énergie potentielle  $E(\Theta) = -\ln p(\Theta|\mathbf{L})$  dans laquelle, en analogie avec la physique,  $\Theta$  correspond à une position. Une énergie cinétique associée  $K(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{p} / 2$  est introduite, où  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2M}$  contient des variables auxiliaires de quantité de mouvement. L'hamiltonien, défini comme  $H(\Theta, \mathbf{p}) = E(\Theta) + K(\mathbf{p})$ , permet de décrire, via le système d'équations  $\frac{d\Theta}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\Theta, \mathbf{p})$ ,  $\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \Theta}(\Theta, \mathbf{p})$ , des trajectoires  $(\Theta(\tau), \mathbf{p}(\tau))$  en temps continu  $\tau$  d'énergie totale  $H(\Theta, \mathbf{p})$  constante [9].

**Échantillonnage.** L'algorithme HMC contient une étape d'acceptation/rejet tout comme l'algorithme de Metropolis-Hasting. La différence fondamentale se situe au niveau de la génération du candidat puisque la simulation discrète des équations hamiltoniennes remplace la marche aléatoire classiquement utilisée comme loi de proposition. À chaque itération  $k$ , un candidat  $(\Theta^*, \mathbf{p}^*)$  est proposé à partir d'un état initial  $(\Theta^{(k)}, \mathbf{p}^{(k)})$ , puis accepté avec un taux d'acceptation  $\alpha = \min(1, \rho)$ ,  $\rho = \exp[H(\Theta^{(k)}, \mathbf{p}^{(k)}) - H(\Theta^*, \mathbf{p}^*)]$ . La simulation discrète des équations hamiltoniennes est effectuée ici via la méthode "sautemouton" [9]. Cette méthode est composée de  $L$  étapes associées à un incrément  $\delta$ , ajusté au cours des  $k \leq N_{bi}$  premières itérations afin d'obtenir un taux d'acceptation dans  $[0.5, 0.8]$ . Les étapes de l'algorithme HMC sont détaillées dans Algo. 1.

**Dérivées de l'énergie potentielle  $E(\Theta)$ .** Nous explicitons les dérivées  $\frac{\partial E(\Theta)}{\partial \Theta}$  intervenant dans l'algorithme HMC pour le cas spécifique d'une loi a priori gaussienne non-informative  $\pi(\Theta) \propto \prod_{i=1}^M \exp(-\frac{1}{2}(\theta_i - \bar{\theta})^T \Sigma_\pi^{-1}(\theta_i - \bar{\theta}))$  avec  $\bar{\theta} = [\mu_{c_2}, \mu_{c_2^0}]^T$  et  $\Sigma_\pi = \text{diag}([\sigma_{c_2}^2, \sigma_{c_2^0}^2])$ , utilisée dans la section 4. Dans ce cas, en utilisant (9) avec (6), l'énergie potentielle associée à  $p(\Theta|\mathbf{L})$  est  $E(\Theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M [(\theta_i - \bar{\theta})^T \Sigma_\pi^{-1}(\theta_i -$

#### Algorithm 1 Étapes de l'algorithme HMC

- 1: Définir  $E(\mathbf{q}) = -\ln p(\mathbf{q}|\mathbf{L})$  et  $\Theta^{(1)}$
- 2: **for**  $k = 1 : N_{mc}$
- 3: Poser  $\mathbf{q}_0 = \Theta^{(k)}$ ,  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}^{(k)}$  avec  $\mathbf{p}^{(k)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_M, \mathbf{I}_M)$
- 4: Discretisation des équations hamiltoniennes
- 5: **for**  $n = 0 : L - 1$
- 6:  $\mathbf{p}_{n+1/2} = \mathbf{p}_n - \frac{\delta}{2} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}^T}(\mathbf{q}_n)$
- 7:  $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \delta \mathbf{p}_{n+1/2}$
- 8:  $\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1/2} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}^T}(\mathbf{q}_{n+1})$
- 9: **end for**
- 10: Acceptation-rejet du candidat  $\Theta^* = \mathbf{q}_L$
- 11: Poser  $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}_L$  et générer  $u \sim U_{[0,1]}$
- 12: Taux d'acceptation et mise à jour :  
 $\alpha = \min(1, \exp[H(\Theta^{(k)}, \mathbf{p}^{(k)}) - H(\Theta^*, \mathbf{p}^*)])$   
 $\Theta^{(k+1)} = \Theta^*$  si  $u < \alpha$ , sinon  $\Theta^{(k+1)} = \Theta^{(k)}$
- 13: **end for**

$\bar{\theta}) + \sum_{\mathbf{m}} \ln \phi_j(\omega_{\mathbf{m}}; \theta_i) + \frac{I_j^{(i)}(\omega_{\mathbf{m}})}{\phi_j(\omega_{\mathbf{m}}; \theta_i)}$  où  $I_j^{(i)}(\omega_{\mathbf{m}})$  est le périodogramme de  $\ell_j^{(i)}$ . Les dérivées partielles par rapport aux paramètres  $\gamma_i$ , où  $\gamma$  désigne  $c_2$  ou  $c_2^0$ , sont données par

$$\frac{\partial E(\Theta)}{\partial \gamma_i} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{J}_j} \frac{\vartheta_j^{(\gamma)}(\omega_{\mathbf{m}})}{\phi_j(\omega_{\mathbf{m}}; \theta_i)} \left[ 1 - \frac{I_j^{(i)}(\omega_{\mathbf{m}})}{\phi_j(\omega_{\mathbf{m}}; \theta_i)} \right] + \frac{\gamma_i - \mu_\gamma}{\sigma_\gamma^2}.$$

### 4 Résultats

Nous appliquons la méthode à un grand nombre  $MC = 100$  de réalisations de marches aléatoires multifractales (MRW), dont les propriétés multifractales ressemblent à celles des cascades multiplicatives log-normales de Mandelbrot (cf. [10] pour des définitions précises), de taille  $N \times N$  avec deux zones de propriétés multifractales homogènes différentes ( $c_2 = -0.04$  à l'intérieur d'une ellipse,  $c_2 = -0.01$  pour le reste de l'image). Les deux zones et une réalisation typique de MRW sont illustrées dans la Fig. 1 en haut). Les performances sont évaluées à l'aide de la moyenne  $\mathbf{m} = \mathbb{E}_{MC}[\hat{c}_2]$ , de l'écart-type  $s = \sqrt{\widehat{\text{Var}}_{MC}[\hat{c}_2]}$  et de la racine de l'erreur quadratique moyenne  $\text{rmse} = \sqrt{(m - c_2)^2 + s^2}$ , estimés sur l'ensemble des réalisations. L'estimation est réalisée avec des patches de taille  $\tilde{N} = 2^6$ , une ondelette de Daubechies avec  $N_\psi = 2$ ,  $(j_1, j_2) = (1, 2)$ ,  $N_{MC} = 1000$ ,  $N_{bi} = 500$  pour l'algorithme HMC et  $\bar{\theta} = [-0.04, 0.3]^T$ ,  $[\sigma_{c_2}, \sigma_{c_2^0}] = [0.03, 0.1]$  pour la loi a priori.

La figure 1 (a) présente les résultats obtenus pour  $N = 2^{12}$  et  $M = 3969$  patches sans chevauchement pour l'estimateur bayésien MMSE (deuxième ligne) et l'estimation par régression linéaire (1), dénoté RL (troisième ligne). La procédure proposée réalise une estimation extrêmement fiable des paramètres  $c_{2,i}$  et permet d'identifier les deux zones de propriétés multifractales homogènes et de précisément déterminer leurs paramètres (moyennes pour les deux zones :  $-0.016$  et  $-0.040$ ). En comparaison, les estimées obtenues par RL sont fortement biaisées (moyennes pour les deux zones :  $-0.036$  et  $-0.074$ ) et d'écart-type et rmse de valeurs  $\sim 4$  fois plus élevés que ceux obtenus avec l'estimateur MMSE. Les plus grandes valeurs de rmse sont, pour les deux méthodes, obtenues pour les

patches situés aux bords des deux zones pour lesquels l’hypothèse d’homogénéité des propriétés multifractales n’est pas satisfaite. Notons que le coût de calcul de la méthode bayésienne HMC proposée est de l’ordre de 0.1 secondes par patch et est donc, à performances égales, réduit de deux ordres de grandeur par rapport à celle proposée dans [3].

Nous étudions finalement les performances obtenues avec des patches *chevauchants*, en approximant grossièrement le terme supplémentaire  $Z(\Theta)$  dans (8) par une constante. Les résultats obtenus pour  $N = 2^9$  avec 3136 patches (77% de recouvrement ; les estimés pour un pixel sont donnés la moyenne des estimés des patches qui le recouvrent) sont présentés dans la figure 1 (b) et indiquent que les performances sont similaires à celles d’une situation sans chevauchement (moyennes pour les deux zones :  $-0.017$  et  $-0.037$ ). La différence principale se situe dans un effet de lissage plus important à cause de la taille relative grande ( $N/\tilde{N} = 8$ ) des patches.

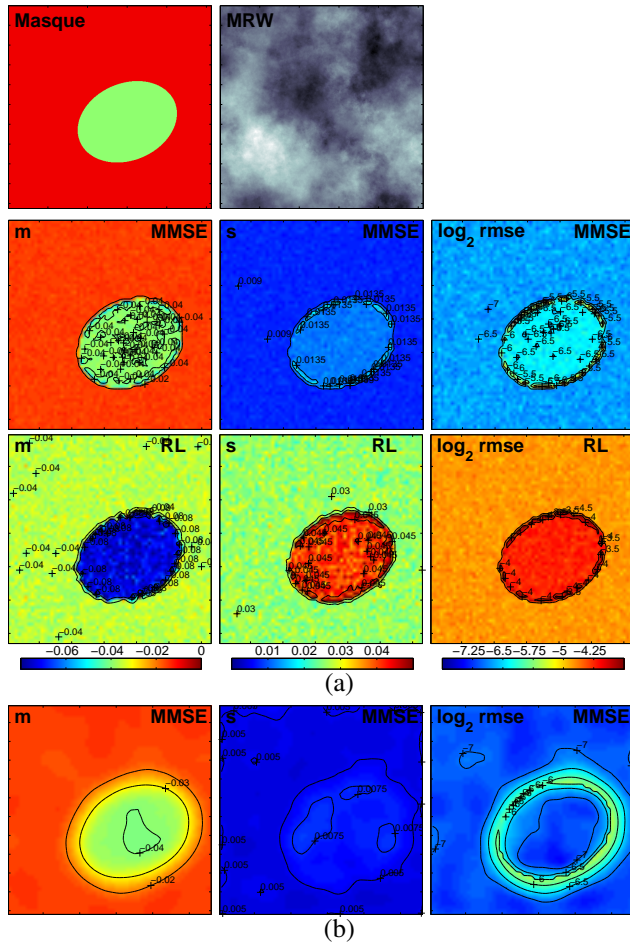


FIGURE 1 – Masque de  $c_2$  et une réalisation de MRW (en haut). Performances d’estimation pour  $N = 2^{12}$  et  $M = 3969$  patches sans chevauchement (a) et pour  $N = 2^9$  et  $M = 3136$  patches avec 77% de recouvrement (b).

## 5 Conclusions et perspectives

Nous avons proposé une procédure d’estimation bayésienne locale par patch du paramètre de multifractalité  $c_2$  de textures. L’estimation repose sur un modèle statistique générique pour le logarithme de coefficients dominants, introduit dans [3], et est réalisée via un algorithme d’échantillonnage de type HMC. Des simulations numériques pour des processus multifractals synthétiques démontrent les performances excellentes de la procédure avec un coût de calcul raisonnable grâce à l’utilisation de HMC (rmse réduit d’un facteur 4 par rapport à la régression linéaire, coût de calcul réduit de deux ordres de grandeur par rapport à [3]). Notons que cette procédure bayésienne permettrait également de formuler, via l’utilisation de lois a priori adaptées, l’estimation et la segmentation conjointes de  $c_2$ , ou le traitement d’images multi-bandes avec évolution lisse de  $c_2$ . Ce point est actuellement en cours d’étude.

## Références

- [1] C. M. Bishop. *Pattern recognition and machine learning*. Springer, New York, 2006.
- [2] B. Castaing, Y. Gagne, and M. Marchand. Log-similarity for turbulent flows. *Physica D*, 68(3-4) :387–400, 1993.
- [3] S. Combrexelle, H. Wendt, N. Dobigeon, J.-Y. Tourneret, S. McLaughlin, and P. Abry. Bayesian estimation of the multifractality parameter for image texture using a Whittle approximation. *IEEE T. Image Proces.*, 24(8) :2540–2551, 2015.
- [4] S. Combrexelle, H. Wendt, J.-Y. Tourneret, P. Abry, and S. McLaughlin. Bayesian estimation of the multifractality parameter for images via a closed-form Whittle likelihood. In *Proc. European Signal Processing Conf. (EUSIPCO)*, Nice, France, August 2015. To appear.
- [5] S. Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. In *M. Lapidus et al. eds., Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot, Proc. Symp. Pure Math.*, volume 72(2), pages 91–152. AMS, 2004.
- [6] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 3rd edition, 2008.
- [7] B. B. Mandelbrot. A multifractal walk down Wall Street. *Sci. Am.*, 280(2) :70–73, 1999.
- [8] B. B. Mandelbrot and J. W. van Ness. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10 :422–437, 1968.
- [9] R. M. Neal. MCMC using Hamiltonian dynamics. *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, 54 :113–162, 2010.
- [10] R. Robert and V. Vargas. Gaussian multiplicative chaos revisited. *Ann. Proba.*, 38(2) :605–631, 2010.
- [11] H. Wendt, S. G. Roux, S. Jaffard, and P. Abry. Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images. *Signal Process.*, 89(6) :1100–1114, 2009.
- [12] P. Whittle. On stationary processes in the plane. *Biometrika*, 41 :434–449, 1954.