

Détection robuste et rapide d'un motif connu dans une image

Loïc DENIS¹, Eric THIÉBAUT²

¹Laboratoire Hubert Curien
18 rue B. Lauras, Saint-Etienne F-42000

²Observatoire de Lyon
9 avenue Charles André, Saint-Genis Laval F-69230

loic.denis@univ-st-etienne.fr, eric.thiebaut@univ-lyon1.fr

Résumé – De nombreuses applications de traitement de l'image nécessitent la détection d'un motif connu noyé dans un fond bruité. La méthode de détection doit être robuste aux défauts de modélisation du fond. Nous proposons un critère basé sur la théorie des détecteurs localement optimaux. Il atteint de très bonnes performances de détection en présence d'outliers tout en étant aussi rapide à calculer qu'une corrélation.

Abstract – Many image processing applications require to detect a known pattern burried under a noisy background. The detection method must be robust to mis-modeling of the background. We propose a criterion based on the theory of locally optimal detectors. It reaches very good detection performance in the presence of outliers while being computed as fast as a correlation.

1 Introduction

1.1 Formulation du problème traité

Nous nous intéressons dans cet article au problème de la détection d'un *motif connu* dans du bruit. Dans sa formulation la plus simple, ce problème de détection se réduit au choix entre deux hypothèses :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{y} = \mathbf{f} + \epsilon \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{y} = \alpha \mathbf{m} + \mathbf{f} + \epsilon, \end{cases} \quad (1)$$

où \mathcal{H}_0 revient à considérer l'observation $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ comme superposition d'un fond (déterministe, modélisé par ailleurs) \mathbf{f} et d'une réalisation ϵ du processus aléatoire décrivant le bruit, tandis que l'hypothèse \mathcal{H}_1 considère que le motif (ou modèle) $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ est présent, avec une amplitude (inconnue) $\alpha > 0$, dans un fond bruité $\mathbf{f} + \epsilon$.

Si la modélisation du fond \mathbf{f} est suffisamment précise, l'écart entre l'observation \mathbf{y} et le fond \mathbf{f} en l'absence de motif se limite au bruit de mesure. Néanmoins, dans de nombreuses applications pratiques, la recherche d'un motif connu \mathbf{m} doit être réalisée dans un signal/image \mathbf{y} contenant un fond complexe difficile à modéliser. Une alternative à la modélisation explicite et précise du fond \mathbf{f} consiste à représenter la partie non modélisée du fond et le bruit comme un bruit ϵ . Le vecteur aléatoire ϵ ne peut alors plus être modélisé par une distribution gaussienne blanche, mais suit une loi non stationnaire, non gaussienne et présentant des dépendances statistiques spatiales. Nous considérons dans cet article une méthode de détection basée sur une hypothèse de bruit non gaussien, à queue lourde, permettant de détecter de façon plus robuste un motif

en présence de déviations importantes dues à un défaut de modélisation du fond \mathbf{f} .

1.2 Limites de la détection par corrélation

Dans le cas où le vecteur aléatoire ϵ est distribué selon une loi normale centrée, de matrice de covariance Γ connue, la présence du motif \mathbf{m} peut être détectée d'après le test [Kay98] :

$$T_{\text{Corr2}}(\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{m}^t \Gamma^{-1} \mathbf{y})^2}{\mathbf{m}^t \Gamma^{-1} \mathbf{m}}, \quad (2)$$

avec un seuil de détection $T_{\text{Corr2}}(\mathbf{y}) > \gamma$ choisi pour un budget (taux) de fausses alarmes donné. Ce test correspond à un rapport de vraisemblance généralisé (GLRT), c'est à dire au rapport des log-vraisemblances des hypothèses \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_0 obtenu lorsque α est remplacé par sa valeur estimée au sens du maximum de vraisemblance.

Le test T_{Corr2} défini à l'équation (2) n'exploite pas le fait que l'amplitude α du motif est positive. En imposant la contrainte $\alpha > 0$ lors de son estimation, on obtient le test ci-dessous :

$$T_{\text{Corr}}(\mathbf{y}) = \max \left(\frac{\mathbf{m}^t \Gamma^{-1} \mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{m}^t \Gamma^{-1} \mathbf{m}}}, 0 \right). \quad (3)$$

Ce test correspond à un filtrage adapté du signal \mathbf{y} par le motif normalisé $\mathbf{m}' = \mathbf{m} / \sqrt{\mathbf{m}^t \Gamma^{-1} \mathbf{m}}$.

La performance des méthodes de corrélation est bien établie dans le cas gaussien [Kay98]. Cependant, il est connu que les performances se dégradent fortement lorsque le bruit présente des fortes déviations (*outliers*), comme illustré en figure 1 (voir également [FKCK05] dans le cas du recalage de trames dans une vidéo).

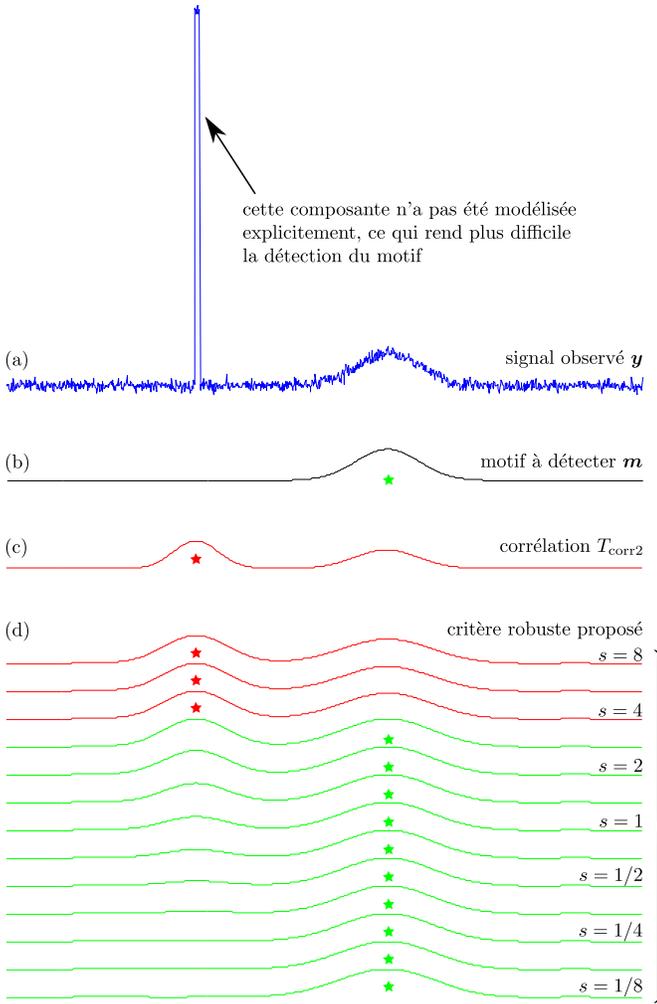


FIGURE 1 – Illustration de l’échec de la corrélation lorsqu’on recherche un motif en présence de structures fortement contrastées : (a) le signal observé contient le motif représenté en (b), du bruit et une composante de forte amplitude ; (c) la recherche d’un motif parmi tous les translatés de (b) par corrélation conduit à une fausse détection (localisée par l’étoile rouge) ; (d) le critère proposé, dépendant du paramètre s donne un résultat proche de la corrélation pour les fortes valeurs de s et une bonne détection dès que $s \leq 3$.

1.3 Vers une corrélation robuste...

Le problème de mise en correspondance robuste d’images a été largement étudié dans la littérature. Une approche très répandue consiste à détecter des points d’intérêt, calculer des descripteurs locaux tels que les SIFT, puis mettre en correspondance ces descripteurs locaux. En se limitant à des points d’intérêt, on peut réaliser des mises en correspondance même dans le cas d’occlusions importantes ou de transformations géométriques et radiométriques [MY09].

Afin de réaliser une détection pour des rapports signal/bruit moins bons, une approche «pixel» peut être plus adaptée. La méthode de corrélation robuste rapide proposée

dans [FKCK05] pour le recalage d’images consiste à remplacer la pénalisation quadratique apparaissant lorsqu’on maximise la log-vraisemblance sous hypothèse gaussienne par une pénalisation bornée de la forme $1 - \cos(\cdot)$. Un des intérêts de cette formulation est de permettre une implémentation à base de transformée de Fourier rapide.

L’approche que nous avons retenue consiste à revenir aux méthodes de détection robuste développées depuis plusieurs décennies en traitement du signal [MT72, Kay98].

2 Détecteur proposé

2.1 Rappel : le détecteur LMP

Le problème de détection, tel qu’il a été formulé dans l’équation (1), est un test d’hypothèse mono-latéral avec un paramètre inconnu : α . Notons $p(\mathbf{y}|\mathcal{H}_0)$ et $p(\mathbf{y}|\alpha, \mathcal{H}_1)$ les distributions, supposées connues, des observations dans chacune des hypothèses. On peut montrer que le test ci-dessous est le plus puissant (locally most powerful, LMP) [Kay98], dans le cas de signaux de faible amplitude (α petit) :

$$T_{LMP}(\mathbf{y}) = \frac{\partial \log p(\mathbf{y}|\alpha, \mathcal{H}_1)}{\partial \alpha} \sqrt{I_\alpha^{-1}} \Big|_{\alpha=0} > \gamma, \quad (4)$$

où I_α désigne l’information de Fisher sur le paramètre α :

$$I_\alpha = \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \log p(\mathbf{y}|\alpha, \mathcal{H}_1)}{\partial \alpha^2} \right]. \quad (5)$$

2.2 Détecteur LMP pour un bruit de Cauchy

Dans le cas gaussien, le calcul du détecteur LMP conduit à la même expression (3) que le rapport de vraisemblance généralisé. Dans le cas de distributions non gaussiennes, l’intérêt du test LMP est qu’il ne nécessite pas le calcul de l’estimateur au sens du maximum de vraisemblance de α . Il est ainsi possible d’obtenir une expression analytique du test pour d’autres distributions, notamment pour des distributions à queue lourde modélisant de fortes déviations.

De tels critères de détection ont été développés pour différentes distributions [MT72] et appliqués récemment à la détection de marques dans des images tatouées [BL13]. Lors de la conception de ces détecteurs, le facteur I_α (constant pour un modèle fixé) est généralement omis pour permettre de réaliser les calculs. Dans le cas d’un motif unique, il suffit alors de choisir le seuil γ en conséquence. En traitement de l’image, on s’intéresse généralement à résoudre conjointement le problème de la détection d’un motif et celui de sa localisation. On cherche donc à identifier également le motif parmi une famille de motifs (par exemple translatés les uns par rapport aux autres) en présence de bruit non nécessairement stationnaire. Il est alors essentiel de calculer la valeur de l’information de Fisher afin de pouvoir comparer des valeurs du test T_{LMP} pour différents modèles (le facteur I_α n’étant pas le même pour chaque modèle et dépendant de la position).

Notre choix des distributions $p(\mathbf{y}|\mathcal{H}_0)$ et $p(\mathbf{y}|\alpha, \mathcal{H}_1)$ est guidé par plusieurs impératifs :

- se comporter comme une distribution gaussienne pour les petites déviations,
- autoriser de fortes déviations (queue lourde),
- permettre de conduire les calculs analytiquement.

La distribution de Cauchy avec indépendance de chaque pixel remplit ces trois conditions et a donc été retenue pour cette raison. Nous définissons donc la distribution d'une observation \mathbf{y} sous l'hypothèse \mathcal{H}_1 par :

$$p(\mathbf{y}|\alpha, \mathbf{m}) = \prod_i \frac{1}{\pi s_i} \frac{1}{1 + \frac{(\alpha m_i + f_i - y_i)^2}{s_i^2}}. \quad (6)$$

La distribution sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 est obtenue à partir de l'équation (6) en prenant $\alpha = 0$. Les valeurs $\{s_i\}_{i=1..n}$ permettent de contrôler la dispersion des erreurs ϵ_i . La log-vraisemblance s'exprime, à une constante additive près, sous la forme :

$$-\log p(\mathbf{y}|\alpha, \mathbf{m}) = \sum_i \log \left(1 + \frac{(\alpha m_i + f_i - y_i)^2}{s_i^2} \right) + \text{cste}. \quad (7)$$

La figure 2 représente la distribution de Cauchy pour différentes valeurs du paramètre s . On peut noter le comportement quasi-gaussien lorsque les amplitudes sont faibles devant s (log-vraisemblance quadratique autour de zéro) et les queues lourdes (croissance asymptotiquement logarithmique de la log-vraisemblance).

Établissement de l'expression du détecteur LMP :

Afin d'alléger les écritures, nous considérerons que la composante déterministe \mathbf{f} du fond a été préalablement retirée de l'observation \mathbf{y} .

Commençons par exprimer la dérivée de la log-vraisemblance par rapport à l'amplitude α du motif :

$$\frac{\partial \log p(y_i|\alpha, \mathcal{H}_1)}{\partial \alpha} = \frac{2 m_i (y_i - \alpha m_i)}{(y_i - \alpha m_i)^2 + s_i^2}. \quad (8)$$

On en déduit l'expression du premier facteur du test :

$$\left. \frac{\partial \log p(y_i|\alpha, \mathcal{H}_1)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{2 m_i y_i}{y_i^2 + s_i^2}. \quad (9)$$

Le second facteur nécessite de calculer l'information de Fisher. On calcule pour cela la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log p(y_i|\alpha, \mathcal{H}_1)}{\partial \alpha^2} &= \frac{4 m_i^2 (\alpha m_i - y_i)^2}{s_i^4 \left(\frac{(\alpha m_i - y_i)^2}{s_i^2} + 1 \right)^2} \\ &\quad - \frac{2 m_i^2}{s_i^2 \left(\frac{(\alpha m_i - y_i)^2}{s_i^2} + 1 \right)}. \end{aligned} \quad (10)$$

L'espérance de ce terme donne, après calcul :

$$\mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2 \log p(y_i|\alpha, \mathcal{H}_1)}{\partial \alpha^2} \right] = \frac{m_i^2}{2 s_i^2}. \quad (11)$$

On en déduit l'expression du test dans le cas d'une seule composante y_i :

$$T_{\text{LMP}}(y_i) = \frac{2 m_i y_i}{y_i^2 + s_i^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{m_i^2}{2 s_i^2}}}. \quad (12)$$

L'expression pour un vecteur d'observation \mathbf{y} s'en déduit directement :

$$T_{\text{LMP}}(\mathbf{y}) = \frac{\sum_i \frac{2 m_i y_i}{y_i^2 + s_i^2}}{\sqrt{\sum_i \frac{m_i^2}{2 s_i^2}}}. \quad (13)$$

2.3 Critère pour la détection robuste

L'expression générale du critère proposé pour la détection robuste s'exprime sous la forme d'un détecteur localement optimal (LO) [MT72] :

$$\sum_i g_{lo}(y_i) m_i, \quad (14)$$

avec g_{lo} une transformation non linéaire appliquée aux observations y_i avant corrélation avec le modèle \mathbf{m} :

$$g_{lo}(y_i) = \beta_i \frac{2y_i}{y_i^2 + s_i^2}, \text{ avec } 1/\beta_i = \sqrt{\sum_i \frac{m_i^2}{2 s_i^2}}. \quad (15)$$

La figure 3 représente la transformation g_{lo} pour différentes valeurs de s . On remarque que lorsque le paramètre s est grand, les données y_i sont quasiment inchangées (pour des amplitudes inférieures ou égales à 1). Plus la valeur de s augmente, plus les valeurs élevées de y_i sont atténuées afin de réduire l'influence des outliers.

3 Performance du détecteur

Afin de fournir un premier élément d'appréciation de la performance du détecteur proposé, nous comparons en figure 4 les courbes ROC (Receiver Operating Characteristic) de différents détecteurs. La tâche de détection considérée consiste à détecter un motif constant ($\forall i, m_i = 1$) de faible amplitude ($\alpha = 0.03$) dans un bruit synthétique obtenu en sommant une composante gaussienne de faible variance (0.04) à une composante gaussienne de forte variance (16) affectant 90% des composantes y_i observées.

Les détecteurs considérés sont :

- le détecteur clairvoyant de Neyman-Pearson qui a accès à la valeur de α et réalise un rapport de vraisemblance. Ce détecteur n'est pas utilisable en pratique mais fournit une borne sur la meilleure performance atteignable ;
- le critère de corrélation T_{Corr} , correspondant à T_{LMP} sous une hypothèse de bruit gaussien,
- le critère de corrélation carrée T_{Corr^2} ,
- le critère de corrélation robuste décrite dans [FKCK05], réglé pour maximiser l'aire sous la courbe (AUC),
- le critère de détection robuste proposé, avec un paramètre s réglé pour maximiser l'AUC.

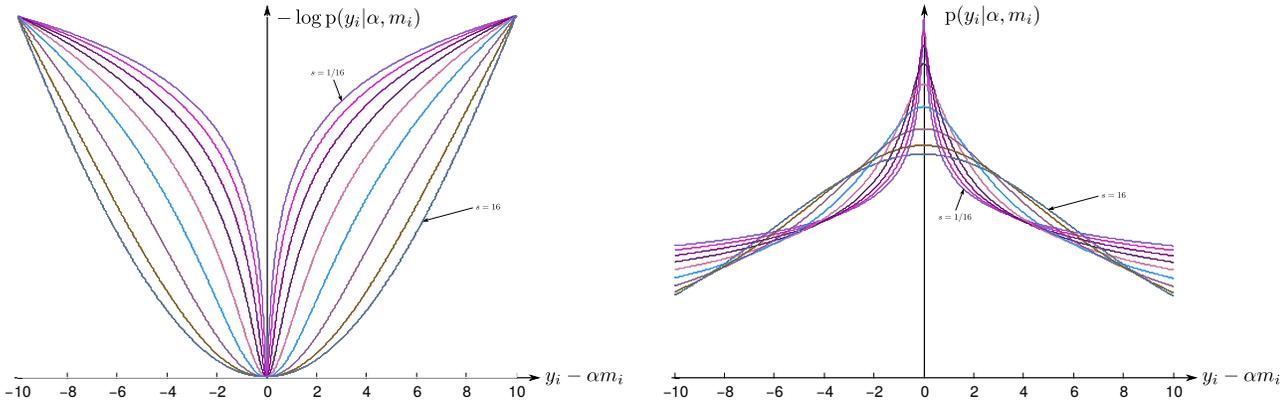


FIGURE 2 – Illustration d’une famille de distributions de Cauchy pour différents paramètres s dans l’intervalle $[1/16, 16]$. À gauche, l’opposée de la log-vraisemblance est représentée avec à droite, les densités de probabilité correspondantes. Remarque : les log-vraisemblances ont été remises à l’échelle afin de mettre en évidence l’évolution avec le paramètre s .

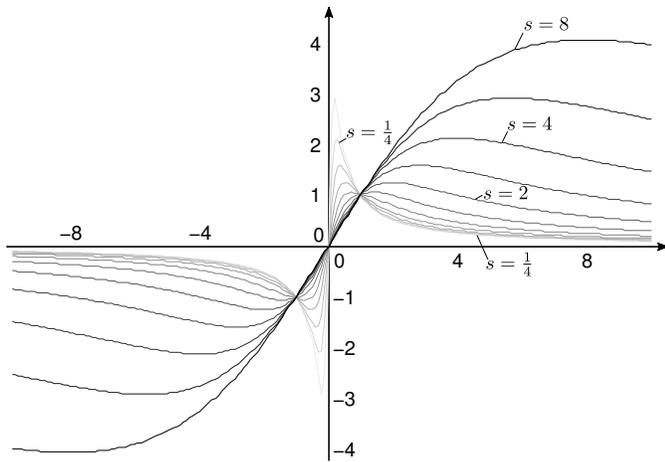


FIGURE 3 – Représentation de la transformation non linéaire g_{lo} (normalisée telle que $g_{lo}(1) = 1$). Cette transformation est appliquée sur les observations avant corrélation avec le modèle.

La comparaison des courbes ROC et des valeurs d’AUC est clairement en faveur de notre détecteur, bien que la distribution des erreurs ne corresponde pas à une distribution de Cauchy.

4 Conclusion

Nous avons décrit un critère permettant de détecter de façon robuste un motif connu dans un fond bruité. L’intérêt de l’approche proposée par rapport aux détecteurs localement optimaux décrits dans la littérature est la présence d’un terme de normalisation permettant de comparer des modèles différents (localisation d’un motif) et de traiter le cas de bruits non stationnaires. Notre méthode est très rapide car elle ne nécessite qu’un traitement non-linéaire appliqué indépendamment sur chaque composante de l’observation (pouvant être tabulé) et une corrélation. Elle est à la fois plus performante en présence d’outliers que la méthode “Fast robust correlation” [FKCK05] et près de deux fois plus rapide (3 FFT contre 5 FFT).

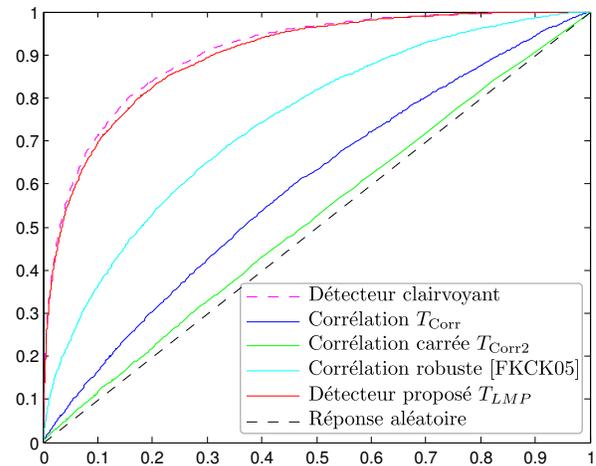


FIGURE 4 – Courbes ROC pour différents détecteurs. Les courbes en pointillé correspondent aux cas limites : détecteur clairvoyant et réponse aléatoire indépendante de l’observation

Références

- [BL13] Y. Bian and S. Liang. Locally optimal detection of image watermarks in the wavelet domain using bessel k form distribution. *IEEE trans. Image Proc.*, 22(6) :2372–2384, June 2013.
- [FKCK05] A Fitch, A Kadyrov, W Christmas, and J Kittler. Fast robust correlation. *IEEE trans Image Proc.*, 14(8) :1063–1073, 2005.
- [Kay98] S Kay. Fundamentals of statistical signal processing, Vol. II : Detection Theory. *Prentice Hall*, 1998.
- [MT72] J. Miller and John B. Thomas. Detectors for discrete-time signals in non-gaussian noise. *IEEE trans. Inf. Theory*, 18(2) :241–250, 1972.
- [MY09] J-M Morel and G Yu. ASIFT : A new framework for fully affine invariant image comparison. *SIAM J. Imaging Sciences*, 2(2) :438–469, 2009.