

Variation totale multivariée pour la détection de changement du spectre multifractal

Jordan FRECON¹, Nelly PUSTELNIK¹, Herwig WENDT², Patrice ABRY¹ *

¹Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, CNRS UMR 5672, F-69364 Lyon, France

²IRIT, INP-ENSEEIH, CNRS UMR 5505, F-31062 Toulouse, France

prenom.nom@ens-lyon.fr, herwig.wendt@irit.fr

Résumé – Dans sa formulation naturelle, l'analyse multifractale pratique suppose a priori que les propriétés multifractales des signaux sont homogènes, c.-à-d., constantes au cours du temps. Nous nous intéressons à la situation d'intérêt pratique où les propriétés multifractales changent au cours du temps. Nous proposons le développement d'approches variationnelles, ou d'optimisation, univariées et multivariées, reposant sur l'usage de variation totale et de normes mixtes, pour la détection de tels changements. Nous comparons, selon plusieurs critères, les performances de ces procédures appliquées à des signaux synthétiques dont les propriétés multifractales sont homogènes par morceaux.

Abstract – In essence, practical multifractal analysis a priori assumes that the multifractal properties of signals are homogeneous, i.e., do not vary along time. We are interested here in situations of practical relevance where multifractal properties may change along time. Variational, or optimization, univariate and multivariate procedures are developed that aim to detect such changes in multifractal properties. They rely on the use of total variation and mixed norms. Univariate and multivariate approaches are compared using several performance criteria applied to piece-wise homogeneous multifractal processes.

1 Introduction

Analyse multifractale. L'analyse multifractale constitue un outil d'analyse du signal mesurant finement les fluctuations de régularité d'un signal le long de sa trajectoire, quantifiée à l'aide de l'exposant de Hölder h . Pour caractériser un signal, l'analyse multifractale préfère cependant à l'évolution temporelle $h(t)$, une information globale et géométrique des fluctuations de h , le spectre multifractal [1]. En pratique, la mesure de ce spectre multifractal repose sur le choix de quantités multiéchelles. Parmi les différentes quantités multiéchelles envisagées dans la littérature, on peut citer les coefficients de la transformée en ondelettes continue, ou le squelette de cette transformée [2]. Plus récemment, il a été proposé d'utiliser les coefficients d'ondelettes dominants, définis comme supremum locaux à travers toutes les échelles plus fines des coefficients de la transformée en ondelettes discrètes [3].

Segmentation des propriétés multifractales. Dans sa formulation actuelle, l'analyse multifractale suppose a priori que le signal étudié possède des propriétés multifractales homogènes et constantes sur l'ensemble de son support. Cependant, dans nombre d'applications, l'information peut être contenue davantage dans le changement de ces propriétés multifractales que dans les valeurs des paramètres qui les caractérisent. Le modèle schématique de telles situations que nous adopterons dans ce travail consiste à modéliser un signal comme un en-

semble de segments de supports disjoints, chacun caractérisé par un spectre multifractal différent. La question abordée dans ce travail est alors de pouvoir détecter ces changements, quand leurs nombres et positions sont inconnus, comme le sont les propriétés multifractales de chaque segment.

Travaux préliminaires. La question de détection de changement de régularité locale dans les signaux/images a été précédemment abordée dans [4, 5]. Dans ces travaux, le problème sous-jacent était cependant plus facile à traiter car les signaux étaient modélisés par des processus multi-fractionnaires, dont la régularité locale était constante par morceaux. Cela impliquait que le spectre multifractal de chaque segment était réduit à un singleton, et donc que la régularité locale était constante par morceaux. Dans ces travaux, la régularité est mesurée de manière ponctuelle et la détection de changement de régularité repose sur l'utilisation de la variation totale. Les excellents résultats obtenus nous suggèrent d'étendre cette étude au cas où le spectre multifractal de chaque segment n'est plus réduit à un singleton. Ce problème est significativement plus difficile, car pour un signal multifractal dont les propriétés multifractales sont constantes par morceaux, la régularité locale peut varier significativement d'un instant à l'autre même au sein d'un même segment. Cela interdit une estimation strictement ponctuelle qui doit être remplacée par une estimation dans un voisinage impliquant la contradiction fondamentale suivante : l'estimation est meilleure si la taille du voisinage augmente, mais une mesure glissante en temps reposant sur un grand voisinage produit une estimation fortement corrélée, compliquant ainsi la

*Ce travail a été réalisé avec le soutien du programme de recherche jeunes chercheurs GALILEO du GdR ISIS.

localisation fine d'un changement.

Objectifs et contribution. La présente contribution propose une première tentative pour segmenter un signal en zones où ses propriétés multifractales peuvent être considérées homogènes par morceaux. La section 2 présente brièvement les éléments nécessaires à l'analyse multifractale. La section 3 présente deux approches variationnelles permettant d'obtenir des estimées de c_1 et c_2 constantes par morceaux, soit univariées (ou disjointes), soit multivariées (ou conjointes). Les performances des deux méthodes sont comparées dans la Section 4. L'apport de la segmentation multivariée y est également discutée. Conclusions et perspectives sont discutées dans la Section 5.

2 Analyse multifractale

Analyse multifractale. Soit X le signal d'intérêt constitué de N échantillons. Sa régularité locale autour de la position ℓ peut être quantifiée par l'exposant de Hölder h_ℓ . Des grandes valeurs de h_ℓ indiquent une portion lisse du champ alors que de faibles valeurs caractérisent une forte irrégularité locale. Les fluctuations de régularité peuvent être décrites par le spectre multifractal $\mathcal{D}(h)$ qui représente de façon globale et géométrique les fluctuations de h_ℓ (cf. e.g., [1, 3] pour une description détaillée). En pratique, $\mathcal{D}(h)$ est souvent approché par une parabole d'équation $\mathcal{D}(h) = 1 + (h - c_1)^2 / (2c_2)$. Son estimation requiert l'usage d'un formalisme multifractal reposant sur des quantités multiéchelles. Dans le présent travail, nous utiliserons les coefficients d'ondelettes dominants, récemment introduits pour permettre une caractérisation complète et précise du spectre multifractal [1, 3].

Coefficients d'ondelettes dominants. Soit ψ_0 une fonction de référence appelée ondelette-mère et $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j}\psi_0(2^{-j}t - k)$ la collection de ses dilatées et translitées. On note $d_{j,k} = \langle X, \psi_{j,k} \rangle$ le coefficient d'ondelettes discret de X à la position $\ell = 2^j k$ et à l'échelle 2^j où $j \in \{1, \dots, J\}$. Le coefficient d'ondelettes dominant autour de la position k et à l'échelle j , est noté $L_{j,k}$ et il est défini comme le supremum local autour d'un voisinage spatial, de tous les coefficients d'ondelettes à travers les échelles plus fines $2^{j'} \leq 2^j$. Formellement,

$$L_{j,k} = \sup_{\omega_{j',k'} \subset \Omega_{j,k}} |d_{j',k'}|, \quad (1)$$

où $\omega_{j,k} = [k2^j, (k+1)2^j)$ et $\Omega_{j,k} = \cup_{p \in \{-1,0,1\}} \omega_{j,k+p}$.

Formalisme multifractal. Considérons $C_{1,j}$ et $C_{2,j}$ les moyennes et variances de $\ln L_j$, pour une échelle 2^j donnée. Il a été montré [1, 3] que les fonctions $C_{1,j}$ et $C_{2,j}$ sont reliées à $\mathcal{D}(h) = 1 + (h - c_1)^2 / (2c_2)$ par les coefficients c_1 et c_2 :

$$C_{1,j} = c_1^0 + c_1 \ln 2^j, C_{2,j} = c_2^0 + c_2 \ln 2^j. \quad (2)$$

Estimateurs empiriques de la moyenne et de la variance. Les quantités $C_{1,j}$ et $C_{2,j}$ sont estimées localement par des moyennes

en temps, dans une fenêtre $\mathcal{W}_{j,\ell}$ centrée en ℓ à l'échelle 2^j :

$$\widehat{C}_{1,j,\ell} = \frac{1}{|\mathcal{W}_{j,\ell}|} \sum_{k \in \mathcal{W}_{j,\ell}} \ln L_{j,k}, \quad (3)$$

$$\widehat{C}_{2,j,\ell} = \frac{1}{|\mathcal{W}_{j,\ell}| - 1} \sum_{k \in \mathcal{W}_{j,\ell}} \left(\ln L_{j,k} - \widehat{C}_{1,j,\ell} \right)^2. \quad (4)$$

où $|\mathcal{W}_{j,\ell}|$ est le nombre de coefficients dans le voisinage $\mathcal{W}_{j,\ell}$.

Estimateurs de c_1 et c_2 . Les équations en (2) suggèrent que des estimateurs de c_1 et c_2 peuvent être obtenus par régression linéaire à travers les échelles $j \in \{j_1, \dots, j_2\} \subseteq \{1, \dots, J\}$:

$$(\forall \ell \in \{1, \dots, N\})(\forall i \in \{1, 2\}) \quad \widehat{c}_{i,\ell} = \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \widehat{C}_{i,j,\ell} \quad (5)$$

où les poids de régression w_j vérifient $\sum_{j=j_1}^{j_2} j w_j = 1$ et $\sum_{j=j_1}^{j_2} w_j = 0$ afin d'obtenir un estimateur non biaisé [3].

3 Segmentation multivariée

Dans cette étude, nous proposons de raffiner l'estimation de \widehat{c}_1 et \widehat{c}_2 par une approche variationnelle faisant intervenir un terme de variation totale permettant de favoriser les solutions constantes par morceaux :

$$(\widehat{c}_1, \widehat{c}_2)_\lambda = \arg \min_{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{2N}} \sum_{i=1}^2 \|\widehat{c}_i - u_i\|^2 + \lambda \sum_{i=1}^2 \sum_{\ell=1}^{N-1} |(Du_i)_\ell| \quad (6)$$

où $D \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$ représente l'opérateur de premières différences, c'est-à-dire pour tout $\ell \in \{1, \dots, N-1\}$, $(Du)_\ell = u_{\ell+1} - u_\ell$. Dans le membre de droite de (6), le premier terme est relié au logarithme d'une loi normale sur les données. Le second terme est la somme de la variation totale de u_1 et u_2 et contribue à pénaliser les variations des quantités à estimer et ainsi à favoriser les solutions constantes par morceaux. Le paramètre de régularisation $\lambda > 0$ permet quant à lui d'équilibrer la contribution de ces deux termes. Le critère (6) étant séparable en $i \in \{1, 2\}$, \widehat{c}_1 et \widehat{c}_2 sont segmentés de façon disjointe et univariée. Les changements détectés sur \widehat{c}_1 et \widehat{c}_2 n'ont alors aucune raison d'être colocalisés.

Il est plus réaliste dans les applications de considérer que l'ensemble du spectre multifractal (donc a priori à la fois c_1 et c_2) change à un instant donné. Pour favoriser la détection de ruptures conjointes dans les estimées \widehat{c}_1 et \widehat{c}_2 , le problème (6) peut être reformulé comme :

$$(\widehat{c}_1, \widehat{c}_2)_\lambda = \arg \min_{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{2 \times N}} \sum_{i=1}^2 \|\widehat{c}_i - u_i\|^2 + \lambda \sum_{\ell=1}^{N-1} \sqrt{\sum_{i=1}^2 |(Du_i)_\ell|^2}. \quad (7)$$

où le second terme dans le membre de droite de (7) a été remplacé par une norme mixte $\ell_{1,2}$.

Les problèmes de minimisation (6) et (7) sont convexes non-lisses et peuvent donc être résolus à l'aide d'algorithmes proximaux primaux-duaux tels que [6, 7, 8, 9, 10].

4 Résultats et performances

Configuration expérimentale. Considérons un mouvement Brownien multifractal X de taille $N = 2^9$, dont les propriétés multifractales sont homogènes par morceaux et changent à la position $\ell = 2^8$, selon une configuration motivée par exemple par l'observation de données d'activités cérébrales, où l'on passe du repos (longue mémoire $c_1 = 0.6 > 0.5$ et faiblement multifractal $c_2 = -0.0125 \simeq 0$) à une tâche (faible corrélation $c_1 = 0.5$ mais forte multifractalité $c_2 = -0.0250 < 0$) (cf. e.g., [11]).

À partir de \hat{c}_1 et \hat{c}_2 , définis en (5) et estimés à travers les octaves $j_1 = 2$ et $j_2 = 4$, nous obtenons $(\hat{c}_1, \hat{c}_2)_{\lambda}^{\text{disj}}$ et $(\hat{c}_1, \hat{c}_2)_{\lambda}^{\text{conj}}$ les solutions de (6) et (7) ré-estimées *a posteriori* sur chaque segment. Les performances d'estimation des deux méthodes seront évaluées et comparées, comme moyenne sur 100 réalisations, pour différentes tailles de fenêtre d'estimation $|\mathcal{W}_{j,\ell}|$ variant de 2^2 à 2^8 échantillons. La figure 1 illustre la procédure : En haut, le signal multifractal par morceaux et le spectre multifractal associé sur chaque région, au centre (resp. en bas), c_1 , \hat{c}_1 , $(\hat{c}_1)_{\lambda_{J_{\max}}}^{\text{disj}}$, $(\hat{c}_1)_{\lambda_{J_{\max}}}^{\text{conj}}$ (resp. c_2 , \hat{c}_2 , $(\hat{c}_2)_{\lambda_{J_{\max}}}^{\text{disj}}$, $(\hat{c}_2)_{\lambda_{J_{\max}}}^{\text{conj}}$) pour $|\mathcal{W}_{j,\ell}| \equiv 2^8$. Cet exemple montre que la segmentation conjointe (rouge) permet de gagner en précision sur la localisation de la rupture, comparée à une estimation disjointe (bleu).

Paramètre de régularisation λ . Les performances d'estimation dépendent fortement du choix de λ qui n'a pas le même poids dans (6) et (7). Cette question, bien qu'importante lorsque l'on fait face à des signaux réels [12], ne sera pas traitée dans cet article. Pour évaluer les performances des deux approches, nous utilisons deux valeurs de λ différentes :

$\lambda_{2\text{seg}}$ correspond à la plus grande valeur de λ produisant au moins 2 segments.

$\lambda_{J_{\max}}$ est la valeur de λ qui maximise l'indice de Jaccard [13, 14], qui permet de mesurer la similarité entre les positions des ruptures des estimées et réelles, α et $\beta \in [0, 1]^N$:

$$J(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{\ell=1}^N \min(\alpha_{\ell}, \beta_{\ell})}{\sum_{\substack{1 \leq i \leq N-1 \\ \alpha_i > 0, \beta_i > 0}} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} + \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq N \\ \beta_{\ell} = 0}} \alpha_{\ell} + \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq N \\ \alpha_{\ell} = 0}} \beta_{\ell}}$$

$J(\alpha, \beta)$ varie entre 0, lorsque $\alpha \cap \beta = \emptyset$, et 1 lorsque $\alpha = \beta$. L'indice de Jaccard est une mesure sévère de la similarité entre α et β . Par exemple, pour β donné, si α a correctement identifié la moitié des valeurs non-nulles de β et mal identifié l'autre moitié, alors $J(\alpha, \beta) = 1/3$. Pour notre étude, si nous notons $\hat{r}_{1,\lambda}^{\text{disj}}$, $\hat{r}_{2,\lambda}^{\text{disj}}$, $\hat{r}_{\lambda}^{\text{conj}}$ et r les vecteurs d'indicatrices des ruptures respectivement associés à $(\hat{c}_{1,\lambda}^{\text{disj}}, \hat{c}_{2,\lambda}^{\text{disj}})$, $(\hat{c}_1, \hat{c}_2)_{\lambda}^{\text{conj}}$ et (c_1, c_2) , l'indice de Jaccard sera mesuré entre les quantités $\alpha = \mathcal{G}(\hat{r}_{\bullet})$ et $\beta = \mathcal{G}(r)$ où \mathcal{G} modélise un noyau Gaussien. Pour favoriser les solutions avec peu de segments, nous choisissons \mathcal{G} de support 2^8 points et de largeur à mi-hauteur 2^7 points.

Indice de Jaccard et nombre de segments. La figure 2 montre que la segmentation conjointe permet d'atteindre un indice de Jaccard plus élevé quelque soit la valeur de la fenêtre d'estimation $|\mathcal{W}_{j,\ell}|$ et elle conduit également à un nombre de segment plus faible, ce qui est préférable.

Distance à la rupture. La figure 3 compare les performances en terme de distance entre les ruptures pour $\lambda = \lambda_{2\text{seg}}$ (Fig. 3(a)) et $\lambda = \lambda_{J_{\max}}$ (Fig. 3(b)). Pour la segmentation disjointe, $\hat{c}_{1,\lambda}^{\text{disj}}$ et $\hat{c}_{2,\lambda}^{\text{disj}}$ montre une meilleure localisation de la détection que $\hat{c}_{2,\lambda}^{\text{disj}}$. De plus, la segmentation conjointe, bénéficiant de l'information sur les deux composantes, présente systématiquement une meilleure localisation de la détection des changements.

Erreur quadratique relative moyenne. La figure 4 compare, pour $\lambda = \lambda_{2\text{seg}}$ (a) et $\lambda = \lambda_{J_{\max}}$ (b), les performances d'estimation en terme d'erreur quadratique relative moyenne (EQMr)

$$\text{EQMr}[(\hat{c}_1, \hat{c}_2), (c_1, c_2)] = \widehat{\mathbb{E}} \left[\frac{\|\hat{c}_1 - c_1\|^2}{\|c_1\|^2} + \frac{\|\hat{c}_2 - c_2\|^2}{\|c_2\|^2} \right] \quad (8)$$

où $\widehat{\mathbb{E}}$ est un estimateur empirique de la moyenne calculé sur 100 réalisations. Quelque soit la taille de la fenêtre d'estimation $|\mathcal{W}_{j,\ell}|$, on constate que

$$\text{EQMr}[(\hat{c}_1, \hat{c}_2)_{\lambda}^{\text{conj}}, (c_1, c_2)] \leq \text{EQMr}[(\hat{c}_1, \hat{c}_2)_{\lambda}^{\text{disj}}, (c_1, c_2)].$$

Pour $|\mathcal{W}_{j,\ell}| \equiv 2^8$, l'EQMr des deux méthodes est sensiblement la même. Cependant, ce résultat doit être contrasté avec les résultats présentés Fig. 3 et Fig. 2. En effet, à EQMr égale, $(\hat{c}_1, \hat{c}_2)_{\lambda}^{\text{conj}}$ détecte moins de segments et localise la rupture 15% plus près que $\hat{c}_{1,\lambda}^{\text{disj}}$ et $\hat{c}_{2,\lambda}^{\text{disj}}$.

Influence de $|\mathcal{W}_{j,\ell}|$. Plus $|\mathcal{W}_{j,\ell}|$ est grand, plus les estimées \hat{c}_1 et \hat{c}_2 sont lisses. Inversement, pour $|\mathcal{W}_{j,\ell}|$ faible, les estimées sont fortement variables. Dans les deux cas, cela rend difficile la détection et la localisation du changement. Les résultats expérimentaux que nous rapportons montrent que les détections de changement de c_1 et c_2 sont mieux estimées par l'utilisation d'une grande fenêtre d'estimation. La segmentation multivariée assure de localiser le plus précisément possible ces estimées pourtant fortement lissées au cours temps, un résultat peu intuitif a priori.

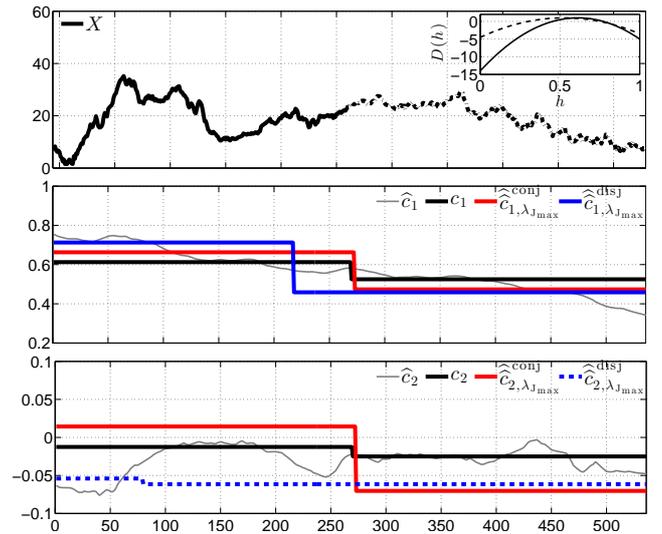


FIGURE 1 – **Illustration.** Comparaison entre les estimées $\hat{c}_{1,\lambda_{J_{\max}}}^{\text{disj}}$, $\hat{c}_{2,\lambda_{J_{\max}}}^{\text{disj}}$ et $(\hat{c}_1, \hat{c}_2)_{\lambda_{J_{\max}}}^{\text{conj}}$ de (c_1, c_2) .

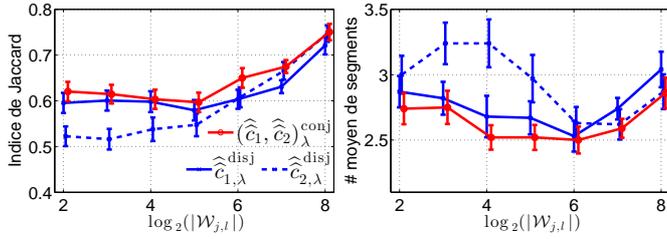


FIGURE 2 – Performances pour $\lambda_{J_{\max}}$.

5 Conclusion et perspectives

La présente contribution propose une première tentative visant à segmenter un signal en différentes portions caractérisées chacune par des propriétés multifractales homogènes. Elle repose sur l'estimation locale et la segmentation des coefficients c_1 et c_2 impliqués dans la formulation du spectre multifractal. Les performances d'estimation et de location des ruptures, évaluées sur des signaux synthétiques, démontrent l'intérêt de la segmentation conjointe des estimées de c_1 et c_2 . Nous montrons que l'estimation doit être conduite dans des voisinages temporels de grande taille.

La corrélation temporelle de \hat{c}_1 et \hat{c}_2 , inhérente à la nécessité d'estimer ces quantités dans des voisinages de taille significative, est susceptible de compliquer a priori les méthodes de segmentation utilisées, reposant sur une formulation par variation totale, qui sont adéquates lorsque les signaux à régulariser ne sont pas corrélés. Nous envisageons de poursuivre ce travail en modifiant les termes d'attache aux données présents dans les équations (6) et (7) pour prendre en compte ces corrélations. Par ailleurs, au lieu de segmenter c_1 et c_2 , il serait intéressant de segmenter les fonctions $C_{1,j}$ et $C_{2,j}$ conjointement à travers les échelles.

Références

- [1] S. Jaffard, "Wavelet techniques in multifractal analysis," in *Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot*, M. Lapidus and M. van Frankenhuijsen Eds., *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (M. Lapidus and M. van Frankenhuijsen, eds.), vol. 72, pp. 91–152, AMS, 2004.
- [2] S. G. Roux, A. Arneodo, and N. Decoster, "A wavelet-based method for multifractal image analysis. III. Applications to high-resolution satellite images of cloud structure," *Eur. Phys. J. B*, vol. 15, pp. 739–764, 2000.
- [3] H. Wendt, P. Abry, and S. Jaffard, "Bootstrap for empirical multifractal analysis," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 24, pp. 38–48, Jul. 2007.
- [4] N. Pustelnik, P. Abry, H. Wendt, and N. Dobigeon, "Inverse problem formulation for regularity estimation in images," in *Proc. Int. Conf. Image Process.*, (Paris, France), pp. 6081–6085, Oct. 27-30 2014.
- [5] C. Nafornita, A. Isar, and J. Nelson, "Regularised, semi-local hurst estimation via generalised lasso and dual-tree complex wavelets," in *Proc. Int. Conf. Image Process.*, (Paris, France), pp. 2689–2693, Oct. 27-30 2014.

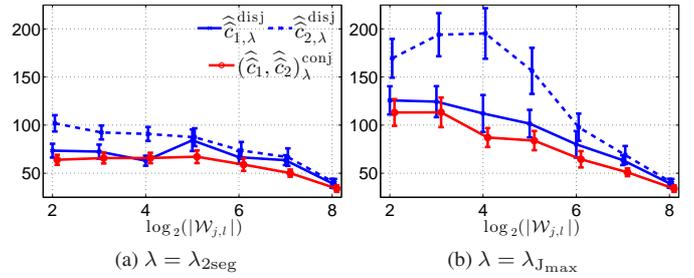


FIGURE 3 – Distance à la rupture.

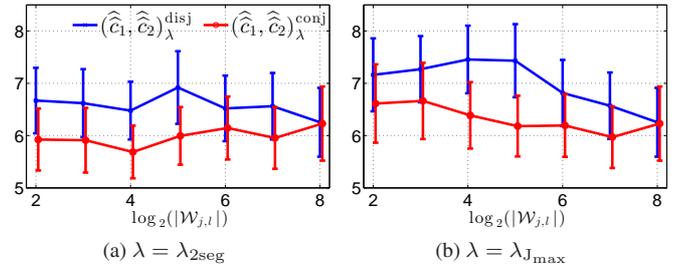


FIGURE 4 – Erreur quadratique moyenne relative.

- [6] L. Condat, "A primal-dual splitting method for convex optimization involving Lipschitzian, proximable and linear composite terms," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 158, no. 2, pp. 460–479, 2013.
- [7] B. C. Vũ, "A splitting algorithm for dual monotone inclusions involving cocoercive operators," *Adv. Comput. Math.*, vol. 38, pp. 667–681, 2011.
- [8] A. Chambolle and T. Pock, "A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging," *J. Math. Imag. Vis.*, vol. 40, no. 1, pp. 120–145, 2011.
- [9] N. Komodakis and J.-C. Pesquet, "Playing with duality : An overview of recent primal-dual approaches for solving large-scale optimization problems," *IEEE Signal Processing Magazine*, 2014. accepted for publication.
- [10] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. New York : Springer, 2011.
- [11] P. Ciuciu, P. Abry, and B. He, "Interplay between functional connectivity and scale-free dynamics in intrinsic fMRI networks," *NeuroImage*, vol. 95, pp. 248–263, 2014.
- [12] J. Frecon, N. Pustelnik, N. Dobigeon, H. Wendt, and P. Abry, "Hybrid Bayesian variational scheme to handle parameter selection in total variation signal denoising," in *Proc. Eur. Sig. Proc. Conference*, (Lisbon, Portugal), pp. 1716–1720, Sept. 2014.
- [13] P. Jaccard, "Distribution de la flore alpine dans le bassin des Dranses et dans quelques régions voisines," *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles*, no. 37, pp. 241–272, 1901.
- [14] R. Hamon, P. Borgnat, P. Flandrin, and C. Robardet, "Discovering the structure of complex networks by minimizing cyclic bandwidth sum," *arXiv preprint arXiv :1410.6108*, 2014.