

Détection de transitoires par analyse des récurrences de phase

Olivier LE BOT¹, Jérôme I. MARS¹, Cédric GERVAISE^{1,2}

¹Univ. Grenoble Alpes, GIPSA-Lab
11 rue des Mathématiques, Grenoble Campus BP46, F- 38000 Grenoble, France

²Chaire Chorus, Fondation de l'Institut National Polytechnique de Grenoble
46 Avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble, France

Olivier.le-bot@gipsa-lab.grenoble-inp.fr, Jerome.mars@gipsa-lab.grenoble-inp.fr
Cedric.gervaise@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

Résumé – Cet article présente un algorithme de détection de signaux déterministes dans un bruit additif Gaussien. Le détecteur utilise pour cela l'analyse par récurrence de phase. Il compare la distribution des coefficients de la matrice de similarité du signal mesuré, avec la distribution théorique attendue dans le cas bruit seul. Cette comparaison est faite par calcul de la divergence de Kullback-Leibler. L'analyse de performance, basée sur la construction des courbes COR, montre que le détecteur proposé est supérieur au détecteur d'énergie et au détecteur de Teager-Kaiser classiquement utilisés, donnant une probabilité de détection 10 à 50% plus grande, et a des performances similaires à celle d'un détecteur de type filtrage adapté.

Abstract – This article proposes an algorithm to detect an unknown deterministic signal hidden in additive white Gaussian noise. The detector is based on recurrence plot. It compares the distribution of the similarity matrix coefficients of the measured signal with an analytic expression of the distribution expected in the noise-only case. This comparison is achieved using Kullback-Leibler divergence. Performance analysis based on the receiver operating characteristics shows that the proposed detector outperforms the energy detector and Teager-Kaiser detector, giving a probability of detection 10% to 50% higher, and has a similar performance to that of a matched-filter detector.

1 Introduction

Décider si des données mesurées correspondent à un bruit seul ou si elles contiennent une composante déterministe constitue une étape importante dans de nombreuses applications, telles que l'interception de signaux radar ou sonar. Cette étape de détection consiste à faire un choix entre deux hypothèses binaires [1] :

- H_0 : le signal mesuré est un bruit seul : $x(t)=n(t)$
- H_1 : le signal mesuré contient un segment de signal déterministe mélangé à un bruit additif : $x(t)=s(t)+n(t)$

où $n(t)$ est un bruit blanc Gaussien (WGN), et $s(t)$ est le signal déterministe à détecter. Pour résoudre ce problème de détection, un test statistique est réalisé sur les données mesurées, puis son résultat est comparé à un seuil de détection [2].

Dans cet article, nous présentons un algorithme de détection basé sur l'analyse des récurrences de phase (RPA) [3], pour détecter des signaux déterministes inconnus et courts (<100 échantillons) dans un bruit additif Gaussien. Le RPA a été initialement introduit pour étudier les systèmes dynamiques non-linéaires [3], et est maintenant utilisé dans de nombreux domaines d'application. Cette méthode d'analyse transforme le signal en une image binaire, dont l'apparence dépend du comportement dynamique du système (i.e. aléatoire, déterministe, chaotique). En étudiant cette image, on peut donc connaître le comportement du système. Jusqu'à présent, la détection de si-

gnaux déterministe par cette méthode, s'est appuyée sur l'utilisations de métriques pour quantifier les formes contenues dans l'image [4, 5]. Dans cet article, nous proposons une nouvelle approche, qui consiste à étudier la distribution statistique des valeurs associées aux pixels de l'image non-seuillée.

La première partie de ce papier rappelle succinctement les principes de l'analyse par récurrence de phase. Nous présentons ensuite les différentes étapes de notre algorithme de détection. La troisième partie montre les performances de l'algorithme proposé et le compare aux détecteur d'énergie, de Teager-Kaiser et au filtrage adapté, dans un contexte de détection de transitoires.

2 L'analyse par récurrence de phase

Le passage d'un signal monodimensionnel à une représentation RPA se fait en deux étapes. Premièrement, on reconstruit la trajectoire du signal mesuré $x(i)$ ($i = 1, \dots, N$) dans un espace multidimensionnel de dimension m , appelé espace des phases, par la méthode des retards [6]. Chaque vecteur de l'espace des phases est donné par :

$$\overrightarrow{x_m(i)} = [x(i), x(i + \tau), \dots, x(i + (m - 1)\tau)] \quad (1)$$

où m est la dimension de l'espace des phases, et τ est le retard.

Deuxièmement, la similarité entre les vecteurs $\overrightarrow{x_m(i)}$ et $\overrightarrow{x_m(j)}$ de cet espace des phases est évaluée. La similarité est calculée entre toutes les paires possibles de vecteurs de l'espace des

phases, donnant une matrice de similarité définie comme suit :

$$d(i, j) = \text{Sim}(\overrightarrow{x_m(i)}, \overrightarrow{x_m(j)}) \quad (2)$$

où $\text{Sim}(\cdot, \cdot)$ est la fonction mathématique choisie pour étudier la similarité entre les vecteurs de l'espace des phases. Dans cet article, la fonction $\text{Sim}(\cdot, \cdot)$ sera le produit scalaire pour les raisons données plus en détail dans [7, 8].

Dans une analyse RPA classique, la matrice de similarité $d(i, j)$ est ensuite seuillée pour faire apparaître les états récurrents. Ce n'est pas le cas dans cet article où nous étudions directement les coefficients de la matrice de similarité pour effectuer notre détection.

3 Méthode

3.1 Vue d'ensemble de l'architecture

Après avoir calculé la matrice de similarité via les Eq. (1) et Eq. (2), on construit la densité de probabilité (PDF) des coefficients de celle-ci. Nous attendons de cette PDF qu'elle ait une certaine forme si le signal mesuré est un WGN et une autre forme si le signal mesuré est déterministe. Dans le cas WGN, l'expression mathématique de la distribution attendue est connue et obtenue analytiquement (cf. partie 3.3). L'étape suivante consiste donc à comparer la PDF théorique attendue sous l'hypothèse H_0 avec la PDF empirique associée à la matrice de similarité d'un signal mesuré inconnu, pour lequel on veut appliquer le test de détection. Cette comparaison est faite en calculant la divergence de Kullback-Leibler entre la PDF théorique et la PDF empirique. Le résultat du calcul de divergence est comparé à un seuil de détection, noté λ , choisi au sens de Neyman-Pearson, pour garantir une certaine probabilité de fausse alarme (Pfa). Toutes les étapes de ce schéma de détection sont résumées sur la Figure 1.

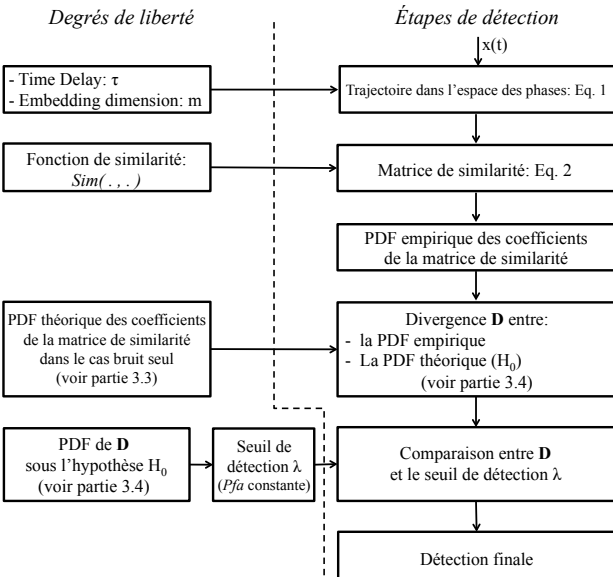


FIGURE 1 – Architecture du détecteur

3.2 Hypothèses

Sous l'hypothèse H_0 , nous supposons que les échantillons $x(1), \dots, x(n)$ sont des variables aléatoires, indépendantes entre elles, qui suivent une distribution Gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2 . Les composantes des vecteurs de l'espace des phases (Eq. 1) sont donc également des variables aléatoires indépendantes Gaussiennes, de moyenne nulle et de variance σ^2 . Les vecteurs de l'espace des phases sont supposés indépendants les uns des autres. Sous ces hypothèses, nous modélisons analytiquement la PDF suivie par les coefficients de la matrice de similarité, lorsque le produit scalaire est utilisé pour calculer la similarité entre les vecteurs de l'espace des phases.

3.3 Distribution analytique des coefficients de la matrice de similarité dans le cas « bruit seul »

Le produit scalaire entre deux vecteurs de l'espace des phases est défini comme suit :

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^m x_k(i) \times x_k(j) \quad (3)$$

où $x_k(i)$ et $x_k(j)$ sont les k^{eme} composantes des vecteurs $\overrightarrow{x_m(i)}$ et $\overrightarrow{x_m(j)}$, respectivement.

Nous avons démontré [7, 8] qu'en normalisant le produit scalaire par un facteur $2/\sigma^2$, les coefficients de la matrice de similarité suivent la distribution suivante :

$$f_{(2d_{i,j}/\sigma^2)}(z) = \frac{|z|^{\frac{m-1}{2}}}{2^m \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} K_{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{|z|}{2}\right) \quad (4)$$

où Γ est la fonction Gamma, m est la dimension de l'espace des phases et $K_\nu(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre 2 modifiée. Cette PDF est continue en $z = 0$ pour $m > 1$, et a pour valeur :

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_{(2d_{i,j}/\sigma^2)}(z) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \quad (5)$$

3.4 Test d'ajustement par mesure de divergence

L'étape suivante (bloc 4 de la Fig. 1) consiste à comparer la PDF analytique donnée dans la section précédente (Eq. (4), (5)), avec la distribution empirique des coefficients de la matrice de similarité d'un signal inconnu, afin de décider si cette dernière ressemble à la PDF attendue sous l'hypothèse H_0 . Une telle comparaison est appelée *test d'ajustement*.

L'un des tests d'ajustement les plus communément utilisés est le test du χ^2 [9]. Cependant, celui-ci ne peut être utilisé dans le cas présent, car les coefficients de la matrice de similarité ne sont pas totalement indépendants les uns des autres, ce qui biaise le résultat du test du χ^2 , en donnant plus de faux-positifs qu'attendu [10]. Pour s'affranchir de ce problème, nous réalisons notre propre test d'ajustement, basé sur la mesure de la divergence entre la PDF analytique et la PDF empirique.

Parmi l'ensemble des divergences existantes dans la littérature nous avons montré dans [7, 8] que la divergence de Kullback-Leibler était celle qui donnait les meilleurs résultats en terme de détection. Pour rappel, la divergence de Kullback-Leibler est définie comme suit :

$$D_{KL}(p \parallel q) = \int p(x) \ln \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) \quad (6)$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont les PDFs que l'on compare.

Pour décider si le signal mesuré est un WGN ou un signal déterministe, nous comparons le résultat de la divergence de Kullback-Leibler à un seuil λ , dont la valeur est choisie pour assurer une certaine Pfa. Il est donc nécessaire de connaître la PDF des divergences de Kullback-Leibler sous l'hypothèse H_0 . Nous obtenons celle-ci par simulation de Monte-Carlo, en générant un WGN d'une durée de 100 échantillons, et en appliquant les quatre premières étapes de notre algorithme de détection (Fig. 1). Nous répétons cette simulation un grand nombre de fois (50 000 réalisations) pour obtenir 50 000 valeurs de divergence et pouvoir ainsi construire leur PDF sous H_0 .

4 Analyse des performances

Les performances du détecteur sont décrites à travers les caractéristiques opérationnelles du récepteur (courbes COR). Tous les résultats présentés sont donnés pour un espace des phases de dimension $m = 16$ et un retard $\tau = 1$. Toutes les conclusions restent valables pour $m \in [8, 20]$. Une présentation plus détaillée de ces résultats peut être trouvée dans [7, 8].

4.1 Méthodologie

Pour calculer les courbes COR, il est nécessaire de connaître la distribution de la divergence de Kullback-Leibler sous l'hypothèse H_1 . Cette distribution est également obtenue par simulation de Monte-Carlo (50 000 réalisations). Le signal déterministe à détecter est un cosinus, dont la fréquence f_0 est choisie aléatoirement à chaque réalisation (distribution uniforme), de sorte que $f_0/f_e \in [0.05 \ 0.45]$, où f_e est la fréquence d'échantillonnage. Ce cosinus est additionné à un WGN de 100 échantillons. Comme dans un contexte d'interception passive la durée du signal à détecter est généralement inconnu, nous étudions les performances du détecteur lorsque la durée du cosinus est inférieure à 100 échantillons. La PDF de la divergence de Kullback-leibler est donc calculée pour des durées du cosinus allant de 10 à 100 échantillons (Fig 2). Les rapports signal sur bruit (RSB) 0 dB, 1.5 dB et 3 dB sont étudiés. Seuls les résultats les plus significatifs sont présentés. Sous l'hypothèse H_1 , le signal mesuré est donc donné par $x(t) = b(t) + A \cos(2\pi f_0 t) \text{rect}_T(t)$, où $b(t)$ est un WGN, $\text{rect}_T(t)$ est une fenêtre rectangulaire de durée T , A est l'amplitude du cosinus et f_0 est sa fréquence. Les courbes COR dépendent donc des valeurs choisies pour le couple (RSB, T)

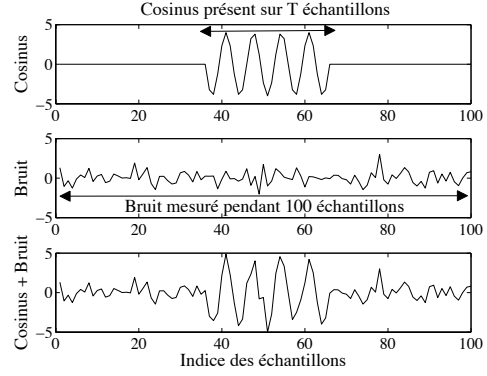


FIGURE 2 – Sous l'hypothèse H_1 , un cosinus d'amplitude A et de durée $T \in \{10, 20, \dots, 80, 100\}$, est ajouté à un WGN de 100 échantillons.

4.2 Détecteurs de référence

Les courbes COR du détecteur proposé sont comparées à celles du détecteur d'énergie [2], du détecteur de Teager-Kaiser [11] et à une forme sous-optimale du filtrage adapté [2]. Nous rappelons les expressions des distributions associées à ces détecteurs sous les hypothèses H_0 et H_1 .

4.2.1 Détecteur d'énergie

Le détecteur d'énergie est basé sur la variable aléatoire :

$$g = \sum_{i=1}^L x(t_i)^2 \quad (7)$$

où $x(t)$ est le signal mesuré. Sous l'hypothèse H_0 , le signal mesuré est un WGN de moyenne nulle et de variance σ^2 . Dans ce cas, la variable aléatoire g/σ^2 suit une loi du χ^2 à L degrés de liberté. Sous l'hypothèse H_1 , la variable aléatoire g/σ^2 suit une loi du χ^2 non centrée à L degrés de liberté et avec un paramètre de non-centralité $\zeta = TA^2/2\sigma^2$ [2].

4.2.2 Détection par filtrage adapté sous-optimal

Lorsque la forme d'onde du signal à détecter est parfaitement connue, le détecteur optimal est le filtrage adapté. Dans cet article, nous considérons le cas sous-optimal dans lequel le détecteur connaît toutes les caractéristiques du cosinus à détecter, sauf sa durée T . Aussi, ce détecteur suppose que le cosinus est présent tout le temps, alors qu'il n'est présent que sur T échantillons. Ce détecteur est basé sur la variable aléatoire :

$$g = \sum_{i=1}^L x(t_i) \times A \cos(2\pi f_0 t_i) \quad (8)$$

où L est la durée du signal mesuré $x(t)$. On peut alors démontrer que sous l'hypothèse H_0 , la variable aléatoire g suit une loi normale de moyenne nulle et de variance $L\sigma^2 A^2/2$ [2], et que sous l'hypothèse H_1 , elle suit une loi normale de moyenne $TA^2/2$ et de variance $L\sigma^2 A^2/2$ [2].

4.2.3 Détecteur de Teager-Kaiser

Le détecteur de Teager-Kaiser [11] est une forme de détecteur d'énergie qui s'appuie sur la variable aléatoire suivante :

$$g(n) = x(n)^2 - x(n-1)x(n+1) \quad (9)$$

Contrairement au détecteur proposé dans cet article et au deux détecteurs de référence précédents, le détecteur de Teager-Kaiser ne fait pas une intégration sur L échantillons, mais effectue le test de détection sur chaque échantillon pris individuellement. Aussi, pour construire ses courbes COR, nous avons tout d'abord généré par simulations de Monte-Carlo, la distribution de la variable aléatoire g sous l'hypothèse H_0 . Cette distribution permet de fixer un seuil de détection assurant une certaine Pfa. Sous l'hypothèse H_1 , nous avons calculé les valeurs de $g(n)$ pour chaque échantillon des signaux de 100 échantillons générés. Nous avons alors considéré que le cosinus était détecté si au moins un de ses échantillon était détecté, c'est à dire, si la valeur de $g(n)$ associé à cet échantillon dépassait le seuil de détection choisi. Cette expérience a été renouvelé 1 million de fois. En comptant le nombre d'expériences parmi ces 1 million, au cours desquelles le cosinus a été détecté nous avons obtenu la probabilité de détection du cosinus.

4.3 Résultats

Pour tout RSB > 0 , les performances du détecteur proposé sont supérieures à celles du détecteur d'énergie, quelque soit la durée T du cosinus (Fig. 3). Pour une Pfa de 10^{-4} par exemple, le gain en terme de probabilité de détection varie de 0.05 à 0.45, selon le RSB et T . Pour la plus part des couples (RSB, T), notre détecteur a des performances similaires à celle du filtrage adapté sous-optimal. Les performances de notre détecteur sont même significativement meilleurs lorsque le cosinus est très court ($T < 30$) et le RSB > 2 dB. Enfin, dès que le cosinus est présent pendant plus de 30 échantillons, notre détecteur est significativement supérieur au détecteur de Teager-Kaiser (gain de la Pd entre 0.3 et 0.8 lorsque la Pfa $< 10^{-3}$).

5 Conclusion

Dans cet article nous avons présenté un algorithme de détection de signaux déterministes inconnus dans un bruit additif Gaussien, s'appuyant sur une analyse statistique des coefficients de la matrice de similarité obtenue lors d'une analyse par récurrence de phase. Nous avons montré que le détecteur proposé a des performances supérieures à celles d'un détecteur d'énergie et à celles d'un détecteur de Teager-Kaiser, et des performances similaires à un filtrage adapté sous-optimal.

Références

[1] *Statistical Methods and Scientific Induction*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B 17 (1), 1955.
 [2] S. M. Kay. *Fundamentals of statistical signal processing, volume 2 : Detection theory*. Prentice Hall, 1993.

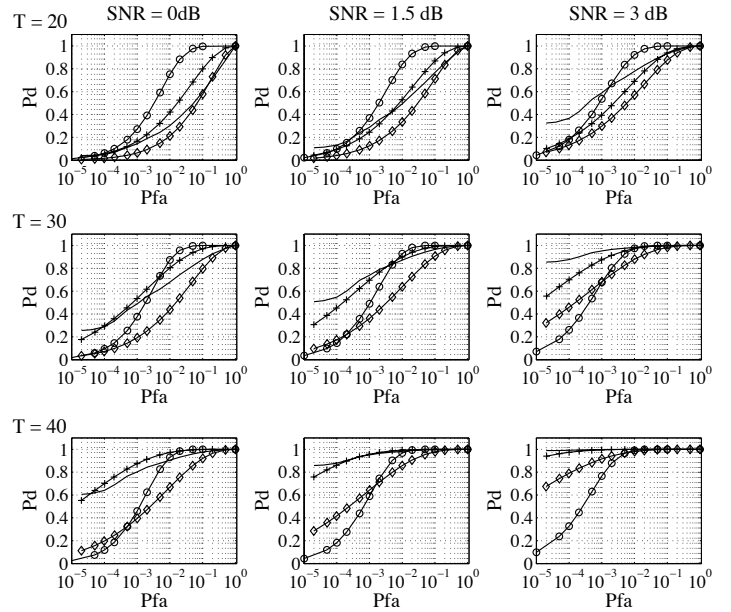


FIGURE 3 – Courbes COR du détecteur proposé (lignes pleines), du détecteur d'énergie (\diamond), du filtrage adapté sous-optimal (+) et du détecteur de Teager-Kaiser (o), en fonction du RSB (colonnes) et de la durée du cosinus (lignes)

[3] J. P. Eckmann, S.O. Kamphorst, D. Ruelle. *A new graphical tool for measuring the time constancy of dynamical systems is presented and illustrated with typical examples*. Europhys. Lett., 1987.
 [4] J.P. Zbilut, A. Giuliani, C.L. Webber. *Detecting deterministic signals in exceptionally noisy environments using cross-recurrence quantification*. Phys. Lett. A, 1998.
 [5] N. Marwan, J. Kurths. *Comment on "stochastic analysis of recurrence plots with applications to the detection of deterministic signals" by Rohde et al. [physica d 237 (2008) pp. 619–629]*. Physica D, 2009.
 [6] F. Takens. *Detecting strange attractors in turbulence*. Dynamical systems and turbulence, Lecture Notes in Mathematics, 1981.
 [7] O. Le Bot. *Détection, localisation, caractérisation de transitoires acoustiques sous-marins*. Université Grenoble Alpes, 2014.
 [8] O. Le Bot, J.I. Mars, C. Gervaise. *Similarity matrix analysis and divergence measures for statistical detection of unknown deterministic signals hidden in additive noise*. Phys. Lett. A, in press, 2015.
 [9] S.M. Ross. *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists*. Academic Press, 2009.
 [10] J. V. Michalowicz, J.M. Nichols, F. Bucholtz. *Signal detection based on recurrence matrix statistics*. Phys. Lett. A, 2008.
 [11] J.F. Kaiser *On a simple algorithm to calculate the energy of a signal*. IEEE International Conference of Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990.