

# Algorithme de Jacobi rapide pour la diagonalisation conjointe non-unitaire de tenseurs d'ordre trois

Victor MAURANDI<sup>1,2</sup> et Eric MOREAU<sup>1,2</sup>\*

<sup>1</sup>Aix Marseille Université, CNRS, ENSAM, LSIS, UMR 7296, 13397 Marseille, France.

<sup>2</sup>Université de Toulon, CNRS, LSIS, UMR 7296, 83957 La Garde, France.

{maurandi, moreau}@univ-tln.fr

**Résumé** – On considère le problème de diagonalisation conjointe non-unitaire de tenseurs symétriques d'ordre trois à valeurs réelles. Cela apparaît dans de nombreux problèmes de traitement de signal et particulièrement en séparation de sources. On propose un nouvel algorithme de type Jacobi basé sur une paramétrisation LU de la matrice diagonalisante. L'estimation des paramètres est faite de façon entièrement analytique suivant une stratégie basée sur une estimation alternée et une fonction de coût inverse. Deux approches différentes de cet algorithme sont présentées. La diagonalisation est directement effectuée sur les tenseurs d'ordre trois et non sur leur version dépliée.

**Abstract** – We consider the problem of non-unitary joint diagonalization of real-valued third-order symmetric tensors. This appears in many signal processing problems and it is instrumental in source separation. We propose a new Jacobi-like algorithm based on an LU parameterization of the so-called diagonalizing matrix. The parameters estimation is done analytically following a strategy based on an alternate estimation and an inverse cost function. Two different approaches of this algorithm are presented. An important point is that the diagonalization is directly done on the third-order tensors and not on their unfolded version.

## 1 Introduction

La diagonalisation conjointe de matrices et de tenseurs se situe parmi les outils les plus utilisés en séparation de sources et en analyse en composantes indépendantes (ACI) [1] [2]. Elle prend ses origines dans les publications [3] et [4] où la diagonalisation conjointe unitaire de matrices et la diagonalisation unitaire d'un tenseur d'ordre quatre sont respectivement introduites en lien avec l'ACI. Une généralisation peut être trouvée dans [5] et le cas spécifique de la diagonalisation conjointe unitaire de tenseurs d'ordre trois est abordé dans [6].

Plus récemment, l'attention s'est portée sur la diagonalisation conjointe non-unitaire de matrices, voir notamment [7]-[13] ainsi que les références qui s'y trouvent. La diagonalisation conjointe non-unitaire est un problème important car elle permet d'éviter une étape de prétraitement (blanchiment des observations en séparation de sources) qui, en pratique, limite les performances. De nombreux algorithmes de ce type ont été développés. Parmi eux, les algorithmes de type Jacobi sont particulièrement intéressants de par leur simplicité, leur capacité à traiter des matrices de grandes dimensions et leur très bonnes performances, voir par exemples [9]-[13]. La diagonalisation conjointe non-unitaire de tenseurs, correspondant à une décomposition Canonique Polyadique (CP) conjointe de tenseurs, est un sujet relativement ouvert. Il a été abordé dans le cadre de mélanges sous-déterminés pour un ensemble de tenseurs cumu-

lants [14] et pseudo-cumulants [15], où le problème est traité par dépliement des tenseurs de manière à retomber sur une diagonalisation conjointe de matrices.

Dans ce papier, on propose deux algorithmes proches de type Jacobi pour la diagonalisation conjointe non-unitaire de tenseurs symétriques d'ordre trois à valeurs réelles. Ils sont basés sur une paramétrisation particulière de la matrice diagonalisante. Les deux approches reposent sur une estimation alternée des paramètres qui est faite de manière entièrement analytique à l'aide d'un critère inverse approprié.

## 2 Formulation du problème

On considère un ensemble de  $K$  ( $K \in \mathbb{N}^*$ ) tenseurs d'ordre trois à valeurs réelles et de dimensions  $N \times N \times N$  ( $N \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ) tel que  $\mathbf{T}(k) = (T_{p_1 p_2 p_3}(k))$  avec  $k \in \mathcal{K}$  ( $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$ ) et  $(p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{N}^3$  ( $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ ). Ces tenseurs  $\mathbf{T}(k)$  sont supposés suivre la décomposition terme à terme suivante

$$T_{p_1 p_2 p_3}(k) = \sum_{(q_1, q_2, q_3) \in \mathcal{N}^3} D_{q_1 q_2 q_3}(k) A_{p_1 q_1} A_{p_2 q_2} A_{p_3 q_3} \quad (1)$$

où  $\mathbf{A} = (A_{pq})$  est une matrice  $N \times N$  réelle inversible et  $\mathbf{D}(k) = (D_{q_1 q_2 q_3}(k))$  sont  $K$  tenseurs réels diagonaux de dimensions  $N \times N \times N$ , ce qui signifie que seuls les éléments  $D_{aaa}(k)$ ,  $a \in \mathcal{N}$ , sont potentiellement non nuls. Par la suite, pour simplifier, on notera la relation (1) de la façon suivante

$$\mathbf{T}(k) = \mathbf{D}(k) \times_{(3)} \mathbf{A} . \quad (2)$$

\*Les auteurs remercient la Direction Générale de l'Armement pour son support financier.

Il est important de noter que, pour tout  $k$ , les tenseurs  $\mathbf{T}(k)$  sont symétriques, c'est-à-dire que  $R_{abc}(k) = R_{efd}(k)$  pour tout  $(e, f, d)$  résultant d'une permutation de  $(a, b, c)$ .

Le but de la diagonalisation conjointe de tenseurs d'ordre trois est donc, à partir des seuls tenseurs de données  $\mathbf{T}(k)$ , d'identifier une matrice inversible  $\mathbf{B}$  telle que pour tout  $k \in \mathcal{K}$ , les tenseurs transformés

$$\mathbf{R}(k) = \mathbf{T}(k) \times_{(3)} \mathbf{B} \quad (3)$$

soient tous conjointement diagonaux. Par la suite, on appellera  $\mathbf{B}$  la matrice diagonalisante. On montre aisément que si  $\mathbf{B}$  est égale à l'inverse de la matrice  $\mathbf{A}$ , à des facteurs d'échelle et des permutations des vecteurs lignes près, alors  $\mathbf{R}(k)$  sont tous diagonaux.

En pratique, les tenseurs  $\mathbf{T}(k)$  sont estimés à partir d'un nombre fini de données, à l'aide d'opérateurs d'analyse ou de statistiques d'ordre supérieur (comme, par exemple, les cumulants d'ordre quatre). Ainsi, il est impossible de rendre les tenseurs  $\mathbf{T}(k)$  exactement diagonaux, on ne pourra les diagonaliser conjointement qu'approximativement. Pour mesurer la « diagonalité » des tenseurs, on utilise classiquement une fonction de coût. Ici, on utilisera le critère inverse suivant

$$\mathcal{J}(\mathbf{B}) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \|\mathbf{ZT} \text{diag} \{\mathbf{R}(k)\}\|^2 \quad (4)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne et  $\mathbf{ZT} \text{diag} \{\cdot\}$  est l'opérateur annulant les composantes diagonales des tenseurs en argument. Il s'agit donc maintenant d'un problème d'optimisation où l'on cherche une matrice  $\mathbf{B}$  minimisant  $\mathcal{J}$ .

### 3 Algorithme proposé

Afin de simplifier l'estimation de la matrice  $\mathbf{B}$  et d'éviter les solutions singulières (matrices non-inversibles), on propose d'utiliser une paramétrisation LU qui va permettre de contraindre le déterminant de la matrice diagonalisante à un.

Toute matrice carrée peut toujours être décomposée sous la forme  $\mathbf{DPLU}$  où  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale,  $\mathbf{P}$  une matrice de permutation et  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  des matrices triangulaires, respectivement inférieure et supérieure, de coefficients diagonaux tous égaux à 1. Les indéterminations classiques de ce problème font que les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{P}$  de la décomposition précédente ne pourront pas être identifiées. Ainsi il est suffisant de rechercher une matrice  $\mathbf{B}$  s'écrivant sous la forme  $\mathbf{B} = \mathbf{LU}$ . Comme chacun des déterminants de  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  vaut un, on remarque qu'on a bien  $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{L}) \det(\mathbf{U}) = 1$ . Dans ce papier, on propose d'estimer les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  de manière découplée, c'est-à-dire que dans un premier temps, on minimisera (4) en posant  $\mathbf{B} = \mathbf{U}$  puis on fera de même en posant  $\mathbf{B} = \mathbf{L}$ .

Les deux algorithmes proposés sont de type Jacobi. Cette méthode consiste à décomposer une matrice  $N \times N$  en un produit de  $\frac{N(N-1)}{2}$  matrices  $N \times N$  « simples » que l'on appellera matrices élémentaires. Ainsi,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{L}$  sont décomposées de la

manière suivante

$$\mathbf{U} = \prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=i+1}^N \mathbf{U}^{ij} \quad \text{et} \quad \mathbf{L} = \prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=i+1}^N \mathbf{L}^{ij}. \quad (5)$$

Dans (5), les matrices élémentaires  $\mathbf{U}^{ij}$  (resp.  $\mathbf{L}^{ij}$ ) diffèrent de l'identité  $N \times N$  seulement par leur terme  $(i, j)$  (resp.  $(j, i)$ ),  $i < j$  que l'on notera  $u_{ij}$  (resp.  $\ell_{ij}$ ). Chaque matrice élémentaire ne dépend donc que d'un seul paramètre.

L'ensemble de la procédure proposée est décrite ci-dessous.

- Initialiser  $\mathbf{B}$  et construire les tenseurs transformés

$$\mathbf{R}(k) \leftarrow \mathbf{T}(k) \times_{(3)} \mathbf{B}$$

- Étape U : pour tous les indices  $1 \leq i < j \leq N$

- Calculer  $\mathbf{U}^{ij}$  et mettre à jour  $\mathbf{R}(k)$  et  $\mathbf{B}$

- Étape L : pour tous les indices  $1 \leq i < j \leq N$

- Calculer  $\mathbf{L}^{ij}$  et mettre à jour  $\mathbf{R}(k)$  et  $\mathbf{B}$

Cette procédure, qui correspond à un balayage, doit être réitérée jusqu'à convergence. On appelle cette algorithme T-ALUJA (pour *Tensorial Alternate LU Jacobi Algorithm*).

## 4 Estimation des paramètres

Dans cette section, on considèrera uniquement la matrice  $\mathbf{U}^{ij}$  pour un couple  $(i, j)$ ,  $i < j$  donné. La matrice  $\mathbf{L}^{ij}$  étant la transposée d'une matrice triangulaire supérieure similaire à  $\mathbf{U}^{ij}$ , on déduira donc directement la solution optimale pour le paramètre  $\ell_{ij}$ , en interchangeant simplement les indices  $i$  et  $j$  dans les développements suivant.

On propose deux approches différentes. La première, dite classique, consiste à utiliser directement le critère (4) pour estimer les différents paramètres. Ainsi on prendra en compte l'intégralité des composantes hors-diagonales modifiées par la transformation (3). La seconde approche est similaire mais adaptée au cas où l'on est proche d'une solution diagonalisante.

### 4.1 Approche de type classique

En utilisant directement le critère (4) sur  $\mathbf{U}^{ij}$ , on obtient

$$\mathcal{J}(\mathbf{U}^{ij}) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \|\mathbf{ZT} \text{diag} \{\mathbf{R}^{ij}(k)\}\|^2 \quad (6)$$

avec

$$\mathbf{R}^{ij}(k) = \mathbf{R}(k) \times_{(3)} \mathbf{U}^{ij}. \quad (7)$$

On cherche la solution optimale de  $u_{ij}$  minimisant (6). La transformation (7) n'impacte que les éléments de  $\mathbf{R}(k)$  aux positions  $\{(i, y, z) \cup (x, i, z) \cup (x, y, i)\}$  avec  $(x, y, z) \in \mathcal{N}^3$ , soit un élément diagonal et  $3N(N-1)$  éléments hors-diagonaux. De plus, on rappelle que  $\mathbf{R}(k)$  sont des tenseurs symétriques. Par la transformation (7),  $\mathbf{R}^{ij}(k)$  sont symétriques aussi, cela réduit considérablement le nombre d'éléments hors-diagonaux intéressants. Ainsi, par là suite, on se concentrera uniquement sur les éléments de  $\mathbf{R}^{ij}(k)$ , pour tout  $k$ , dont les indices appartiennent à  $\{(i, m, n) | m \in \mathcal{N}, n \in \mathcal{P}\}$  avec  $\mathcal{P} = \mathcal{N} \setminus \{i\}$ . Pour

tout  $(p, q) \in \mathcal{P}^2$ , on a alors

$$\begin{aligned} R_{iiq}^{ij}(k) &= R_{iiq}(k) + 2R_{ijq}(k)u_{ij} + R_{jjq}(k)u_{ij}^2 \\ R_{ipq}^{ij}(k) &= R_{ipq}(k) + R_{j pq}(k)u_{ij}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ainsi (6) peut s'écrire

$$\mathcal{J}(\mathbf{U}^{ij}) = 3 \sum_{k \in \mathcal{K}} \left\{ \sum_{q \in \mathcal{P}} (R_{iiq}^{ij}(k) + 2 \sum_{p \in \mathcal{P}} R_{ipq}^{ij}(k)) \right\} + C \quad (9)$$

où  $C$  regroupe les carrés de tous les éléments hors-diagonaux qui n'ont pas été modifiés par la transformation (7).

En utilisant (8) dans (9), on obtient

$$\mathcal{J}(\mathbf{U}^{ij}) = a_0 + a_1 u_{ij} + a_2 u_{ij}^2 + a_3 u_{ij}^3 + a_4 u_{ij}^4 \quad (10)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \sum_{k \in \mathcal{K}} \left\{ \sum_{q \in \mathcal{P}} (R_{iiq}^2(k) + \sum_{p \in \mathcal{P}} R_{ipq}^2(k)) \right\} + C \\ a_1 &= 6 \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{q \in \mathcal{P}} (2R_{iiq}(k)R_{ijq}(k) + \sum_{p \in \mathcal{P}} R_{ipq}(k)R_{j pq}(k)) \\ a_2 &= 3 \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{q \in \mathcal{P}} (4R_{iiq}(k)R_{jjq}(k) + 2R_{ijq}^2(k) + \sum_{p \in \mathcal{P}} R_{j pq}^2(k)) \\ a_3 &= 12 \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{q \in \mathcal{P}} R_{ijq}(k)R_{jjq}(k) \\ a_4 &= 3 \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{q \in \mathcal{P}} R_{jjq}^2(k). \end{aligned} \quad (11)$$

Pour trouver  $u_{ij}$ , on dérive (10) par rapport à  $u_{ij}$ , on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{U}^{ij})}{\partial u_{ij}} = a_1 + 2a_2 u_{ij} + 3a_3 u_{ij}^2 + 4a_4 u_{ij}^3. \quad (12)$$

Comme c'est un polynôme d'ordre trois, les racines de  $\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{U}^{ij})}{\partial u_{ij}}$  peuvent être calculées analytiquement. On choisit alors la racine réelle  $u_{ij}$  minimisant la valeur de  $\mathcal{J}$ .

## 4.2 Approche adaptée

Lorsque l'on examine en détail l'approche précédente, on remarque que certaines composantes des tenseurs transformés ont un poids plus fort par rapport aux autres lorsque l'on est proche d'une solution diagonalisante (dans le sens où pour tout  $k \in \mathcal{K}$ , tous les éléments hors-diagonaux des  $\mathbf{R}(k)$  ont un module très petit par rapport à l'élément diagonal non nul des  $\mathbf{R}(k)$  de plus petit module). Sous cette hypothèse, pour tout  $(a, b, c) \in \{\mathcal{N}^3 \setminus (p, p, p) | p \in \mathcal{N}\}$ ,  $|R_{abc}(k)| \ll 1$  et il est facile de montrer que  $|u_{ij}| \ll 1$ . Ainsi dans (8), dans la première équation, pour tout  $q \in \mathcal{P}$ , on a  $|R_{ijq}(k)u_{ij}| \ll |R_{iiq}(k)|$  et  $|R_{jjq}(k)u_{ij}^2| \ll |R_{iiq}(k)|$ , et dans la seconde équation, pour tout  $(r, s) \in \{\mathcal{P}^2 \setminus (j, j)\}$ ,  $|R_{jrs}(k)u_{ij}| \ll |R_{irs}(k)|$ . D'où, sous cette hypothèse, (8) s'écrit

$$\begin{aligned} R_{iiq}^{ij}(k) &\approx R_{iiq}(k) \\ R_{irs}^{ij}(k) &\approx R_{irs}(k) \\ R_{jjj}^{ij}(k) &= R_{jjj}(k) + R_{jjj}(k)u_{ij}. \end{aligned} \quad (13)$$

Chaque  $\mathbf{R}^{ij}(k)$  ne contient alors, approximativement, qu'un seul terme hors-diagonal non-constant, à savoir  $R_{ijj}^{ij}(k)$ . Finalement, en utilisant (13) dans (9), après quelques calculs, on approche (12) par

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{U}^{ij})}{\partial u_{ij}} \approx 6 \sum_{k \in \mathcal{K}} R_{jjj}(k) (R_{ijj}(k) + R_{jjj}(k)u_{ij}). \quad (14)$$

En égalant (14) à zéro, on trouve l'expression analytique de  $u_{ij}$  suivante

$$u_{ij} = - \frac{\sum_{k \in \mathcal{K}} R_{ijj}(k)R_{jjj}(k)}{\sum_{k \in \mathcal{K}} R_{jjj}^2(k)}. \quad (15)$$

Cette approche adaptée permet une réduction de la complexité par rapport à l'approche classique.

## 5 Simulations numériques

On va, maintenant, illustrer les performances des deux algorithmes proposés. Celui utilisant l'approche classique sera simplement désigné par T-ALUJA, tandis que celui utilisant l'approche adaptée sera noté T-ALUJA-A.

Afin d'évaluer les performances de l'algorithme, on considère l'indice de performance tel qu'il est défini dans [13]-[17]. Cet indice normalisé compare la matrice globale  $\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{A}$  au produit d'une matrice diagonale et d'une matrice de permutation. L'indice vaut zéro si  $\mathbf{S}$  est égale à  $\mathbf{D}\mathbf{P}$ .

On considère 15 tenseurs symétriques à valeurs réelles de dimensions  $10 \times 10 \times 10$  définis dans un contexte bruité par  $\mathbf{T}(k) + t\mathbf{N}(k)$  où  $\mathbf{N}(k)$  sont des tenseurs de bruit et  $t$  représente le niveau de bruit. Toutes les composantes de la matrice  $\mathbf{A}$  et des tenseurs diagonaux  $\mathbf{D}(k)$  suivent une loi uniforme sur  $[-1, 1]$  tandis que les composantes de  $\mathbf{N}(k)$  suivent une loi normale centrée réduite. Enfin, on choisit la matrice identité pour initialiser  $\mathbf{B}$ .

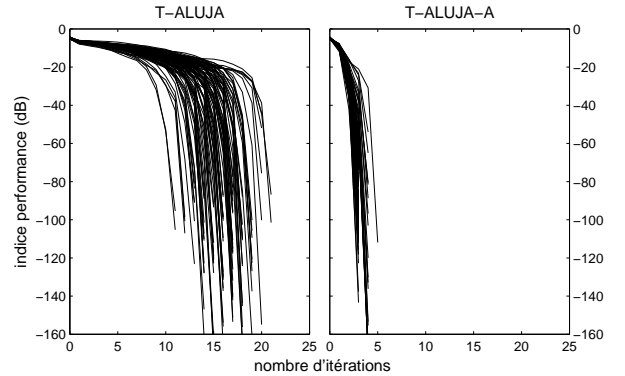


FIGURE 1 – Indice de performance par rapport au nombre d'itérations pour 15 tenseurs de dimensions  $10 \times 10 \times 10$  dans un contexte non bruité (100 tirages indépendants).

La figure 1 montre l'évolution de l'indice de performance au fil des itérations dans un contexte non bruité pour 100 tirages indépendants. Bien que l'initialisation de  $\mathbf{B}$  soit très éloignée

gnée d'une solution diagonalisante, on constate que T-ALUJA-A présente une bien meilleure vitesse de convergence que T-ALUJA. En effet tous les tirages de T-ALUJA-A convergent entre la 4<sup>ème</sup> et la 6<sup>ème</sup> itération tandis que les tirages de T-ALUJA convergent entre la 12<sup>ème</sup> et la 22<sup>ème</sup> itération.

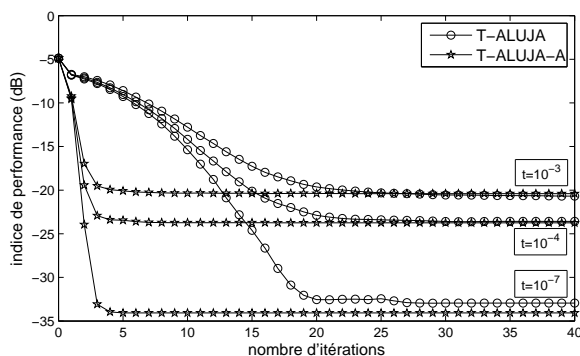


FIGURE 2 – Indice de performance moyen par rapport au nombre d'itérations pour 15 tenseurs de dimensions  $10 \times 10 \times 10$  pour différents niveaux de bruit  $t \in \{10^{-7}, 10^{-4}, 10^{-3}\}$  (100 tirages indépendants).

La figure 2 présente l'évolution de l'indice de performance moyen (sur 100 tirages) au fil des itérations dans différents contextes bruités ( $t \in \{10^{-7}, 10^{-4}, 10^{-3}\}$ ). De nouveau, T-ALUJA-A montre une meilleure vitesse de convergence que T-ALUJA. Concernant le niveau de performance atteint, les deux approches donnent des résultats similaires. Parfois un algorithme atteint un niveau de performance moyen légèrement meilleur par rapport à l'autre.

## 6 Conclusion

Nous avons proposé deux algorithmes de type Jacobi pour la diagonalisation conjointe non-unitaire de tenseurs symétriques d'ordre trois. Ceux-ci sont basés sur une estimation découplée des paramètres de la matrice diagonalisante et ils reposent sur la résolution analytique d'un problème d'optimisation à l'aide d'un critère inverse. La première approche prend en compte tous les termes hors-diagonaux des tenseurs tandis que la seconde est basée sur une sélection des termes les plus pondérés lorsque l'on est proche d'une solution diagonalisante. Les simulations numériques confirment la validité de ces deux approches et souligne le très bon comportement de T-ALUJA-A par rapport à T-ALUJA en terme de vitesse de convergence.

## Références

[1] P. Comon, C. Jutten, eds. *Handbook of Blind Source Separation, Independent Component Analysis and Applications* Academic Press, 2010.

[2] E. Moreau and T. Adali, *Blind Identification and Separation of Complex-valued Signals*, FOCUS Digital Signal and Image Processing Series, Wiley-ISTE, 2013.

[3] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind Beamforming for Non Gaussian Signals", *IEE Proceedings-F*, Vol. 40, pp 362-370, 1993.

[4] P. Comon, "Independent Component Analysis, a New Concept?", *Signal processing, Elsevier*, Vol. 36, pp. 287-314, 1994.

[5] E. Moreau, "A Generalization of Joint-Diagonalization Criteria for Source Separation", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 49, No. 3, pp 530-541, March 2001.

[6] L. De Lathauwer, B. De Moor and J. Vandewalle, "Independent Component Analysis and (Simultaneous) Third-Order Tensor Diagonalization", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 49, No. 10, pp. 2262-2271, October 2001

[7] T. Trainini and E. Moreau, "A Coordinate Descent Algorithm for Complex Joint Diagonalization Under Hermitian and Transpose Congruences," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 62, No. 19, pp. 4974-4983, 2014.

[8] G. Chabriel, M. Kleinsteuber, E. Moreau, H. Shen, P. Tichavsky and A. Yeredor, "Joint Matrices Decompositions and Blind Source Separation," *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 31, No. 3, pp 34-43, May 2014.

[9] B. Afsari, "Simple LU and QR Based Non-Orthogonal Matrix Joint Diagonalization," in *Proc. ICA'2006, Springer LNCS series*, pp 1-7, 2006.

[10] A. Souloumiac, "Nonorthogonal Joint Diagonalization by Combining Givens and Hyperbolic Rotations," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 57, No. 6, pp. 2222-2231, June 2009.

[11] L. Wang, L. Albera, A. Kachenoura, H. Shu and L. Senhadji "Nonnegative Joint Diagonalization by Congruence Based on LU Matrix Factorization," *Signal Processing Letters, IEEE*, Vol. 20, No. 8, pp. 807-810, 2013.

[12] V. Maurandi, E. Moreau and C. De Luigi, "Jacobi Like Algorithms for Non-Orthogonal Joint Diagonalization of Hermitian Matrices", in *Proc. ICASSP'2014*, Florence, Italy, May 2014.

[13] V. Maurandi and E. Moreau, "A decoupled Jacobi-like algorithm for non-unitary joint diagonalization of complex-valued matrices", *Signal Processing Letters, IEEE*, Vol. 21, No. 12, pp. 1453-1456, 2014.

[14] A. Karfoul, L. Albera and G. Birot, "Blind underdetermined mixture identification by joint canonical decomposition of HO cumulants", *Signal Processing, IEEE Transactions on*, Vol.58, No. 2, pp. 638-649, February 2010.

[15] P. Comon and M. Rajih, "Blind identification of underdetermined mixtures based on the characteristic function", *Signal Processing, Elsevier*, Vol. 86, No. 9, pp. 2271-2281, October 2006.

[16] E. Moreau and O. Macchi, "A One Stage Self-Adaptive Algorithm for Source Separation", in *Proc. ICASSP*, Vol. 3, pp. 49-52, April 1994.

[17] E. Moreau and O. Macchi, "High Order Contrasts for Self-Adaptive Source Separation", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 10, No. 1, pp. 19-46, January 1996.