

# Calibration du test de rapport de vraisemblance généralisé pour la détection d'une onde plane traversant un réseau de capteurs.

Adrien NOUVELLET<sup>1,2</sup>, François ROUEFF<sup>1</sup>, Maurice CHARBIT<sup>1</sup>, Alexis LE PICHON<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CNRS/Telecom ParisTech

<sup>2</sup>CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon France

adrien.nouvellet@gmail.com, francois.roueff@telecom-paristech.fr

**Résumé** – Le test de Fisher permet la détection d'une onde plane d'amplitude inconnue traversant un réseau de capteurs en présence de bruit additif de variance inconnue. Ce test est dérivé du rapport de vraisemblance généralisé et s'exprime en comparant la statistique de Fisher (*F-stat*) à un seuil. Sous hypothèse gaussienne du bruit additif, et sous l'hypothèse nulle d'absence de signal, la *F-stat* est distribuée suivant une loi de Fisher, ce qui permet un calcul exact de la *p*-valeur ou du seuil pour un niveau de fausse alarme voulu. Néanmoins le test de Fisher nécessite de connaître le vecteur lenteur caractérisant la propagation du signal d'intérêt. Dans le cas où le vecteur lenteur n'est pas connu à l'avance, on peut montrer que le test du rapport de vraisemblance généralisé est une fonction croissante de la statistique du *F-detecteur*, défini comme le maximum des *F-stat* sur l'ensemble des vecteurs lenteur possibles. Cette méthode est très largement répandue en géophysique, notamment pour la détection d'ondes infrasonores et sismiques. Néanmoins la calibration par la loi de Fisher n'est plus valide. Nous introduisons dans cette contribution une méthode de calibration basée sur un calcul asymptotique de la loi du *F-detecteur* sous l'hypothèse nulle.

**Abstract** – The Fisher test is used to detect a plane wave traveling through an array of sensors with an unknown amplitude buried in white noise of unknown variance. The Fisher test is derived from the GLRT and performed by comparing the Fisher statistic (*F-stat*) to a given threshold. Under the hypothesis of Gaussian additive noise, and under the null hypothesis i.e absence of signal, the *F-stat* has a Fisher distribution which yields the exact computation of the *p*-value. However this test requires to know the slowness vector related to the propagation of the signal of interest. In the case where the slowness vector is unknown, the GLRT can be written as an increasing mapping of the *F-detecteur* statistic defined as the maximum of *F-stat* evaluated over a set of possible slowness vectors. This method is widely used in geophysics, particularly for the detection of infrasonic and seismic waves. However, the calibration with the Fisher distribution is no longer valid. In this contribution, we introduce a calibration method based on the asymptotic computation of the *F-detecteur* distribution under the null hypothesis.

## 1 Introduction

Dans ce papier, nous nous sommes intéressés à la détection statistique d'un signal infrasonore ( $\leq 10$  Hz) à partir de mesures obtenues par une antenne multi-capteurs, telle que celles qui sont déployées dans les stations du Système de surveillance international (SSI) [3]. Ce papier propose ainsi l'étude de la statistique de test *F-stat* communément utilisée pour détecter la présence d'un signal d'intérêt infrasonore reçu par un réseau de capteurs [1, 5]. La statistique *F-stat* est dérivée du rapport de vraisemblance généralisée d'une onde plane se propageant à travers une station selon un front d'onde connue, en présence de bruit blanc [4]. Dans le cadre des infrasons, le vecteur lenteur (relié à l'azimut, l'incidence et la vitesse) de l'onde est inconnu, une recherche sur un ensemble de vecteurs lenteur est alors requis. Cette recherche est effectuée en évaluant plusieurs *F-stat* pour différents vecteurs lenteur physiquement possibles.

Le test de détection, *F-detecteur*, est donc obtenu en comparant le maximum des *F-stat* correspondant aux possibles vecteurs lenteur d'une onde à un seuil, ou en calculant la *p*-valeur qui est alors directement comparée à un taux d'erreur de type *I*.

Dans ces deux cas, la connaissance de la distribution du maximum de *F-stat* sous l'hypothèse nulle, en l'absence de signal d'intérêt, est nécessaire. [6] a montré que la statistique *F-stat* est distribuée selon la distribution de Fisher dont les degrés de liberté sont donnés par la longueur de la fenêtre d'analyse et le nombre de capteurs. Or lorsque l'on maximise cette statistique de test sur un ensemble de vecteurs lenteur, la distribution n'est plus celle de Fisher sous  $H_0$ .

Ce papier est organisé de la manière suivante : la Section 2 présente le modèle et les résultats obtenus sur la statistique. La Section 3 est consacrée aux simulations numériques sur des données simulées.

## 2 La distribution sous $H_0$ du *F-detecteur*

### 2.1 Notations

Considérons une station composée de  $M$  capteurs recevant un signal infrasonore se propageant selon le modèle d'onde plane. Dans ce contexte, on définit le vecteur lenteur orthogo-

nal au front d'onde,

$$\mathbf{p} = \frac{\cos i}{c} \begin{pmatrix} \sin a \\ \cos a \end{pmatrix},$$

avec  $a$  l'azimut i.e l'angle par rapport au nord,  $i$  l'incidence i.e l'angle par rapport à la verticale, et  $c$  la vitesse du son dans l'air ( $\sim 340$  m/s). Le signal reçu par le capteur  $m$  a un retard de  $\mathbf{r}_m^T \mathbf{p}$  secondes, où  $\mathbf{r}_m$  est la position du capteur  $m$  dans le plan horizontal. Pour des signaux échantillonnés à la fréquence d'échantillonnage  $f_s$ , on exprime ce retard en nombre d'échantillons  $\tau_m = \lfloor \mathbf{r}_m^T \mathbf{p} f_s \rfloor$  où  $\lfloor \dots \rfloor$  désigne la partie entière. Pour un vecteur de retards  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_M]$ , on considère la séquence  $\{\mathbf{x}_n\}$  de longueur  $N$ , et  $\mathbf{x}_n(\boldsymbol{\tau})$  le vecteur de  $M$  colonnes obtenu en retardant respectivement les  $M$  composantes de  $\mathbf{x}_n$  par  $\tau_m$ . La détection d'un signal associé au vecteur de retards  $\boldsymbol{\tau}$  se formalise par un test binaire d'hypothèses,

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{x}_n(\boldsymbol{\tau}) = b_n \\ H_1 : \mathbf{x}_n(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{1}_M s_n + b_n \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\mathbf{1}_M$  le vecteur de 1 à  $M$  colonnes,  $(s_n)_{1 \leq n \leq N}$  le signal d'intérêt déterministe et inconnu, et  $(b_n)_{1 \leq n \leq N}$  i.i.d gaussien de covariance  $\sigma^2 \mathbf{I}_M$ .

## 2.2 F-stat pour un ensemble fini de retards

Pour tester la présence de signal dont le vecteur lenteur est inconnu, il est nécessaire de calculer la statistique F-stat en retardant le signal selon un ensemble fini de vecteurs lenteur. Ainsi on obtient un ensemble fini de valeur de  $\tau_m$ . On note que pour une longueur de fenêtre d'analyse  $N$  suffisamment grande, l'ensemble des retards ne dépend pas de  $N$ . En particulier la valeur maximale possible du retard  $\lfloor f_s c^{-1} \max_{i,j} \|\mathbf{r}_i\| - \|\mathbf{r}_j\| \rfloor$  est définie par la vitesse du son  $c$  et la géométrie de la station. On note  $\mathcal{Q}$  un ensemble de retard dans  $\mathbb{Z}^M$ . On suppose que  $\mathcal{Q}$  est un ensemble fini de taille  $Q$  qui ne dépend pas de  $N$ . Le F-detector calcule le maximum de  $Q$  F-stat, notée  $f_N(\boldsymbol{\tau})$ , pour une grille possible de vecteurs de retards  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{Q}$ ,

$$f_N^* = \max_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{Q}} f_N(\boldsymbol{\tau}). \quad (2)$$

La statistique (2) est utilisée pour tester la présence d'un signal d'intérêt dont le vecteur lenteur est inconnu. Cette approche est équivalente au rapport de vraisemblance généralisé et présente de bonne performance sous des conditions générales [7].

Dans la suite, nous rappelons comment est définie la statistique F-stat. On pose  $\mathbf{u}_N = [u_N(\boldsymbol{\tau})]_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{Q}}$  et  $\mathbf{v}_n = [v_n(\boldsymbol{\tau})]_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{Q}}$  avec

$$u_N(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n(\boldsymbol{\tau}), \quad v_n(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{M} \left( \sum_{m=1}^M x_{m,n}(\tau_m) \right)^2.$$

où  $x_{m,n}(\tau_m)$  la  $m$ -ième valeur de  $\mathbf{x}_n$  après avoir retardé  $\mathbf{x}_n$  par  $\boldsymbol{\tau}$ . On remarque que  $\mathbf{u}_N = 1/N \sum_{n=1}^N \mathbf{v}_n$ . En l'absence de signal d'intérêt et pour un vecteur retard fixe  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\sigma^{-2} N u_N(\boldsymbol{\tau})$

est distribué selon la distribution  $\chi^2$  à  $N$  degrés de liberté. La F-stat est obtenue en normalisant par,

$$\begin{aligned} w_N(\boldsymbol{\tau}) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [x_{m,n}(\tau_m)]^2 - u_N(\boldsymbol{\tau}), \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( x_{m,n}(\tau_m) - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_{m,n}(\tau_m) \right)^2. \end{aligned}$$

On dénote la concaténation de l'ensemble des  $w_N(\boldsymbol{\tau})$  par le vecteur  $\mathbf{w}_N = [w_N(\boldsymbol{\tau})]_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{Q}}$  de dimension  $Q$ . Pour chaque  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\sigma^{-2} N w_N(\boldsymbol{\tau})$  est indépendant de  $u_N(\boldsymbol{\tau})$  et est distribué selon une distribution  $\chi^2$  à  $N(M-1)$  degrés de liberté sous  $H_0$ . La statistique F-stat utilisée pour détecter la présence d'un signal d'intérêt dont le vecteur de retard est  $\boldsymbol{\tau}$  s'écrit,

$$f_N(\boldsymbol{\tau}) = \frac{(M-1)u_N(\boldsymbol{\tau})}{w_N(\boldsymbol{\tau})}, \quad (3)$$

et comme  $w_N(\boldsymbol{\tau})$  et  $u_N(\boldsymbol{\tau})$  sont indépendants, la statistique F-stat est alors distribuée selon la distribution de Fisher à  $(N, N(M-1))$  degrés de liberté. On remarque ici le principal avantage de la statistique de détection (3) qui a une probabilité de fausse-alarme constante, sa distribution sous  $H_0$  étant indépendante de la variance du bruit.

## 2.3 Loi asymptotique du F-detector sous $H_0$

On définit le vecteur contenant l'ensemble des F-stat par  $\mathbf{f}_N = [f_N(\boldsymbol{\tau})]_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{Q}}$ .

**Théorème 1.** *Sous  $H_0$ , lorsque  $N \rightarrow \infty$ , on a le théorème de la limite centrale suivant,*

$$\sqrt{N} (\mathbf{f}_N - \mathbf{1}_Q) \rightarrow_d \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Gamma})$$

où, pour tout  $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}' \in \mathcal{Q}$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}'} = \frac{4}{(M-1)^2} \sum_{1 \leq m < m' \leq M} \mathbb{1}_{\{\tau_m - \tau_{m'} = \tau'_m - \tau'_{m'}\}}. \quad (4)$$

où  $\mathbb{1}$  est la fonction indicatrice et  $N^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}'}$  dénote la covariance des F-stat  $f_N(\boldsymbol{\tau})$  et  $f_N(\boldsymbol{\tau}')$ . La preuve du théorème 1 est donnée dans l'Appendice A. On note que les valeurs de la diagonale de  $\boldsymbol{\Gamma}$  sont toutes égales à  $2M/(M-1)$ . Ainsi pour chaque  $\boldsymbol{\tau}$ , on a, pour  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\sqrt{N} (f_N(\boldsymbol{\tau}) - 1) \rightarrow_d \mathcal{N}(0, 2M/(M-1))$$

ce qui est cohérent avec le fait que, sous  $H_0$ ,  $f_N(\boldsymbol{\tau})$  est distribué selon la loi de Fisher à  $(N, N(M-1))$  degrés de liberté.

La distribution asymptotique, sous  $H_0$ , de  $f_N^*$  est donc donnée par le maximum de  $Q$  variables gaussiennes dépendantes. La distribution correspondante n'est pas connue analytiquement, mais peut être facilement évaluée par des simulations.

## 3 Expériences numériques

Nous confrontons tout d'abord l'expression de la matrice de covariance  $\boldsymbol{\Gamma}$  d'un ensemble de F-stat  $\mathbf{f}_N$  donnée par (4) à

TAB. 1 – Coordonnées (relatives au centre de la station, en mètres) des 5 capteurs de la station du SSI IS02 en Argentine

sensor	x	y
1	-46.92	10.45
2	-420.69	640.93
3	864.96	315.13
4	-21.14	-735.67
5	-376.22	-230.84

celle obtenue par la méthode de Monte-Carlo sur des données synthétiques.  $Q = 60$  vecteurs de retards sont calculés à partir de la géométrie de la station IS02 reportée dans la Table 1 et en sélectionnant des azimuts réparties linéairement entre 0 et  $2\pi$  radians, une vitesse du son  $c = 340$  m/s et une incidence fixe de  $\pi/2$  rad. Pour chacun des 60 vecteurs de retards, 1000 F-stat sont ensuite évaluées par de biais de l'équation (3) afin d'obtenir empiriquement la matrice de covariance  $\Gamma$ . La figure 1

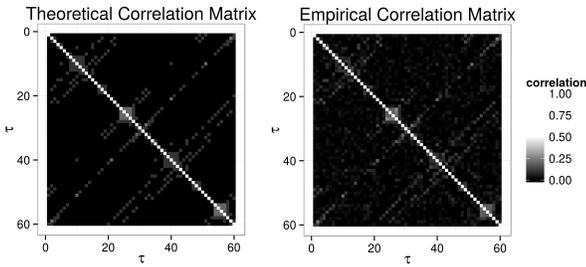


FIG. 1 – Comparaison de la matrice de corrélation théorique et empirique pour  $Q = 60$  retards.

compare la matrice de corrélation théorique et empirique pour 60 F-stat. On observe deux symétries, la première s'expliquant par définition puisque  $\Gamma = \Gamma^T$  en tant que matrice de covariance. La symétrie de translation  $\Gamma_{\tau_q+Q/2, \tau_{q'}+Q/2} = \Gamma_{\tau_q, \tau_{q'}}$  le long de la diagonale s'explique par la grille de vecteurs lentueur choisie. Cette grille n'est que définie par un ensemble d'azimuts  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_Q]$  de 0 à  $2\pi$  avec un pas constant. Dans ce cas, en notant  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M]$ , on a (en négligeant l'effet de la partie entière)

$$\tau_q = c^{-1} f_s \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} \sin a_q \\ \cos a_q \end{pmatrix},$$

$$\tau_{q+Q/2} = -c^{-1} f_s \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} \sin(a_q + \pi) \\ \cos(a_q + \pi) \end{pmatrix} = -\tau_q,$$

Il suffit ensuite de remarquer que  $\Gamma_{\tau, \tau'} = \Gamma_{-\tau, -\tau'}$ . Nous comparons maintenant trois approches pour approcher la densité de probabilité sous  $H_0$ .

1. Une estimation de la densité à partir de simulations exactes du F-detecteur. On simule le signal de taille  $N \times M$  reçu par les capteurs par un bruit blanc spatialement et temporellement décorrélé, et pour chacun des  $Q$  vecteurs lentueur la F-stat correspondante est calculée puis maximisée pour obtenir le F-detecteur. Un estimateur à noyau de la densité de probabilité est ensuite obtenu, à partir de 2000 réalisations indépendantes. Cette méthode fournit une approximation de précision arbitraire (il suffit d'augmenter le nombre de simulations) et sert donc de référence.
2. Une estimation par la méthode de Monte Carlo basée sur l'approximation gaussienne. Les F-stat sont directement simulées sous la loi limite du Théorème 1 puis maximisées. Le même estimateur à noyau est cette fois appliqué à 2000 réalisations indépendantes de cette loi limite du F-detecteur.
3. Pour cette méthode les corrélations entre les F-stat sont négligées. La densité exacte du maximum de  $Q$  variables aléatoires non corrélées distribuées selon la distribution de Fisher à  $N, N(M-1)$  degrés de liberté est alors utilisée.

Les densités obtenues par ces trois méthodes (en rouge, bleu et vert, respectivement) sont montrées sur figure 2. L'influence des deux paramètres  $N$  et  $Q$  sur la qualité des estimations est étudiée. La figure 2 représente l'estimation de la densité de probabilité sous  $H_0$  du F-detecteur pour les trois méthodes et pour deux choix de paramètres  $N$  et  $Q$ . La figure de gauche considère une fenêtre d'analyse de petite taille  $N = 128$  échantillons, et une grille grossière de vecteurs lentueur avec  $Q = 50$  (50 azimuts). Dans ce cas, on observe la limitation de l'approximation d'une distribution de Fisher de faible degrés de liberté par une distribution gaussienne. Comme la grille de vecteurs lentueur est grossière peu de corrélations existent entre les différentes F-stat ce qui explique le bon accord de la méthode 3 avec la méthode de référence. Inversement, pour la figure de droite, lorsque la grille devient plus fine  $Q = 7200$  (360 azimuts, 20 incidence, et une vitesse  $c$  fixe), on remarque que les corrélations ne doivent plus être négligées. En négligeant les corrélations, la méthode 3 sur-estime le F-detecteur ce qui explique que la courbe verte soit décalée vers la droite en comparaison avec la méthode de référence. Enfin on observe aussi que pour une fenêtre d'analyse de taille importante ( $N = 2048$  échantillons) l'approximation gaussienne fournit de bons résultats. Ces résultats sont confirmés par des expériences sur des données réelles (signaux de torchère captés par IS31) qui ne sont pas détaillées ici par manque de place.

## A Appendice

On aura besoin du lemme élémentaire suivant

**Lemma 1.** Soit  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux  $M \times M$  matrices déterministes

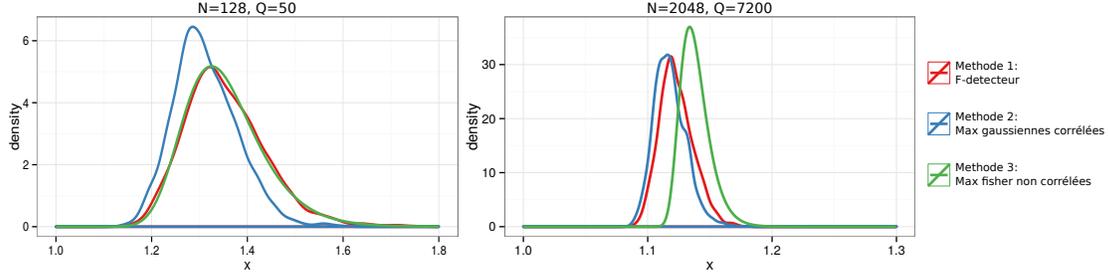


FIG. 2 – Comparaison des méthodes pour l'estimation de la densité de probabilité du *F-detecteur* sous  $H_0$  en fonction de la taille de la fenêtre d'analyse et du nombre de vecteurs lents notés respectivement  $N$  et  $Q$ .

et symétriques. Alors, sous  $H_0$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{Cov} \left( \|\mathbf{A}\mathbf{x}_0(\tau)\|^2, \|\mathbf{B}\mathbf{x}_n(\tau')\|^2 \right) = 2\sigma^4 \sum_{m, m'=1}^M A_{m, m'} L_{m, m'} (\tau_m - \tau'_{m'}) B_{m, m'},$$

où, pour tout  $\mathbf{h} = [h_1 \ \dots \ h_M]^T$  la matrice  $L$  de dimension  $M \times M$  est définie par

$$L_{m, m'}(\mathbf{h}) = \mathbb{1}(h_{m'} = h_m), \quad m, m' \in \{1, \dots, M\}. \quad (5)$$

*Preuve du théorème 1.* On suppose, sous  $H_0$ , que

$$\sqrt{N}(\mathbf{f}_N - \mathbf{1}_Q) = \frac{\sqrt{N}(\mathbf{u}_N - \sigma^2 \mathbf{1}_Q) - \sqrt{N}(\mathbf{w}_N/(M-1) - \sigma^2 \mathbf{1}_Q)}{\mathbf{w}_N/(M-1)}.$$

Comme  $\sigma^{-2}N \mathbf{w}_N(\tau)$  est distribué selon une distribution  $\chi^2$  à  $N(M-1)$  degrés de liberté, on a lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbf{w}_N(\tau)/(M-1) \xrightarrow{P} \sigma^2.$$

D'après le lemme de Slutsky, il reste à montrer que, lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\sqrt{N}(\mathbf{u}_N - \sigma^2 \mathbf{1}_Q) - \sqrt{N}(\mathbf{w}_N/(M-1) - \sigma^2 \mathbf{1}_Q) \rightarrow_d \mathcal{N}(0, \sigma^4 \mathbf{\Gamma}). \quad (6)$$

On rappelle que,

$$\mathbf{u}_N(\tau) = N^{-1} \sum_{n=1}^N \|\Pi \mathbf{x}_n(\tau)\|^2 \text{ et } \mathbf{w}_N(\tau) = N^{-1} \sum_{n=1}^N \|\Pi^\perp \mathbf{x}_n(\tau)\|^2,$$

où  $\Pi, \Pi^\perp$  sont deux  $M \times M$  projecteurs sur le sous-espace engendré par le vecteur  $\mathbf{1}_M$  et son orthogonal, respectivement. Ainsi  $\Pi = M^{-1} \mathbf{1}_M \mathbf{1}_M^T$  et  $\Pi^\perp = I_M - \Pi$ .

De plus le processus stationnaire gaussien  $\{[x_s(\tau)]_{\tau \in \mathbb{Q}}\}_{s \in \mathbb{Z}}$  est un processus  $m$ -dépendant pour  $m$  suffisamment large. Le TCL (6) est alors une conséquence du TCL de processus  $m$ -dépendants [2]. Pour un retard  $\tau$  donné,  $u_N(\tau)$  et  $w_N(\tau)$  sont indépendants, cependant pour  $\tau \neq \tau'$ ,  $u_N(\tau)$  et  $w_N(\tau')$  ne sont pas forcément indépendants. Néanmoins, la convergence jointe de  $\sqrt{N}(\mathbf{u}_N - \sigma^2 \mathbf{1}_Q)$  et  $\sqrt{N}(\mathbf{w}_N/(M-1) - \sigma^2 \mathbf{1}_Q)$  a lieu pour  $N \rightarrow \infty$ , impliquant (6) avec

$$\begin{aligned} \sigma^4 \Gamma_{\tau, \tau'} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{Cov} \left( \|\Pi \mathbf{x}_0(\tau)\|^2, \|\Pi \mathbf{x}_n(\tau')\|^2 \right) \\ &+ (M-1)^{-2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{Cov} \left( \|\Pi^\perp \mathbf{x}_0(\tau)\|^2, \|\Pi^\perp \mathbf{x}_n(\tau')\|^2 \right) \\ &- 2(M-1)^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{Cov} \left( \|\Pi \mathbf{x}_0(\tau)\|^2, \|\Pi^\perp \mathbf{x}_n(\tau')\|^2 \right), \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1, on obtient, avec  $L$  est défini par (5),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Gamma_{\tau, \tau'} &= \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M L_{m, m'} (\tau_m - \tau'_{m'}) \left( \Pi_{m, m'}^2 + \frac{\Pi_{m, m'}^{\perp 2}}{(M-1)^2} \right) \\ &- 2 \frac{\Pi_{m, m'} \Pi_{m, m'}^\perp}{M-1} = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M L_{m, m'} (\tau_m - \tau'_{m'}) \Omega_{m, m'} \end{aligned}$$

Le calcul explicite de  $\Pi_{m, m'}$  et  $\Pi_{m, m'}^\perp$  conduit à,

$$\Omega_{m, m'} = \begin{cases} \frac{1}{(M-1)^2} & \text{if } m \neq m', \\ 0 & \text{if } m = m' \end{cases}$$

De plus, comme  $L$  et  $\Omega$  sont symétriques par construction, on a,

$$\Gamma_{\tau, \tau'} = \frac{4}{(M-1)^2} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{m'=m+1}^M L_{m, m'} (\tau_m - \tau'_{m'}). \quad (7)$$

Ce qui conclue la preuve du théorème 1.  $\square$

## Références

- [1] R. R. Blandford. An automatic event detector at the tonto forest seismic observatory. *Geophysics*, 39(5) :633–643, 1974.
- [2] P. J. Brockwell and R. A. Davis. *Time Series : Theory and Methods*. Springer Series in Statistics. Springer, 2009.
- [3] CTBTO. Ctbt preparatory commission for the comprehensive nuclear-test-ban treaty organization, 2015. [Online ; accessed 26-February-2015].
- [4] B. S. Melton and L. F. Bailey. Multiple signal correlators. *Geophysics*, 22(3) :565–588, 1957.
- [5] J. V. Olson and C. A. L. Szuberla. Processing infrasonic array data. In D. Havelock, S. Kuwano, and M. Vorländer, editors, *Handbook of Signal Processing in Acoustics*, pages 1487–1496. Springer New York, 2008.
- [6] R. H. Shumway. On detecting a signal in n stationarily correlated noise series. *Technometrics*, 13(3) :499–519, 1971.
- [7] O. Zeitouni, J. Ziv, and N. Merhav. When is the generalized likelihood ratio test optimal? *IEEE Trans. Inform. Theory*, 38(5) :1597–1602, 1992.