

Comment “entendre” la forme d’un tambour avec quelques points de mesure ?

Thibault NOWAKOWSKI, Laurent DAUDET, Julien DE ROSNY
Institut Langevin, 1 rue Jussieu, 75005 Paris, France

prenom.nom@espci.fr

Résumé – Issue des problématiques de la géométrie spectrale, la célèbre question “*Can one hear the shape of a drum ?*” [1] posée par Mark Kac au milieu des années 1960 a été l’objet de nombreuses études mathématiques afin de démontrer que deux tambours (membranes) non isométriques peuvent posséder le même spectre. Cependant, la plupart de ces études sont basées uniquement sur la valeur des fréquences propres des membranes. En revisitant le problème d’un point de vue vibratoire, nous développons une méthode fréquentielle pour estimer la position des frontières d’une membrane avec conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann à partir de la mesure du champ de vibration dans une région du centre de la membrane. Plusieurs exemples illustrent la méthode, pour des membranes polygonales et arrondies.

Abstract – Coming from the topics of spectral geometry, the famous question “*Can one hear the shape of a drum ?*” [1] asked by Mark Kac in the 1960’s has led to several mathematical studies to prove that two non-isometrical drums (membranes) can share the same spectrum. Nevertheless, most of these studies are uniquely based on the knowledge of the membranes eigenvalues. By re-exploring the problem under a vibration point of view, we develop a frequency domain method to estimate the form of a membrane with Dirichlet or Neumann boundary conditions, from the measurement of the acoustic field in a small portion of the membrane near its center. Several examples illustrate the method, for polygonal and rounded membranes.

1 Introduction

Depuis les débuts de l’étude des systèmes vibratoires, les acousticiens ont tenté de relier les modes propres de vibration avec les propriétés géométriques des objets étudiés. Ce type de recherches a donné naissance à l’étude modale des structures et à diverses applications comme les essais non destructifs par étude des changements vibratoires d’un système. De façon analogue, plusieurs scientifiques se sont intéressés à la déduction des propriétés géométriques des structures à l’aide uniquement de la connaissance de leur spectre.

Dès le début du XIX^e siècle, les théorèmes de la géométrie spectrale tels que la loi de Weyl [2] ont permis de relier, à l’aide de formules asymptotiques, l’aire et le périmètre d’une membrane avec le nombre de ses valeurs propres comprises sous une certaine fréquence. En 1966, Mark Kac a posé dans son article éponyme la célèbre question “*Can one hear the shape of a drum ?*” [1]. Il se demande alors si deux membranes isospectrales (qui possèdent le même spectre de valeurs propres) sont nécessairement isométriques (de même forme). L’avancée de la géométrie spectrale permettra de répondre par la négative en 1992, lorsque Gordon et Webb exhiberont plusieurs formes différentes de membranes dont les spectres sont identiques [3, 4].

Cependant, plusieurs travaux dans le domaine de l’acoustique et du traitement du signal ont permis de répondre positivement à la question de Kac, à partir de mesures de réponses impulsionnelles, dans le cas particulier de salles polygonales convexes [5, 6, 7]. La plupart de ces méthodes sont basées sur les temps de vol entre une source et plusieurs microphones.

L’une des approches les plus concluantes [8] est basée sur le modèle des sources images afin de décomposer les réponses impulsionnelles mesurées en signal direct et somme d’échos. Chaque écho provenant d’une paroi peut être interprété comme le signal direct émis par une source image dont la position serait symétrique à la source réelle par rapport à la paroi. Le problème est alors de recombinaison les échos mesurés sur les différents microphones afin de les faire correspondre à une même paroi, puis de localiser la position des sources images. La position des murs peut alors être déduite.

Dans cet article, nous nous rapportons au problème posé par Kac et proposons une méthode pour estimer la forme d’une membrane (i.e. un tambour) uniquement à l’aide d’une mesure partielle de ses modes propres. Contrairement à l’approche originelle basée uniquement sur la connaissance des valeurs propres, nous mesurons ici les modes en plusieurs emplacements sur un sous-domaine de la membrane, afin d’obtenir des informations spatiales. En utilisant une décomposition modale simple (décrite section 2), puis des travaux antérieurs sur l’estimation de la géométrie d’une antenne par interpolation modale [9] et la localisation de sources par ajout de contraintes géométriques grâce à la connaissance des conditions aux limites (C.L.) [10], nous montrons qu’il est possible de réinterpréter le problème d’estimation de la forme d’une membrane comme un problème d’estimation de positions de “microphones virtuels” situés sur son contour. Un problème d’optimisation en est déduit et une méthode de résolution proposée. Plusieurs exemples numériques viennent finalement confirmer la validité théorique de notre méthode.

2 Modèle

2.1 Décomposition des modes propres

Soit \mathcal{D} une membrane avec C.L. de Dirichlet ou de Neumann. Les modes propres de vibration de \mathcal{D} sont décrits par les solutions de l'équation d'Helmholtz homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + k^2)p = 0 \text{ dans } \mathcal{D} \\ p = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{D} \text{ (C.L. de Dirichlet)} \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{D} \text{ (C.L. de Neumann)} \end{array} \right. \quad (1)$$

où p est la pression sur la membrane et $\partial p/\partial n$ la vitesse normale. Une antenne de N capteurs est positionnée sur une portion $\Omega \in \mathcal{D}$ et mesure le champ vibratoire émis par une source large-bande quelconque (sinus glissant, bruit blanc, impulsion) située en une position quelconque de la membrane. Les pics fréquentiels dans la transformée de Fourier des signaux acquis correspondent aux modes propres de \mathcal{D} excités par la source.

Récemment, plusieurs études basées sur la théorie de Vequa [11], décrivant l'approximation des modes propres du Laplacien Δ à l'aide de polynôme harmoniques, ont montré qu'il était possible à partir de l'ensemble des N mesures effectuées en des positions \mathbf{x}_n discrètes sur Ω d'interpoler spatialement les modes propres de \mathcal{D} à l'intérieur du domaine Ω défini par l'enveloppe convexe de l'antenne. Cette propriété a notamment permis de proposer une méthode originale pour l'interpolation de réponses impulsionnelles [12] et la localisation de sources à bande étroite par déréverbération du champ acoustique [10] au sein de Ω .

Dans le cas des domaines bi-dimensionnels tels que des membranes, un choix possible de polynômes constituant est la base des $l = 1, \dots, L$ ondes planes échantillonnées régulièrement sur le cercle de rayon k et de vecteur d'onde \mathbf{k}_l , et paramétrées par les coordonnées des positions de mesure. Cette base constitue un dictionnaire \mathbf{W} de taille $(N \times L)$ tel que l'atome de \mathbf{W} correspondant à la mesure n et à l'onde plane l s'écrit :

$$W_{nl} = e^{j\mathbf{k}_l \mathbf{x}_n} \quad (2)$$

Le nombre d'ondes planes L dépend de plusieurs paramètres tels que le nombre d'onde k du mode propre, le rayon R (approximatif) de Ω et le nombre N de mesures. En effet, la décomposition d'un mode propre sur \mathbf{W} au sens des moindres carrés ne peut se faire que si le nombre total L de fonctions est tel que $L \leq N$. De plus, l'échantillonnage spatial théorique optimal pour interpoler les modes nécessiterait une répartition au sens de Shannon-Nyquist le long de $\partial\Omega$ bien qu'en pratique une répartition aléatoire dans Ω soit suffisante pour l'interpolation des modes basses fréquences [11]. De ce fait, le nombre de polynômes à utiliser pour décrire le mode k est :

$$L \simeq 2\lceil kR \rceil + 1 \quad (3)$$

avec $\lceil \cdot \rceil$ la fonction d'arrondi entier "plafond".

Pour un mode de nombre d'onde k , le vecteur des N mesures du champ vibratoire \mathbf{p} peut s'approximer sur les L premiers polynômes harmoniques :

$$\mathbf{p} \approx \mathbf{W}\boldsymbol{\alpha} \quad (4)$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ est le vecteur de coefficients des mesures dans \mathbf{W} .

2.2 Recherche des positions du contour

La décomposition modale a permis une approche nouvelle pour la résolution de plusieurs problèmes acoustiques, comme la calibration des positions des microphones d'une antenne dans le domaine fréquentiel, à l'aide d'une seule source [9]. D'après l'équation (4), sous contrainte de respecter un échantillonnage correct sur Ω et d'avoir un nombre de fonctions L suffisant, le champ acoustique est bien approximé sur le dictionnaire \mathbf{W} . Or ce dictionnaire est paramétré à l'aide des positions des microphones. Si celles-ci sont inconnues ou erronées, il n'y a plus aucune raison que le champ puisse être décomposé car les mesures physiques ne correspondront plus à leur représentation théorique dans le dictionnaire. Ainsi, la tentative de résolution du problème inverse avec un dictionnaire \mathbf{W}_ε construit via (2) à l'aide de mauvaises positions de microphones \mathbf{x}_ε donnera

$$\mathbf{p}_\varepsilon = \mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{W}_\varepsilon^\dagger \mathbf{p} \quad (5)$$

avec cette fois $\mathbf{p}_\varepsilon \neq \mathbf{p}$.

Le problème posé consistait alors à optimiser le dictionnaire \mathbf{W}_ε de sorte que $\mathbf{p}_\varepsilon = \mathbf{p}$, ce qui revient à trouver les bonnes positions \mathbf{x} des microphones. Pour cela, une fonction de coût était réécrite avec une pénalisation jointe sur plusieurs modes propres k

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x}_\varepsilon} \sum_k \|\mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{p}\|^2 \quad (6)$$

$$= \arg \min_{\mathbf{x}_\varepsilon} \sum_k \|(\mathbf{W}_\varepsilon \mathbf{W}_\varepsilon^\dagger - \mathbf{1})\mathbf{p}\|^2 \quad (7)$$

La minimisation de cette fonction permettait alors de déterminer les positions des microphones.

Dans le cas du problème d'estimation de la forme du contour $\partial\mathcal{D}$ de la membrane, si la nature des C.L. est connue, il est possible de réinterpréter le contour comme un ensemble de points de mesures pour lesquels le champ vibratoire mesuré (ou bien sa dérivée normale) est nul. C'est le principe que nous avons mis en œuvre dans [10] afin de localiser des sources par déréverbération du champ acoustique. Ces mesures dites "virtuelles" (puisque non réellement mesurées), et ajoutées sur les parois, permettraient la régularisation du problème de localisation grâce à l'ajout d'information qu'elles apportaient sur la géométrie de la salle. Un modèle de décomposition modale "hybride" avait alors permis de décomposer le champ acoustique dont une partie était mesurée en pression (via les microphones) et l'autre soit en pression (si C.L. de Dirichlet) soit en vitesses normales (si C.L. de Neumann).

En combinant ces deux problèmes acoustiques, la question d'estimer la forme du contour d'une membrane peut se reformuler. En effet, si ses conditions aux limites sont connues, le problème revient à rechercher des positions de capteurs "virtuels" positionnés sur $\partial\mathcal{D}$ et qui mesurent un champ nul pour l'ensemble des modes propres. Si les modes propres sont mesurés sur $\Omega \in \mathcal{D}$ par une antenne de microphones de positions connues et peuvent être correctement décomposés par (4) dans ce sous-domaine, l'ajout des capteurs virtuels de positions inconnues $\mathbf{x}_m \in \partial\mathcal{D}$ rend de nouveau impossible cette décomposition. Le problème d'optimisation des positions (7) est de

nouveau appliqué sur l'ensemble des mesures {microphones + mesures virtuelles}, en n'optimisant cette fois que les positions $\mathbf{x}_{m \in \partial \mathcal{D}}$, les positions $\mathbf{x}_{n \in \Omega}$ des microphones étant déjà connues. La résolution du problème permet donc en théorie de retrouver la forme de la membrane.

Pour des conditions aux limites de Dirichlet, cette résolution est directe car les atomes de \mathbf{W}_ε correspondant aux mesures $\mathbf{x}_{m \in \partial \mathcal{D}}$ ont la même forme paramétrique que (2). Le cas des C.L. de Neumann est plus délicat. En effet, la valeur nulle du champ sur le contour est maintenant la vitesse normale $v = \partial p / \partial n_0$. Le vecteur total de mesures est la concaténation

$$\mathbf{p}_{tot}(k, \mathbf{x}_{tot}) = [\mathbf{p}(k, \mathbf{x}_{n \in \Omega}) \quad \mathbf{v}(k, \mathbf{x}_{\partial \mathcal{D}})]^T \quad (8)$$

où $\mathbf{p}(k, \mathbf{x}_{n \in \Omega})$ est la pression aux positions $\mathbf{x}_{n \in \Omega}$ connus des capteurs et $\mathbf{v}_m(k, \mathbf{x}_{m \in \partial \mathcal{D}})$ la vitesse normale à aux positions $\mathbf{x}_{m \in \partial \mathcal{D}}$ des capteurs virtuels à estimer sur le contour, telle que

$$v_m = \frac{1}{j \rho_0 c_0 k} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{e}_y \right) \cdot \mathbf{e}_m \quad (9)$$

Ici, le vecteur \mathbf{e}_m est la normale entrante à $\partial \mathcal{D}$ à la position $\mathbf{x}_{m \in \partial \mathcal{D}}$ et est un nouveau paramètre à estimer conjointement avec les positions du contour (on l'ajoute dans (7)), ρ_0 et c_0 sont respectivement la densité et la célérité dans le milieu.

Le bloc d'atomes \mathbf{W}_ε du dictionnaire total \mathbf{W}_{tot} correspondant aux mesures de vitesse normale nulle est maintenant paramétré par les dérivées normales de (2) par rapport à l'équation (9) et relativement à la composante i des coordonnées

$$\mathbf{W}_{\varepsilon_{mi}} = \sum_{l=1}^2 \left(\frac{1}{\rho_0 c_0 k} k_{l,i} \cdot e^{j \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}_{m \in \partial \mathcal{D}}} \right) \cdot \mathbf{e}_{m,i} \quad (10)$$

Enfin, le dictionnaire total est homogénéisé en multipliant les atomes homogènes aux vitesses normales par $\rho_0 c_0$ afin de rendre toutes ses valeurs homogènes à des pressions (relation d'impédance acoustique pour les ondes planes [10])

$$\mathbf{W}_{tot}(k, \mathbf{x}_{tot}) = [\mathbf{W}(k, \mathbf{x}_{n \in \Omega}) \quad \rho_0 c_0 \mathbf{W}_\varepsilon(k, \mathbf{x}_{m \in \partial \mathcal{D}})]^T \quad (11)$$

2.3 Méthode de résolution

La résolution du problème est difficile car la fonction de coût possède de nombreux minima locaux. En effet, la répartition spatiale des nœuds et ventres des modes propres dépendant de la longueur d'onde λ , il existe plusieurs positions sur lesquelles une mesure donnera la même valeur du champ. Il convient donc d'optimiser conjointement cette fonction pour tous les points de mesure. L'optimisation se fait ici progressivement [9], en démarrant sur un seul mode (basse fréquence de sorte que λ soit grand devant les dimensions de la membrane) puis en réitérant l'optimisation en la ré-initialisant à l'aide de la solution estimée et en incrémentant le nombre de modes. Ainsi, démarrer l'optimisation par les modes de plus basse fréquence permet d'éviter de nombreux minima locaux car ces modes sont plus étalés spatialement. En contrepartie l'estimation de la forme des contours est plus grossière. Ajouter successivement de nouveaux modes permet d'affiner progressivement l'estimation du contour. Une méthode de minimisation sous contraintes par algorithme *active set* [13] permet la résolution du problème.

3 Applications numériques

Notre méthode est testée numériquement sur trois géométries de membranes avec C.L. de Neumann (figure 1). La membrane (a) est rectangulaire, la membrane (b) a une forme polygonale et la membrane (c) a des contours non plans. Dans les trois cas, la géométrie de \mathcal{D} est convexe.

Pour chaque cas, une source vient exciter les modes de vibration des membranes. Ceux-ci sont mesurés sur une petite zone circulaire Ω près du centre des membranes, 80 positions de mesures étant échantillonnées régulièrement sur le contour $\partial \Omega$ et 20 prises aléatoirement dans Ω . Les signaux sont simulés par un schéma de type différences finies. Les "mesures virtuelles" décrivant les positions du contour de la membrane à optimiser sont initialisées régulièrement sur un cercle centré sur l'antenne et de rayon légèrement plus grand que celui de l'antenne (environ 0,1 m supplémentaire). Leur nombre est choisi élevé pour garder le meilleur échantillonnage possible du contour (au sens de Shannon-Nyquist). Les normales sont initialisées par les normales entrantes au cercle. Pour chaque membrane, les modes propres compris entre 20 Hz et 600 Hz sont relevés sur le spectre. Le paramètre L décrivant le nombre d'ondes planes utilisées pour construire $\mathbf{W}_{tot}(k)$ est calculé en sélectionnant un rayon r_0 supérieur à celui de la membrane \mathcal{D} . Comme les membranes recherchées sont supposées convexes, on propose de bloquer la valeur de l'angle θ_m des coordonnées polaires de chaque mesure virtuelle $\mathbf{x}_{m \in \partial \mathcal{D}}$, les contraignant ainsi à se déplacer sur le rayon r_m .

La figure 1 (haut) représente l'ensemble des dispositifs (membrane + antenne) simulés ainsi que les résultats d'estimation, les formes \mathcal{D} dont les contours sont à retrouver apparaissent en jaune. Quelques contours obtenus à différentes étapes de l'optimisation sont également tracés afin de comparer l'évolution de l'estimation de la forme lorsque de nouveaux modes propres sont incrémentés. La décroissance de la fonction de coût est représentée sur la figure 1 (bas) en fonction du nombre de modes propres incrémentés.

Dans les trois cas, la forme du contour est bien approchée. Quelques positions finales de "mesures virtuelles" ne se situent toutefois pas sur le contour réel des membranes (par exemple pour (b), trois positions sont estimées en dehors). Ces erreurs peuvent être dues au piégeage de ces points dans des minima locaux de la fonction de coût lors de l'ajout de nouveaux modes propres. De plus, du fait des contraintes imposées lors de la minimisation (angles θ_m bloqués), il paraît naturel que les coins des membranes polygonales soient plus difficiles à approcher (ceci est particulièrement visible sur le coin haut-droit de la membrane (b)). Une meilleure approximation pourrait être obtenue en augmentant le nombre de positions initiales de mesures virtuelles, ceci au prix d'une plus grande difficulté algorithmique car le nombre de variables à optimiser serait plus important. Une autre solution serait d'ajouter au cours de l'optimisation de nouvelles positions de mesures virtuelles intercalées entre les positions déjà estimées, de façon à affiner successivement l'estimation des angles.

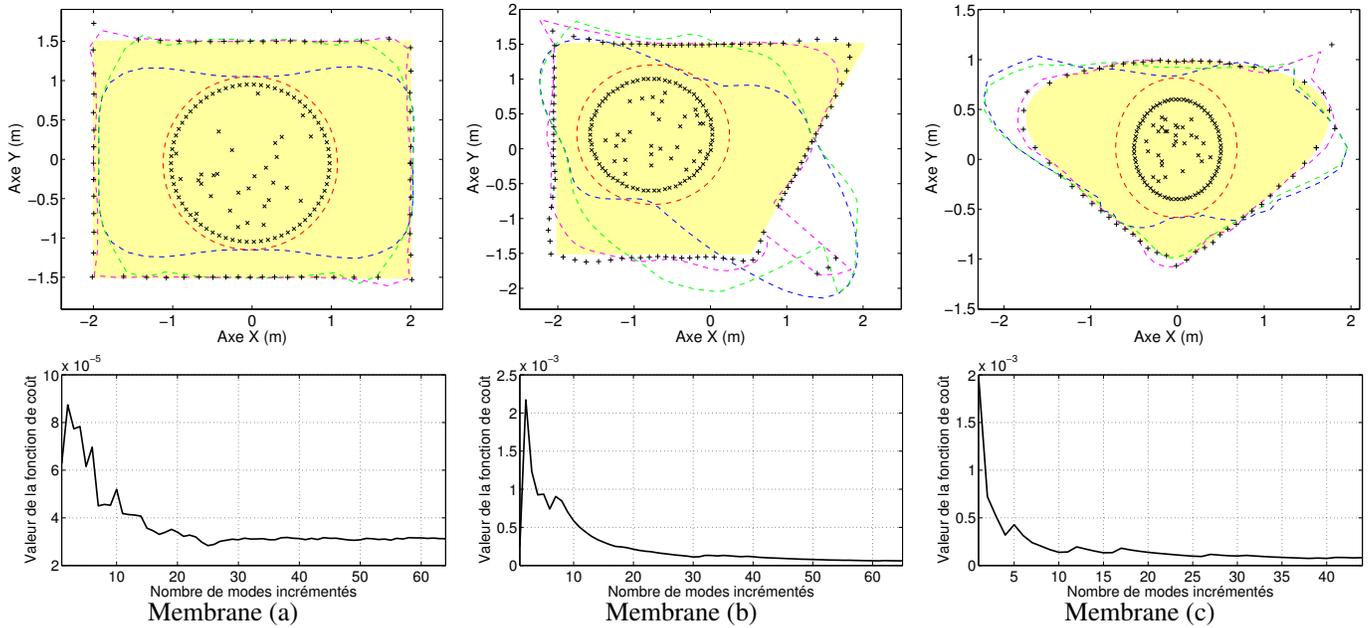


FIGURE 1 – (Haut) Recherche de la forme de trois membranes (en jaune) avec C.L. de Neumann. \times noirs : points de mesure ; $-$ rouge : positions du contour initialisées ; $--$ bleu : positions estimées à l’itération 1 ; $--$ vert : positions estimées à l’itération 4 ; $--$ magenta : positions estimées à l’itération 9 ; $+$ noir : positions finales estimées. (Bas) Décroissance des fonctions de coût associées à chaque membrane, en fonction du nombre de modes propres incrémentés.

4 Conclusion

A l’aide de plusieurs points de mesure sur une portion de membrane et d’une approche basée sur l’interpolation modale, nous avons développé un problème d’optimisation pour estimer la forme géométrique de la membrane. Les points du contour sont ré-interprétés comme des “mesures virtuelles” mesurant un champ nul, ce qui nous ramène à un problème d’estimation de positions de capteurs dans le domaine fréquentiel. Il est à noter que nous avons conjointement permis l’extrapolation des modes au sein de l’ensemble de la membrane, ce qui est par exemple intéressant pour obtenir les réponses impulsionnelles sur toute la membrane.

Plusieurs études complémentaires restent à mener, notamment des réalisations expérimentales sur de vraies membranes. D’autre part, il serait intéressant de tester d’autres algorithmes, d’autres types de contraintes pour la minimisation, et de généraliser cette méthode dans le cas de géométries non convexes. Le passage au cas tri-dimensionnel est théoriquement possible mais actuellement algorithmiquement compliqué à cause du nombre important de mesures virtuelles nécessaires pour conserver un bon échantillonnage au sens de Shannon sur le contour.

Références

- [1] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly*, 73(4) :1–23, 1966.
- [2] W. Arendt and W.P. Schleich. *Mathematical Analysis of Evolution, Information, and Complexity*. Wiley-VCH, 2009.
- [3] C. Gordon and D. Webb. You can’t hear the shape of a drum. *American Scientist*, 84 :46–55, 1996.
- [4] T.A. Driscoll. Eigenmodes of isospectral drums. *SIAM Review*, 39(1) :1–17, 1997.
- [5] F. Antonacci, A. Sarti, and S. Tubaro. Geometric reconstruction of the environment from its response to multiple acoustic emissions. In *ICASSP*, pages 2822–2825, 2010.
- [6] I. Dokmanić, Y.M. Lu, and M. Vetterli. Can one hear the shape of a room : The 2-d polygonal case. In *ICASSP*, 2011.
- [7] F. Ribeiro, D. Florêncio, D. Ba, and C. Zhang. Geometrically constrained room modeling with compact microphone arrays. *IEEE Trans. Audio, Speech, Language Process.*, 20(5) :1449–1460, 2012.
- [8] I. Dokmanić, R. Parhizkar, A. Walther, Y.M. Lu, and M. Vetterli. Acoustic echoes reveal room shape. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 110(30) :12186–12191, 2013.
- [9] T. Nowakowski, L. Daudet, and J. De Rosny. Microphone array position calibration in the frequency domain using a single unknown source. In *ICASSP*, 2015.
- [10] T. Nowakowski, L. Daudet, J. De Rosny, and G. Chardon. Localisation de sources en milieu réverbérant par décomposition parcimonieuse du champ acoustique sur un modèle hybride pression-vitesse. In *Gretsi*, 2013.
- [11] G. Chardon, A. Cohen, and L. Daudet. Sampling and reconstruction of solutions to the helmholtz equation. *Sampl.Theory Signal Image Process.*, 13(1) :67–90, 2014.
- [12] G. Chardon, A. Leblanc, and L. Daudet. Plate impulse response spatial interpolation with sub-nyquist sampling. *J. Sound Vib.*, 330(23) :5678–5689, 2011.
- [13] K.G. Murty. *Linear Complementarity, Linear and Non-linear Programming*. Sigma Series in Applied Mathematics. Heldermann Verlag, 1988.