

# Étude des performances de la détection d’anomalie magnétique généralisée au cas des cibles multipolaires

Pascal PEPE<sup>1,2,3</sup>, Steeve ZOZOR<sup>1</sup>, Laure-Line ROUVE<sup>2</sup>, Jean-Louis COULOMB<sup>2</sup>, Christine SERVIÈRE<sup>1</sup>, Jean MULEY<sup>3</sup>

<sup>1</sup>GIPSA-lab, DIS, CNRS, Université Grenoble Alpes, Grenoble, France

<sup>2</sup>G2Elab, CNRS, Université Grenoble Alpes, Grenoble, France

<sup>3</sup>DCNS, Lorient, France

{pascal.pepe, steeve.zozor, christine.serviere}@gipsa-lab.grenoble-inp.fr,  
{laure-line.rouve, jean-louis.coulomb}@g2elab.grenoble-inp.fr,  
jean.muley@dcnsgroup.com

**Résumé** – La détection d’anomalie magnétique désigne une méthode utilisée dans le cadre de la lutte anti-sous-marine afin de révéler la présence d’une masse magnétique, classiquement modélisée par un dipôle. Afin d’obtenir une description plus précise de l’anomalie, nous proposons une généralisation de cette méthode basée sur une modélisation multipolaire de la cible. Ce modèle est alors utilisé pour réévaluer la stratégie de détection ainsi que les performances des détecteurs utilisés. L’apport de notre généralisation est illustré sur plusieurs scénarios, qui montrent une amélioration des performances de détection par rapport à l’approche dipolaire classique.

**Abstract** – Magnetic anomaly detection is a method used for anti-submarine warfare in order to reveal a hidden magnetic mass, which is classically represented as a dipole. In order to characterize the anomaly more precisely, we propose a generalization of this approach based on a multipolar target model. The detection strategy is then redefined in this multipolar case. The relevance of our generalization is demonstrated on several scenarios that show a clear gain of performance over the dipolar approach.

## 1 Introduction

Dans un contexte de lutte anti-sous-marine, des avions de patrouille ou des hélicoptères équipés d’un magnétomètre sont amenés à survoler des zones maritimes afin de révéler la présence éventuelle de sous-marins cachés. Pour cela, ces systèmes aéroportés ont recours à la détection d’anomalie magnétique (notée MAD, pour *magnetic anomaly detection*). Cette méthode est basée sur le fait qu’un sous-marin, en tant qu’énorme masse d’acier, altère le champ magnétique terrestre dans son environnement proche et provoque ainsi une anomalie qui peut être suffisamment significative pour être détectée.

Une telle détection par mesure magnétique fut déjà tentée dès la Seconde Guerre mondiale. Mais ce n’est qu’au début des années 1980 qu’une approche statistique fut proposée, en particulier grâce à plusieurs contributions notables ayant établi une modélisation mathématique de l’anomalie en considérant la cible à détecter comme un dipôle magnétique [1–3]. Cette approche suscite beaucoup d’intérêt encore aujourd’hui [4–6].

L’hypothèse dipolaire se justifie lorsque la distance cible-captteur est grande devant la taille de la cible, et conduit ainsi à une description commode, mais qui peut être partielle, de l’anomalie. Notre objectif est d’outrepasser les limites imposées par cette approximation afin de généraliser le domaine d’application de MAD. Dans ce but, nous avons développé un modèle

multipolaire donnant une description plus précise de l’anomalie de la cible (section 2). La stratégie de détection (section 3) et ses performances (section 4) sont réévaluées en conséquence à partir de ce modèle. Enfin, différents scénarios illustrent le gain obtenu grâce à cette généralisation (section 5).

## 2 Anomalie magnétique multipolaire

### 2.1 Du dipôle au multipôle

Préférentiellement au modèle dipolaire, nous proposons ici une approche générale reposant sur le développement en harmoniques sphériques de l’anomalie, communément utilisé dans plusieurs domaines dès lors qu’il est question de modéliser précisément une source inconnue [7–10]. Ce développement est obtenu en résolvant, en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ , l’équation de Laplace vérifiée par le potentiel scalaire magnétique. Ceci conduit à l’expression suivante de l’anomalie  $\mathbf{H}$  (vecteur de taille  $3 \times 1$ ) en tout point de l’espace (l’origine du système est au centre de la cible) [7, 11] :

$$\mathbf{H}(r, \theta, \phi) = -\mathbf{grad} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (a_{n,m} \cos m\phi + b_{n,m} \sin m\phi) \mathcal{P}_n^m(\cos \theta) \right). \quad (1)$$

Les entiers  $n$  et  $m$  désignent respectivement un ordre du développement et son degré associé. Les coefficients harmoniques  $a_{n,m}$  et  $b_{n,m}$  sont caractéristiques des propriétés magnétiques inhérentes à la cible. Les termes  $\mathcal{P}_n^m$  désignent les polynômes de Legendre associés. L'expression (1) prend en compte non seulement le moment dipolaire (terme du premier ordre), mais également les moments d'ordres supérieurs (quadrupôle, octupôle, etc.). En pratique, la somme infinie dans (1) est tronquée à un ordre arbitraire  $L$ , car l'influence des ordres les plus élevés décroît comme  $1/r^{n+2}$  et devient négligeable loin des sources.

Dans un scénario MAD habituel, on suppose que le capteur suit une trajectoire rectiligne à vitesse  $V$  et à altitude constantes, tandis que la cible est immobile (le scénario opposé est tout à fait analogue). Le capteur atteint une position particulière à l'instant noté  $t_0$  lorsqu'il est au plus près de la cible. On note  $D$  la distance source-capteur correspondante. À tout instant  $t$ , la position du capteur peut être spécifiée par la variable sans dimension  $u = \frac{(t-t_0)V}{D}$ . Plusieurs considérations mathématiques impliquant les  $\mathcal{P}_n^m$  et l'opérateur gradient (voir [12, 13]), nous conduisent à réécrire (1) en tout point de la trajectoire :

$$\mathbf{H}(u) = \sum_{n=1}^L \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{c}_{n,i} \frac{u^i}{(1+u^2)^{n+\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

Les coefficients vectoriels  $\mathbf{c}_{n,i}$  dépendent des coefficients  $a_{n,m}$  et  $b_{n,m}$  et sont indépendants du temps. Les fonctions  $f_{n,i}(u) = u^i / (1+u^2)^{n+\frac{3}{2}}$  étant uniquement paramétrées par  $u$ , les considérations dues à la trajectoire du capteur sont ainsi séparées des propriétés magnétiques de la cible. L'hypothèse dipolaire est une approximation au premier ordre qui consiste à choisir  $L = 1$ , ce qui conduit au modèle étudié dans [2, 5]. De ce point de vue, notre résultat (2) inclut et généralise l'approche classique.

## 2.2 Fonctions de base orthonormale

Dans (2), les  $L(L+5)/2$  fonctions  $f_{n,i}$  sont linéairement dépendantes si  $L > 1$ . On peut toutefois réduire cela à une famille de  $2L+1$  fonctions linéairement indépendantes constituée de  $f_{0,0}$  à laquelle deux autres fonctions  $f_{n,0}$  et  $f_{n,1}$  sont ajoutées pour chaque ordre de décomposition  $n = (1, \dots, L)$  considéré. Par orthonormalisation de cette famille, on construit un jeu de fonctions de base orthonormale (FBO)  $(e_i)_{i \in [0, 2L]}$ . En notant  $\mathbf{a}_i$  les coefficients caractéristiques du multipôle dans cette nouvelle base, (2) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{H}(u) = \sum_{i=0}^{2L} \mathbf{a}_i e_i(u). \quad (3)$$

## 3 Détection de multipôles

### 3.1 Problème de détection

Le problème MAD consiste à décider à partir de  $N$  échantillons si une anomalie magnétique est présente ou si les observations ne contiennent que du bruit. On note  $\mathbf{s}$  la matrice de taille

$3 \times N$  construite en concaténant  $N$  échantillons de l'anomalie :

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}_L \mathbf{E}_L, \quad (4)$$

où  $\mathbf{A}_L$  est la matrice de coefficients de taille  $3 \times (2L+1)$  telle que  $\mathbf{A}_L = [\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{2L}]$ , et  $\mathbf{E}_L$  est de taille  $(2L+1) \times N$  et contient  $N$  échantillons de chaque FBO. Détecter le signal  $\mathbf{s}$  dans un bruit  $\mathbf{w}$  à partir d'observations  $\mathbf{x}$  se résume comme un test d'hypothèse binaire bien connu [14] :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 \text{ (cible absente)} : \mathbf{x} = \mathbf{w} \\ \mathcal{H}_1 \text{ (cible présente)} : \mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{w} \end{cases} \quad (5)$$

On note  $P_D = \Pr(\mathcal{H}_1 | \mathcal{H}_1)$  et  $P_{FA} = \Pr(\mathcal{H}_1 | \mathcal{H}_0)$  respectivement les probabilités de détection et de fausse alarme. Par la suite, le signal de la cible est toujours considéré déterministe, et le bruit est aléatoire, gaussien, isotrope et blanc (hypothèse discutée en section 6). La matrice  $\mathbf{w}$  suit ainsi une loi normale de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\sigma^2 \mathbf{I}_{3N}$ , où  $\sigma^2$  est la variance spatio-temporelle de chaque échantillon du bruit. On notera cela alternativement sous la forme  $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}_{3,N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{3N})$ . La fonction de densité de probabilité de  $\mathbf{w}$  est donc [15] :

$$p(\mathbf{w}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{3N}{2}} \exp\left(-\frac{\text{trace}(\mathbf{w}^t \mathbf{w})}{2\sigma^2}\right). \quad (6)$$

Suivant l'approche de Neyman-Pearson, notre objectif est de maximiser  $P_D$  sous contrainte de  $P_{FA}$  fixée.

### 3.2 Stratégie de détection

En pratique, il est très rare d'avoir la moindre information sur les propriétés magnétiques de la cible dans un contexte MAD. Par conséquent, nous supposons dans un premier temps que nous connaissons  $\mathbf{E}_L$  mais non  $\mathbf{A}_L$ . L'approche consiste ici en un test de rapport de vraisemblance généralisé [14] :

$$\frac{p(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{A}}_L, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \gamma, \quad (7)$$

où  $\hat{\mathbf{A}}_L$  est l'estimateur de maximum de vraisemblance de  $\mathbf{A}_L$ ,  $p(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{A}}_L, \mathcal{H}_1)$  et  $p(\mathbf{x}; \mathcal{H}_0)$  désignent les densités de probabilité de  $\mathbf{x}$  sous chaque hypothèse, et  $\gamma$  est le seuil de décision. Dans le cas du bruit blanc gaussien, calculer  $\hat{\mathbf{A}}_L$  revient à projeter  $\mathbf{x}$  sur la base  $\mathbf{E}_L$  [5, 16] :

$$\hat{\mathbf{A}}_L = \mathbf{x} \mathbf{E}_L^t. \quad (8)$$

En injectant (8) et (6) dans (7), on obtient :

$$\Lambda_{\text{FBO-}L}(\mathbf{x}) = \text{trace}(\hat{\mathbf{A}}_L^t \hat{\mathbf{A}}_L) = \|\hat{\mathbf{A}}_L\|^2, \quad (9)$$

qui sera désigné par la suite comme le récepteur basé sur les FBO d'ordre  $L$ . Notons que (9) correspond également à l'énergie de la projection. L'approche dipolaire classique conduisait déjà à  $\Lambda_{\text{FBO-}1}$ , et nous avons maintenant également accès à tout une gamme de récepteurs  $\Lambda_{\text{FBO-}L}$  pouvant être appliqués sur des cibles plus complexes qu'un dipôle.

## 4 Performances des détecteurs

L'objectif est d'exprimer analytiquement les performances des détecteurs basés sur les FBO. Toutefois, en pratique  $\mathbf{E}_L$  n'est pas directement connue car elle dépend de  $t_0$ ,  $D$  et  $L$ . Le paramètre  $t_0$  n'est pas un problème dans une situation en temps réel car des fenêtres du signal observé sont projetées sur des FBO centrées (voir section 5). Le cas de  $D$  a été traité dans [2] en considérant un banc de récepteurs pour plusieurs valeurs de  $D$  possibles, et plus tard dans [5] en utilisant un algorithme génétique. Dans le cadre de cette étude, on se focalise donc sur l'influence de  $L$ , paramètre introduit par notre généralisation.

### 4.1 Ordre multipolaire quelconque

On considère le cas d'une cible représentée par un multipôle d'ordre  $l$  que l'on cherche à révéler avec un détecteur d'ordre  $L$  ( $L$  pouvant être égal ou non à  $l$ ). Projeter les observations sur la base  $\mathbf{E}_L$  nous donne, sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_k$  ( $k = 0$  ou  $1$ ) :

$$\hat{\mathbf{A}}_L = k\mathbf{s}\mathbf{E}_L^t + \mathbf{w}\mathbf{E}_L^t, \quad (10)$$

et donc  $\hat{\mathbf{A}}_L \sim \mathcal{N}_{3,2L+1}(k\mathbf{s}\mathbf{E}_L^t, \sigma^2\mathbf{I}_{3(2L+1)})$  (voir [15]). Ce qui implique que :

$$\frac{\|\hat{\mathbf{A}}_L\|^2}{\sigma^2} \sim \begin{cases} \chi_{3(2L+1)}^2 & \text{sous } \mathcal{H}_0 \\ \chi_{3(2L+1)}^2 \left( \frac{\|\mathbf{A}_l\mathbf{E}_l\mathbf{E}_l^t\|^2}{\sigma^2} \right) & \text{sous } \mathcal{H}_1 \end{cases}$$

où  $\chi_\nu^2$  et  $\chi_\nu^2(\lambda)$  désignent la loi du  $\chi^2$  avec  $\nu$  degrés de liberté et un paramètre de décentrage  $\lambda$ . On note respectivement  $F_{\chi_\nu^2}$  and  $F_{\chi_\nu^2(\lambda)}$  les fonctions de répartition de  $\chi_\nu^2$  et  $\chi_\nu^2(\lambda)$ . Ainsi, les performances du détecteur d'ordre  $L$  s'écrivent :

$$P_D = 1 - F_{\chi_{3(2L+1)}^2(\|\mathbf{s}\mathbf{E}_L^t\|^2/\sigma^2)} \left( F_{\chi_{3(2L+1)}^2}^{-1}(1 - P_{FA}) \right). \quad (11)$$

On notera que si  $L = l$ , le paramètre de décentrage correspond au rapport de l'énergie du signal de la cible sur la puissance du bruit. Si  $L < l$ , l'énergie du signal de la cible n'est pas entièrement projetée. Ce qui est corrigé si  $L > l$ , mais avec trop de degrés de liberté cette fois. Ces deux dernières situations conduisent à une perte de performances (voir section 5).

### 4.2 Estimation de l'ordre du multipôle

Pour éviter une perte de performances, il est nécessaire de sélectionner correctement l'ordre  $L$ , et donc le modèle de cible adéquat. On utilise pour cela le critère d'information d'Akaike (AIC) [17], qui s'avère particulièrement adapté à notre problème car il repose sur la valeur maximale de la fonction de vraisemblance du modèle, or  $\hat{\mathbf{A}}_L$  a été spécifiquement choisi pour maximiser cette fonction. Dans notre cas, le critère s'écrit ainsi :

$$AIC_L = 12L + 6N \log(2\pi\sigma^2) + \frac{\|\mathbf{x}\|^2 - \|\hat{\mathbf{A}}_L\|^2}{\sigma^2}. \quad (12)$$

La valeur de  $L$  qui minimise  $AIC_L$  correspond au modèle qui minimise la perte d'information, et donc à l'ordre du multipôle qui doit décrire la cible au mieux. L'application de ce critère est illustrée en section 5.

## 5 Résultats de simulation

Nous présentons ici plusieurs scénarios de détection avec cibles multipolaires. Dans un contexte MAD, l'essentiel de l'énergie du signal se retrouve dans une fenêtre de durée  $10D/V$  autour de  $t_0$ . Le rapport signal sur bruit (RSB) est défini en ajustant le niveau de bruit dans cette fenêtre. On observe dans chaque cas un signal de 10000 échantillons, centré autour de  $t_0$  et sur une durée de  $50D/V$ . On fixe  $P_{FA} = 10^{-2}$ .

### 5.1 Influence de l'ordre multipolaire

On considère dans un premier temps une cible multipolaire d'ordre 3 telle que 70% de l'énergie de son signal est due aux contributions d'ordre 1, 20% à l'ordre 2, et 10% à l'ordre 3. Sur la figure 1, on représente la première composante de ce signal et son observation bruitée pour un RSB de  $-15$  dB. On représente également la sortie du récepteur  $\Lambda_{\text{FBO-3}}$  obtenue en projetant une fenêtre glissante de l'observation sur des FBO centrées de durée  $10D/V$  (2000 échantillons).

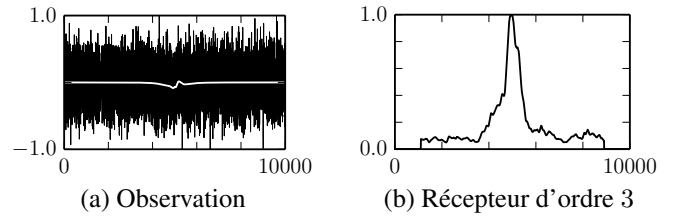


FIGURE 1 – Première composante du signal (blanc) et son observation bruitée avec  $RSB = -15$  dB (noir) (a), et sortie du récepteur d'ordre 3 (b).

La figure 2 montre les performances des détecteurs appliqués à cette cible, calculées de manière théorique à partir du résultat (11), et vérifiées par simulations Monte-Carlo (MC). À partir de ces résultats, on peut formuler les remarques suivantes :

- Comme attendu, c'est le détecteur d'ordre 3 qui donne les meilleures performances pour une telle cible.
- Les détecteurs d'ordres 1 et 5 affichent des performances plus faibles. Pour le premier, cela s'explique par le fait que 30% de l'énergie du signal n'est pas prise en compte. Pour le second, on projette bien 100% de l'énergie, mais avec trop de degrés de liberté par rapport à l'ordre 3.
- On montre également les performances obtenues en choisissant l'ordre du détecteur à l'aide du critère d'information d'Akaike (12). Chaîner de cette manière AIC et la détection basée sur les FBO donne les mêmes résultats qu'avec le détecteur d'ordre 3.

### 5.2 Influence de la répartition d'énergie

Jusque-là, la répartition de l'énergie du signal sur les différents ordres était fixée. On considère maintenant successivement plusieurs cibles d'ordre 2, pour lesquelles l'énergie relative des contributions du second ordre varie de 0 à 100%. Le

RSB est fixé à  $-20$  dB et on observe sur la figure 3 les performances des détecteurs en fonction de la répartition d'énergie. Ce résultat montre qu'il suffit de très peu d'énergie dans l'ordre 2 pour que  $\Lambda_{\text{FBO-2}}$  devienne plus indiqué que  $\Lambda_{\text{FBO-1}}$ .

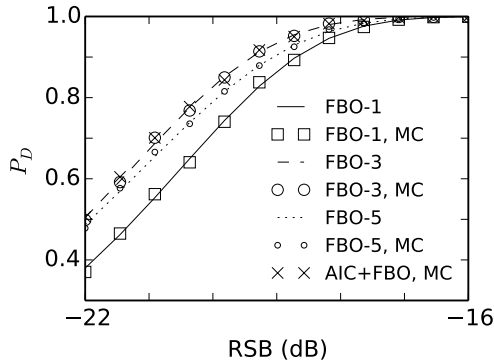


FIGURE 2 – Performances des détecteurs ( $P_{FA} = 10^{-2}$ ).

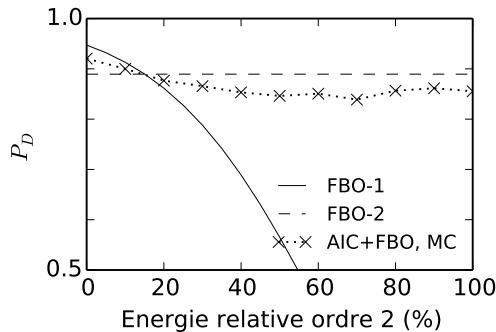


FIGURE 3 – Influence de la répartition d'énergie pour une cible d'ordre 2 ( $RSB = -20$  dB,  $P_{FA} = 10^{-2}$ ).

## 6 Conclusion et discussions

Dans ce papier, la méthode MAD a été généralisée de façon originale pour la détection de cibles multipolaires. Tandis que l'approche classique se restreint aux dipôles, l'approche multipolaire est applicable à une plus large gamme de cibles, et elle pourrait par conséquent être utilisée dans des scénarios et applications autres que le contexte habituel de MAD.

Dans l'approche générale comme dans l'approche dipolaire, la stratégie de détection repose sur une hypothèse de gaussianité du bruit, et s'avère en pratique robuste au cas non-gaussien grâce au théorème central limite. La non-gaussianité du bruit peut toutefois avoir un impact si les paramètres des FBO sont supposés inconnus. Dans ce cas, une approche similaire peut être envisagée directement sur le test de rapport de vraisemblance en le simplifiant par linéarisation locale (voir [5] pour une application à MAD). L'approche nécessite également d'être mise à l'épreuve en pratique, des données réelles permettant par ailleurs de vérifier l'hypothèse de gaussianité du bruit ou, le cas échéant, de mieux le modéliser.

## Références

- [1] E. P. Loane, "Speed and depth effects in magnetic anomaly detection," Memorandum report, ADA081329, unclassified document, Oct. 1976.
- [2] R. Blanpain, *Traitement en temps réel du signal issu d'une sonde magnétométrique pour la détection d'anomalies magnétiques*, Ph.D. thesis, INP Grenoble, France, 1979.
- [3] J. P. R. Letouzey, "Limite théorique des performances MAD," in *Actes de Colloque du Grets, Nice, France*, June 1981, pp. 221–228.
- [4] A. Sheinker, L. Frumkis, B. Ginzburg, N. Salomonski, and B.-Z. Kaplan, "Magnetic anomaly detection using a three-axis magnetometer," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 1, pp. 160–167, Jan. 2009.
- [5] S. Zozor, L.-L. Rouve, G. Cauffet, J.-L. Coulomb, and H. Henocq, "Compared performances of MF-based and locally optimal-based magnetic anomaly detection," in *Proc. EUSIPCO 2010*, Aalborg, Denmark, 2010, pp. 149–153.
- [6] H. Zhang and M.-Y. Xia, "Magnetic anomaly detection for simultaneous moving target and magnetometer," in *Proc. APCAP 2014*, Harbin, China, 2014, pp. 884–888.
- [7] L.-L. Rouve, L.-A. Schmerber, O. Chadebec, and A. Foggia, "Optimal magnetic sensor location for spherical harmonic identification applied to radiated electrical devices," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 42, no. 4, pp. 1167–1170, Apr. 2006.
- [8] T. S. Nguyen, J.-M. Guichon, O. Chadebec, P. Labie, and J.-L. Coulomb, "Ships magnetic anomaly computation with integral equation and fast multipole method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 5, pp. 1414–1417, May 2011.
- [9] S. Parimal, S. M. Cramer, and S. Garde, "Application of a spherical harmonics expansion approach for calculating ligand density distributions around proteins," *J. Phys. Chem. B*, vol. 118, no. 46, pp. 13066–13076, Sept. 2014.
- [10] A. C. Simmonett, F. C. Pickard, H. F. Schaefer, and B. R. Brooks, "An efficient algorithm for multipole energies and derivatives based on spherical harmonics and extensions to particle mesh Ewald," *J. Chem. Phys.*, vol. 140, no. 18, pp. 184101, May 2014.
- [11] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 3rd edition, 2007.
- [12] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 7th edition, 2007.
- [13] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, New York, NY, 2010.
- [14] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Detection theory*, Prentice-Hall PTR, 1998.
- [15] A. K. Gupta and D. K. Nagar, *Matrix Variate Distributions*, CHAPMAN & HALL/CRC, 2000.
- [16] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation theory*, Prentice-Hall PTR, 1993.
- [17] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 19, no. 6, pp. 716–723, Dec. 1974.