

# Une nouvelle approche de résolution limite dans le cadre d'estimation paramétrique multidimensionnelle

C. REN<sup>1</sup>, M. N. EL KORSO<sup>2</sup>, J. GALY<sup>3</sup>, E. CHAUMETTE<sup>4</sup>, P. LARZABAL<sup>5</sup> et A. RENAUX<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Université Paris-Sud/LSS, 3 Rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France.

<sup>2</sup>Université Paris-Ouest 10/LEME EA 4416, IUT de Ville d'Avray, France.

<sup>3</sup>Université de Montpellier 2/LIRMM, 161 rue Ada 34392 Montpellier Cedex 5, France.

<sup>4</sup>Toulouse-ISAE/DEOS, 10 Avenue Edouard Belin, Toulouse, France.

<sup>5</sup>ENS Cachan/SATIE, 61 av. du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France.

cren@lss.supelec.fr

**Résumé** – Par cette communication, nous proposons une nouvelle approche de résolution limite basée sur la définition de probabilité de résolution dans le contexte d'estimation de paramètres multidimensionnels. Ce critère est fondé sur une approche probabiliste de la séparabilité et permet également de mesurer la précision des valeurs estimées. Une étude analytique de ce critère a été proposée dans le cas où le modèle d'observation est gaussien. Enfin, une comparaison avec des critères de résolution existants a été étudiée dans le cas du problème de localisation de sources.

**Abstract** – In this paper, we propose a new statistical resolution limit criterion based on the definition of probability of resolution in the context of multi-dimensional parameters estimation. This criterion is based on a probabilistic approach of the separability and also allows to measure the accuracy of estimate's values. Exact and approximation calculus of this criterion is given in the gaussian observation model. Finally, a comparison with existing resolution limits is studied in the case of direction of arrival estimation problem.

## 1 Introduction

La résolution limite caractérise la distance minimale entre les paramètres d'intérêt au-dessus de laquelle la séparation de ces paramètres devient possible [1–4]. En estimation statistique, les observations sont modélisées par des variables aléatoires dont leurs caractéristiques dépendent des paramètres d'intérêt. Ainsi, il est nécessaire d'introduire la notion de "résolution limite statistique" qui définit une probabilité de séparation des paramètres en tenant compte du caractère aléatoire des observations.

Historiquement, (i) la première approche de résolution limite statistique a été proposée par Cox en 1973 [5]. Cette approche est basée sur les critères de minimisation nommés *null spectrum*, noté  $C(\mathbf{y}, \theta)$ . Si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les paramètres à estimer à partir des observations  $\mathbf{y}$ , ce critère affirme que  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont résolubles si  $\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\theta_1, \theta_2} [C(\mathbf{y}, \theta_1)] < \mathbb{E}_{\mathbf{y}|\theta_1, \theta_2} [C(\mathbf{y}, \frac{\theta_1 + \theta_2}{2})]$  et  $\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\theta_1, \theta_2} [C(\mathbf{y}, \theta_2)] < \mathbb{E}_{\mathbf{y}|\theta_1, \theta_2} [C(\mathbf{y}, \frac{\theta_1 + \theta_2}{2})]$ . Ces deux derniers critères, sous certaines conditions, sont équivalents à une étude de la convexité de la fonction  $\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\theta_1, \theta_2} [C(\mathbf{y}, \theta)]$  au point médian de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  [6]. Cependant, les critères susmentionnés dépendent de l'algorithme utilisé. (ii) Une deuxième approche basée sur la Borne de Cramér-Rao (BCR) a été proposée dans [7, 8]. Cette dernière a l'avantage d'être indépendante de l'algorithme choisi. Ce critère stipule que  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont résolus si  $|\theta_1 - \theta_2| \geq 2 \max(\sqrt{BCR(\theta_1)}, \sqrt{BCR(\theta_2)})$ . Cependant, il ne prend

pas en compte le couplage entre les deux paramètres. Ainsi, une amélioration a été proposée par Smith [2], sous la forme suivante  $|\theta_1 - \theta_2|^2 \geq BCR(|\theta_1 - \theta_2|)$ . (iii) Bien que l'approche précédente soit simple à mettre en oeuvre, ce sont des seuils empiriques qui ne permettent pas de quantifier la résolution. C'est pourquoi, une troisième approche a été proposée par [1, 9, 10] basée sur la théorie de détection. Cette approche reformule le problème de résolubilité par un test d'hypothèse binaire où l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  suppose que les données sont générées à partir d'un modèle comportant un paramètre d'intérêt et l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  suppose que les données suivent un modèle avec deux paramètres d'intérêt. Cette approche détermine le seuil de résolution en fonction de la probabilité de fausse alarme  $P_{fa}$  et de la probabilité de détection  $P_d$  en utilisant le test du maximum de vraisemblance généralisé. (iv) Enfin, la dernière approche est basée sur la probabilité de résolution qui permet à la fois de résoudre les paramètres d'intérêts et d'imposer la précision de l'estimation. Ceci consiste à déterminer la probabilité  $P_{res}$  tel que les estimés appartiennent à des ensembles disjoints. Par conséquent, les paramètres sont résolus avec une probabilité  $P_{res}$  et des intervalles de confiance sont établis pour les valeurs estimées. Ce concept a été initialement introduit par Oh et Kashyap [11] dans le cadre de paramètre scalaire puis étendu par Clark [12] dans le cas d'estimation de paramètres multidimensionnels, deux à deux décorrelés, et issus d'un processus gaussien.

Le but de cette communication est d'étendre la dernière approche pour des problèmes d'estimation de paramètres multidimensionnels, non nécessairement gaussiens, ni décorrelés, et

\*Ces travaux sont financés par iCODE institute (research project of the IDEX Paris-Saclay), par le projet MAGELLAN (ANR-14-CE23-0004-01), par le projet Display-Mastodons et par la DGA-MRIS.

de déterminer la probabilité de résolution en utilisant des approximations d'ensembles disjoints.

## 2 Rappels et définitions

Soit  $\theta_1 \in \mathbb{R}$  et  $\theta_2 \in \mathbb{R}$  deux paramètres à estimer à partir des observations  $\mathbf{y} \in \Omega$ . Soit  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2]^T$  un estimateur des paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Dans [11], le critère de résolution énonce que l'estimateur  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  peut résoudre les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  avec une probabilité de résolution  $P_{res}$  si

$$P_{res} = \min \left( \Pr \left( \hat{\theta}_1 - \theta_1 \in ]-\Delta; \Delta[ \right), \Pr \left( \hat{\theta}_2 - \theta_2 \in ]-\Delta; \Delta[ \right) \right) \quad (1)$$

où  $\Delta = \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{2}$ . Puisque  $\Delta$  a été choisi tel que l'intersection entre les intervalles  $]\theta_1 - \Delta; \theta_1 + \Delta[$  et  $]\theta_2 - \Delta; \theta_2 + \Delta[$  soit nulle, les estimées  $\hat{\theta}_1$  et  $\hat{\theta}_2$  sont bien distinctes et sont restreintes dans leur intervalle respectif avec une probabilité d'au moins  $P_{res}$ . Cependant l'extension aux cas de paramètres vectoriels n'est pas unique et dépend de la forme des domaines délimitant les estimées de chaque paramètres. En effet, il existe déjà une approche proposée par Clark [12] pour des estimateurs distribués suivant une loi gaussienne où les domaines délimitant les estimées sont des hyper-ellipses. Dans la suite,

$\{\boldsymbol{\theta}_m^0\}_{m=1, \dots, p}$  désignera un ensemble de paramètres d'intérêts

à estimer à partir des observations  $\mathbf{y}$  par l'estimateur  $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_m\}_{m=1, \dots, p}$

Contrairement à [12], le but de cette communication est d'une part de proposer une nouvelle définition de probabilité de résolution dans le cas d'estimation de paramètres multidimensionnels, non nécessairement gaussiens, ni décorélés, basée sur des domaines hyper-rectangles et d'autre part d'établir une relation d'ordre au sens de mesure de probabilité entre les domaines hyper-rectangles et les domaines hyper-ellipses permettant d'obtenir une méthode d'évaluation plus simple de  $P_{res}$ .

## 3 Nouvelle approche pour la résolution multidimensionnelle

### 3.1 Approximation d'ensembles disjoints

Soit  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^+\}_{m=1, \dots, p}$  et  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^-\}_{m=1, \dots, p}$  un ensemble de vecteurs réels tel que  $\boldsymbol{\varepsilon}_m^+ \in \mathbb{R}^{q+}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_m^- \in \mathbb{R}^{q+}$ ,  $1 \leq m \leq p$ . On définit un hyper-rectangle, noté  $R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$ ,  $1 \leq m \leq p$ , par  $R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \{\boldsymbol{\theta}_m \in \mathbb{R}^q | \forall 1 \leq j \leq q, (\boldsymbol{\theta}_m)_j - (\boldsymbol{\theta}_m^0)_j \in ]-(\boldsymbol{\varepsilon}_m^-)_j; (\boldsymbol{\varepsilon}_m^+)_j[ \}$ , où  $(\boldsymbol{\theta}_m)_j$  désigne la  $j^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\boldsymbol{\theta}_m$ . Donc  $R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$  délimite un espace d'estimation pour le paramètre  $\boldsymbol{\theta}_m^0$ . Cette définition nous servira pour introduire la précision et la résolubilité d'un estimateur. Ceci peut être réécrit par

$$R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \left\{ \boldsymbol{\theta}_m \in \mathbb{R}^q | \forall 1 \leq j \leq q, \left| (\boldsymbol{\theta}_m)_j - (\boldsymbol{\theta}_m^0)_j - \frac{d(\boldsymbol{\varepsilon}_m)_j}{2} \right| \leq (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m)_j \right\},$$

avec  $d(\boldsymbol{\varepsilon}_m)_j = (\boldsymbol{\varepsilon}_m^+)_j - (\boldsymbol{\varepsilon}_m^-)_j$  et  $(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m)_j = \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_m^+)_j + (\boldsymbol{\varepsilon}_m^-)_j}{2}$ . On peut établir la relation d'ordre suivante

$$E_s^1(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) \subset R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) \subset E_s^q(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+), \quad (2)$$

avec  $E_s^r(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \left\{ \boldsymbol{\theta}_m \in \mathbb{R}^q | \sum_{j=1}^q \left| \frac{(\boldsymbol{\theta}_m)_j - (\boldsymbol{\theta}_m^0)_j - \frac{d(\boldsymbol{\varepsilon}_m)_j}{2}}{(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m)_j} \right|^s \leq r \right\}$ , où

$r > 0$  et  $s > 0$ .  $E_s^\lambda(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$  est une généralisation du hyper-ellipse correspondant au cas  $s = 2$ . Et de plus

$$R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} E_s^q(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} E_s^1(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+).$$

D'après ces propriétés, tout hyper-rectangle  $R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$  est borné par les hypervolumes  $E_s^1(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$  et  $E_s^q(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$  qui convergent vers  $R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)$  lorsque  $s$  tend vers l'infini. Cette propriété d'encadrement du hyper-rectangle sera utile pour déterminer une valeurs approchée de la précision d'estimation et du seuil de résolution limite.

### 3.2 Précision d'estimation

La qualité première d'un estimateur est sa précision. En estimation statistique, la précision d'un estimateur peut être mesurée par la fonction  $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}_m^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) = \Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m \in R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+))$  pour tout estimateur  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$  du paramètre  $\boldsymbol{\theta}_m^0$ . C'est la probabilité que les estimées se restreignent dans un hyper-rectangle. A probabilité de résolution  $P_{res}$  fixée, plus l'hyper-rectangle est petit, plus l'estimateur  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$  sera précis. Par la propriété d'encadrement (2), nous avons

$$\Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m \in E_s^1(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)) \leq \mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}_m^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) \leq \Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m \in E_s^q(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)). \quad (3)$$

L'extension de ce critère pour l'estimation d'un ensemble de paramètres  $\boldsymbol{\theta}^0 = [(\boldsymbol{\theta}_1^0)^T \dots (\boldsymbol{\theta}_p^0)^T]^T$  par des estimateurs de type  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^T \dots \hat{\boldsymbol{\theta}}_p^T]^T$  est définie par

$$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+) = \Pr \left( \bigcap_{m=1}^p \hat{\boldsymbol{\theta}}_m \in R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) \right). \quad (4)$$

où  $\boldsymbol{\Xi}^{-+} = [(\boldsymbol{\varepsilon}_1^+)^T \dots (\boldsymbol{\varepsilon}_p^+)^T]^T$ . L'équation (4) définit la probabilité que l'estimateur  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  se restreigne aux ensembles  $\{R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+)\}_{m=1 \dots p}$ . Elle équivaut à

$$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+) = \Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}} \in R(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)), \quad (5)$$

où  $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{pq}$  et  $R(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)$  est un hyper-rectangle dans  $\mathbb{R}^{pq}$ . En appliquant l'encadrement (3) dans (5), on obtient

$$\Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}} \in E_s^1(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)) \leq \mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+) \leq \Pr(\hat{\boldsymbol{\theta}} \in E_s^{pq}(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)). \quad (6)$$

où  $E_s^1(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)$  et  $E_s^{pq}(\boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)$  sont des hyper-ellipses dans  $\mathbb{R}^{pq}$ . Cette relation (6) sera utile pour évaluer numériquement la précision de l'estimateur  $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+)$ .

### 3.3 Probabilité de résolution

Puisque les données sont aléatoires en estimation statistique, il nous semble nécessaire de donner un critère de résolution probabiliste. L'estimateur  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  peut résoudre les sources avec une probabilité de résolution  $P_{res}$  si

$$P_{res} = \mathcal{O}_{\boldsymbol{\theta}^0}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Xi}^-, \boldsymbol{\Xi}^+) = \Pr \left( \bigcap_{m=1}^p \hat{\boldsymbol{\theta}}_m \in R(\boldsymbol{\theta}_m^0, \boldsymbol{\varepsilon}_m^-, \boldsymbol{\varepsilon}_m^+) \right) \quad (7)$$

où  $\{\varepsilon_m^-\}_{m=1,\dots,p}$  et  $\{\varepsilon_m^+\}_{m=1,\dots,p}$  sont soumis aux contraintes

$$\forall i \neq j, R(\theta_i^0, \varepsilon_i^-, \varepsilon_i^+) \cap R(\theta_j^0, \varepsilon_j^-, \varepsilon_j^+) = \emptyset. \quad (8)$$

La résolution est totale pour  $\hat{\theta}$  s'il existe un ensemble de volumes hyper-rectangles  $\{R(\theta_m^0, \varepsilon_m^-, \varepsilon_m^+)\}_{m=1,\dots,p}$  soumis aux contraintes (8) tel que  $P_{res} = 1$ . Cependant, le support de la distribution des estimées est généralement non compact. Par conséquent, la probabilité  $P_{res}$  est inférieure à 1, elle dépend de plusieurs facteurs : le nombre d'observation, le rapport signal à bruit ou les volumes considérés  $\{R(\theta_m^0, \varepsilon_m^-, \varepsilon_m^+)\}_{m=1,\dots,p}$ . La résolution limite consiste à chercher le plus large ensemble  $\{R(\theta_m^0, \varepsilon_m^-, \varepsilon_m^+)\}_{m=1,\dots,p}$  disjoint soumis aux contraintes (8) pour une probabilité  $P_{res}$  fixée.

### 3.4 Cas de distributions gaussiennes

L'évaluation analytique de (7) est complexe sauf en présence de l'expression analytique de la fonction de répartition de l'estimateur  $\hat{\theta}$ . Malheureusement, cette fonction de répartition n'est généralement pas accessible et nous avons au mieux une expression explicite de la densité de probabilité de  $\hat{\theta}$ . Une méthode alternative pour évaluer  $P_{res}$  est de calculer les encadrements proposés par (6). Notamment si l'estimateur est gaussien  $c\text{-à-d } \hat{\theta} \sim \mathcal{N}(\theta^0 + \mathbf{b}(\theta^0), \mathbf{C}(\theta^0))$  où  $\theta^0$  est la vraie valeur des paramètres,  $\mathbf{b}(\theta^0)$  est le biais de l'estimateur  $\hat{\theta}$  et  $\mathbf{C}(\theta^0)$  sa matrice de covariance. En utilisant l'encadrement (6) où le domaine hyper-ellipse peut être écrit sous la forme

$$E_2^\lambda(\theta^0, \Xi^-, \Xi^+) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^{pq} \mid \|\text{diag}^{-1}(\Xi)(\theta - \theta^0 - \frac{d\Xi}{2})\|_2^s < \lambda \right\}$$

avec  $\Xi = \frac{\Xi^- + \Xi^+}{2}$ ,  $d\Xi = \frac{\Xi^+ - \Xi^-}{2}$  et  $\text{diag}(\Xi)$  qui transforme le vecteur  $\Xi$  en une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux du vecteur  $\Xi$ . On peut démontrer que

$$\Pr(\hat{\theta} \in E_2^\lambda(\theta^0, \Xi^-, \Xi^+)) = F_{Q_{pq}}(\lambda; \|\text{diag}^{-1}(\Xi)(\mathbf{b}(\theta^0) - \frac{d\Xi}{2})\|_2^2, \Sigma),$$

où  $F_{Q_{pq}}(x; \mu, \nu)$  est une extension de loi de khi deux à  $pq$  degrés de liberté de paramètre de non centralité  $\mu$  [13] et de variances  $\nu = [\sigma_1^2 \dots \sigma_{pq}^2]^T$  où  $\{\sigma_i^2\}_{i=1..pq}$  sont les valeurs propres de la matrice  $\text{diag}^{-1}(\Xi) \mathbf{C}(\theta^0) \text{diag}^{-1}(\Xi)$ . Remarquons que dans le cas où l'estimateur  $\hat{\theta}$  est non biaisé  $\mathbf{b}(\theta^0) = \mathbf{0}$  et l'intervalle d'erreur admissible est symétrique et centré en  $\theta^0$ , i.e.,  $d\Xi = \mathbf{0}$ , alors la fonction de répartition s'écrit sous la forme explicite suivante

$$F_{Q_{pq}}(\lambda; 0, \nu) = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{pq}{2}}}{\pi^{\frac{pq}{2}} \sqrt{\prod_{i=1}^{pq} \sigma_i^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k \left(-\frac{\lambda}{2}\right)^k}{\Gamma\left(\frac{pq}{2} + k + 1\right)} \quad (9)$$

avec  $\omega_k = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{pq}=k} \frac{\Gamma(i_1+\frac{1}{2})\dots\Gamma(i_n+\frac{1}{2})}{i_1! \dots i_n! \sigma_1^{i_1} \dots \sigma_{pq}^{i_{pq}}}$ , où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma. La forme générale de l'expression de  $F_{Q_{pq}}$  est donné dans [13]. Malheureusement, cette expression n'est pas facile à programmer. Une méthode alternative numérique permettant d'évaluer  $F_{Q_{pq}}(\lambda; \mu, \nu)$  est d'utiliser sa densité de probabilité définie par

$$f_{Q_{pq}}(\lambda; \mu, \nu) = f_\chi(\lambda; \mu_1, \sigma_1^2) * \dots * f_\chi(\lambda; \mu_{pq}, \sigma_{pq}^2) \quad (10)$$

où  $*$  est le produit de convolution et  $f_\chi(\cdot)$  désigne la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\chi$  donnée par [14]

$$f_\chi(\lambda; \mu_i, \sigma_i^2) = \frac{e^{-\frac{\lambda+\mu_i}{2\sigma_i^2}} \left(\frac{\lambda\mu_i}{\sigma_i^4}\right)^{-\frac{1}{4}} I_0\left(\sqrt{\frac{\lambda\mu_i}{\sigma_i^4}}\right)}{2\sigma_i^2}$$

où  $I_0(\cdot)$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0. Notons que l'encadrement établi dans (6) devient de plus en plus étroit lorsque  $s$  augmente. A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature une méthode d'évaluation de  $\Pr(\hat{\theta} \in E_s^\lambda(\theta^0, \Xi^-, \Xi^+))$  lorsque  $s > 2$ . Néanmoins, nous pouvons toujours déterminer directement  $P_{res}$  en intégrant numériquement sur le volume hyper-rectangle la distribution des estimées lorsque elle est connue. Pour les distributions gaussiennes multivariées,  $P_{res}$  peut être évalué numériquement à l'aide de l'algorithme proposé par [15].

## 4 Application à la localisation de sources

### 4.1 Performance asymptotique du maximum de vraisemblance conditionnel

La localisation et la séparabilité des sources sont des problèmes courants en traitement d'antennes motivées au départ par des usages militaires puis par des applications civils tels que le positionnement par satellites, la téléphonie mobile. Considérons le problème d'estimation suivant : on souhaite localiser  $P$  sources lointaines à l'aide d'un réseau de  $N$  antennes. Le modèle d'observation est  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\theta^0) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$  où  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{C}^N$  sont les données collectées par le réseau d'antenne à l'instant  $t$ ,  $\theta^0 = [\theta_1^0 \theta_2^0 \dots \theta_P^0]^T \in \mathbb{C}^P$  est le vecteur qui contient les directions d'arrivée des sources,  $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1^0) \mathbf{a}(\theta_2^0) \dots \mathbf{a}(\theta_P^0)] \in \mathbb{C}^{N \times P}$  est la matrice directionnelle et  $\mathbf{a}(\cdot)$  est le vecteur directionnel,  $\mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^P$  représentent les signaux émis par les sources et  $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^N$  est le bruit de mesure. Les paramètres d'intérêt sont les direction d'arrivée des sources,  $\theta^0$ , qui sont supposés inconnues et non aléatoire. On suppose que  $\mathbf{n}(t) \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$ . Dans le cas du modèle conditionnel ( $\mathbf{s}(t)$  est inconnu et non aléatoire), il est montré dans [16] que l'estimateur du maximum de vraisemblance déterministe  $\hat{\theta}_{MVD}$  suit une loi gaussienne à fort rapport signal sur bruit (RSB). Pour une série de  $T$  mesures  $\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_T]^T$ ,  $\hat{\theta}_{MVD} \sim \mathcal{N}\left(\theta^0, \frac{\sigma^2}{2T} \left[\text{Re}(\mathbf{D}^H \mathbf{P}_{\mathbf{A}^\perp} \mathbf{D} \odot \hat{\mathbf{S}}^T)\right]^{-1}\right)$  où

$$\mathbf{D} = \left[ \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_1^0} \quad \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_2^0} \quad \dots \quad \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_P^0} \right], \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{s}(t_i) \mathbf{s}^H(t_i)$$

et  $\mathbf{P}_{\mathbf{A}^\perp} = \mathbf{I}_N - \mathbf{A}(\theta^0) (\mathbf{A}(\theta^0) \mathbf{A}^H(\theta^0))^{-1} \mathbf{A}(\theta^0)$ .

### 4.2 Simulations

Le but de ces simulations est de comparer le critère de résolution proposé avec ceux exhibés dans la littérature. Considérons le cas d'une antenne linéaire et uniforme avec  $P = 2$ . Les deux sources sont étroitement espacées de  $\delta = \theta_1^0 - \theta_2^0 = \frac{1}{kN}$  avec le nombre de capteurs  $N = 32$  et le paramètre  $k \in \{2, 4, 8, 16, 32\}$ . Le vecteur directionnel s'écrit  $\mathbf{a}(\theta) = [1 \ e^{j2\pi \sin(\theta)} \ \dots \ e^{j2\pi(N-1) \sin(\theta)}]^T$  et

$s(t) = \sqrt{\frac{RSB}{N}} [1 \ 1]^T$ . Nous définissons l'hyper-rectangle symétrique  $\Xi^- = \Xi^+ = \left[\frac{\delta}{2} \ \frac{\delta}{2}\right]^T$  pour  $P_{res}$  (7) tel que les estimées pour chaque paramètre appartient à un intervalle disjoint. Il s'agit de trouver le RSB minimal permettant de résoudre les sources avec une probabilité de résolution  $P_{res} = 0.95$  pour une séparation angulaire de  $\delta$  donnée. Comme on a mentionné à la section (3.4), l'évaluation de  $P_{res}$  pour une distribution gaussienne est numériquement lourde et il est plus simple de la borner par l'encadrement (6). Ces bornes pour  $s = 2$  peuvent être obtenue en intégrant la densité de probabilité (10) qui s'écrit simplement dans ce cas  $f_{Q_2}(\lambda; 0, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)}}{2\sigma_1\sigma_2} I_0\left(\frac{\lambda}{4} \left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\right)$ . Nous montrons sur la figure (1), l'encadrement de  $P_{res}$  permettant de résoudre les sources distantes de  $\delta = \frac{1}{128}$  rad en fonction du RSB. Plus le RSB augmente, plus la probabilité de résolution  $P_{res}$  augmente par déduction de ces deux bornes. La figure (2) compare les dif-

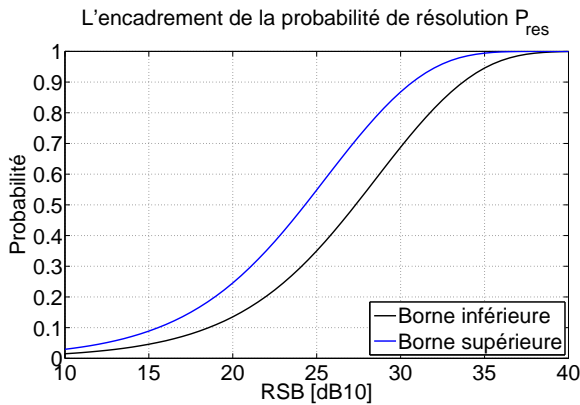


Fig 1 – Encadrement de la probabilité de résolution en fonction du RSB à l'aide de la relation (6) avec  $s = 2$ .

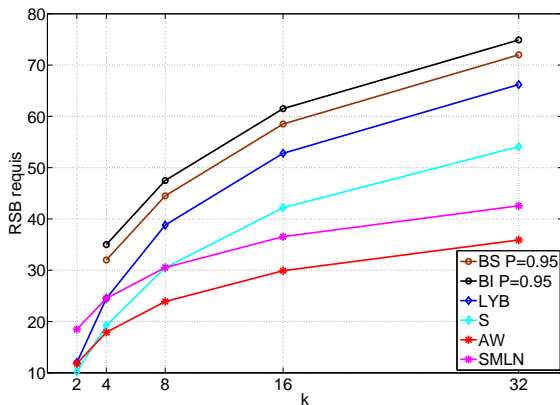


Fig 2 – Le RSB minimal requis pour la résolution de deux sources proches séparées de  $\delta = \frac{1}{kN}$  avec  $N = 32$  et  $k \in \{2, 4, 8, 16, 32\}$

férents critères de résolution. Plus précisément, nous donnons les RSB minimaux requis, à une résolution limite  $\delta$  fixée, pour le critère de résolution de Lee-Yau-Bressler (noté LYB) [7, 8], pour le critère de Smith (noté S) [2], pour le critère de Shahram-Milanfar (noté SM) [1] obtenu avec une probabilité de détection  $P_d = 0.95$  et une probabilité de fausse alarme  $P_d = 0.1$ , pour le critère de Amar-Weiss (noté AW) [9] obtenu avec une

probabilité de détection  $P_d = 0.95$  et pour les bornes inférieures BI et supérieures BS de notre critère de résolution avec une probabilité de résolution de 0.95 (BI  $P = 0.95$ , BS  $P = 0.95$ ).

Nous remarquons que, parmi tous les critères mentionnés, le critère proposé est le plus exigeant dans le sens où il nécessite un RSB important. Contrairement aux critères de résolution classiques qui se focalisent uniquement sur la résolubilité du problème, notre critère permet non seulement de résoudre les paramètres mais également d'évaluer la précision de l'estimateur en restreignant les valeurs estimées dans les hypervolumes susmentionnés.

## 5 Conclusion

Nous avons proposé un critère de résolution qui permet de caractériser les performances en résolution d'un estimateur en présence de plusieurs paramètres. Nous avons illustré l'applicabilité de notre critère de résolution sur un problème de localisation de sources où nous avons mis le lien entre le RSB minimal permettant de séparer les sources et la distance séparant les sources.

## Références

- [1] M. Shahram and P. Milanfar, "Imaging below the diffraction limit : a statistical analysis," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 13, no. 5, pp. 677–689, May 2004.
- [2] S. T. Smith, "Statistical resolution limits and the complexified Cramér-Rao bound," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1597–1609, May 2005.
- [3] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos, "Statistical resolution limit of the uniform linear cocentered orthogonal loop and dipole array," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 1, pp. 425–431, Jan. 2011.
- [4] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos, "On the asymptotic resolvability of two point sources in known subspace interference using a glrt-based framework," *Signal Processing, Elsevier*, vol. 92, pp. 2471–2483, Oct. 2012.
- [5] H. Cox, "Resolving power and sensitivity to mismatch of optimum array processors," *The Journal of the acoustical society of America*, vol. 54, no. 3, pp. 771–785, Aug. 1973.
- [6] K. Sharman and T. S. Durrani, "Resolving power of signal subspace methods for finite data lengths," in *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 1, Apr. 1985, pp. 1501–1504.
- [7] H. Lee, "The cramer-rao bound on frequency estimates of signals closely spaced in frequency," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 6, pp. 1507–1517, Jun. 93.
- [8] S. F. Yau and Y. Bresler, "Worst case cramer-rao bounds for parametric estimation of superimposed signals with applications," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 12, pp. 2973–2986, Dec. 1992.
- [9] A. Amar and A. J. Weiss, "Fundamental limitations on the resolution of deterministic signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 11, pp. 5309–5318, Nov. 2008.
- [10] M. N. El Korso, R. Boyer, A. Renaux, and S. Marcos, "Statistical resolution limit for the multidimensional harmonic retrieval model : Hypothesis test and Cramér-Rao bound approaches," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. doi :10.1186/1687-6180-2011-12, pp. 1–14, Jul. 2011.
- [11] S. G. Oh and R. L. Kashyap, "A robust approach for high resolution frequency estimation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 3, pp. 627–643, Mar. 1991.
- [12] M. P. Clark, "On the resolvability of normally distributed vector parameter estimates," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 12, pp. 2975–2981, Dec. 1995.
- [13] B. K. Shah and C. G. Khatri, "Distribution of a definite quadratic form for non-central normal variates," *The Annals of Mathematical Statistics*, pp. 883–887, 1961.
- [14] R. J. Muirhead, *Aspects of multivariate statistical theory*. New Jersey, USA : John Wiley & Sons, 2009.
- [15] A. Genz, "Numerical computation of multivariate normal probabilities," *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 1, no. 2, pp. 141–149, 1992.
- [16] A. Renaux, P. Forster, E. Chaumette, and P. Larzabal, "On the high-SNR conditional maximum-likelihood estimator full statistical characterization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 12, pp. 4840–4843, Dec. 2006.