

Analyse multifractale de champs vectoriels aléatoires 3D : application à la turbulence des fluides

S.G. ROUX¹, R.M. PEREIRA^{1,2}, L. CHEVILLARD¹, P. ABRY¹

¹Laboratoire de Physique, UMR 5672, CNRS, École Normale Supérieure de Lyon.

²CAPES Foundation, Ministry of Education of Brazil.

stephane.roux@ens-lyon.fr

Résumé – L’analyse des propriétés de la turbulence des fluides est traditionnellement faite à partir de la statistique des accroissements du champ 3d de vitesse. Cet approche a conduit à des résultats importants comme la loi des 4/5 de Kolmogorov. L’analyse multifractale, développée pour caractériser ces propriétés statistiques, a vu l’émergence d’outils plus performants avec l’utilisation de la transformée en ondelette. Dans ce travail, on applique ces outils à l’étude de champs vectoriels aléatoires 3d, produits par un modèle réaliste proposé récemment pour décrire la turbulence homogène et isotrope, mais dont les propriétés statistiques ne sont pas connues analytiquement. La caractérisation numérique de ces propriétés est une étape importante qui permet de mieux comprendre et éventuellement d’affiner le modèle.

Abstract – The analysis of fluid turbulence properties is traditionally carried on from the statistics of the three-dimensional velocity field increments. This approach has led to important results such as Kolmogorov’s 4/5 law. Multifractal analysis, developed to characterize these statistical properties, has seen the emergence of more efficient tools through the employment of the wavelet transform. In this work, we apply some of these tools to study 3d random vector fields, produced by a realist model recently proposed to describe homogeneous and isotropic turbulence but whose statistical properties are unknown analytically. The numerical characterization of these properties is an important step towards a better understanding and even a refining of the model.

1 Motivation et objectif

La turbulence pleinement développée est aujourd’hui encore un problème d’actualité dont la compréhension repose essentiellement sur une description phénoménologique des propriétés observées sur des champs de vitesse expérimentaux. Ces signaux sont très irréguliers et présentent un phénomène d’invariance d’échelle : les différentes statistiques des accroissements de vitesse se comportent en loi de puissance. C’est Kolmogorov [8] qui formalise ces idées : en supposant la turbulence homogène, isotrope avec un taux de dissipation de l’énergie constant, il prédit à la limite des nombres de Reynolds infinis, l’existence d’une zone inertielle pour laquelle le champ de vitesse Eulerien est statistiquement auto-similaire [7] et caractérisé par un seul exposant de Hölder $h = 1/3$. Le succès de cette théorie provient de sa très bonne vérification expérimentale mais c’est aussi l’expérience qui a révélé ses imperfections, principalement son incapacité à rendre compte du phénomène d’intermittence observé aux petites échelles [7]. En effet, le taux de dissipation ϵ_l , estimé à l’échelle l présente des bouffées intermittentes d’autant plus importantes que l’échelle l considérée est petite. Ce phénomène contredit ainsi les hypothèses d’invariance d’échelle globale du champ de vitesse. Pour rendre compte de ce phénomène d’intermittence, Kolmogorov [9] et Obukhov [10] proposent un modèle de cascade multiplicative log-normale qui mène à des propriétés multifractales du champ

de vitesse. Depuis, différents modèles phénoménologiques de turbulence ont été proposés. L’analyse de leurs propriétés d’invariance d’échelle est cruciale pour vérifier l’adéquation de ces modèles aux propriétés clairement établies de la turbulence homogène isotrope.

Dans cette contribution nous présentons l’analyse multifractale d’un modèle récent reposant sur le modèle de chaos multiplicatif et qui permet de reproduire le phénomène d’intermittence et de skewness des accroissements. Cependant, ses propriétés d’invariance d’échelle ne sont pas connues analytiquement ce qui justifie une analyse numérique approfondie.

2 Analyse Multifractale

L’analyse multifractale, envisagée comme mesure des propriétés d’invariance d’échelle, est maintenant considérée comme un outil classique pour l’étude de données expérimentales ou synthétiques. L’invariance d’échelle est alors définie comme le comportement en lois de puissance, pour une large gamme d’échelles $l \in [\eta; L]$, $\frac{L}{\eta} \gg 1$ des différents moments d’ordre q de quantités multirésolutions $T(l, x)$ qui décrivent le contenu du signal autour d’une position x à travers les échelles. L’analyse pratique réside alors dans l’estimation de ses différents moments empiriques :

$$Z(q, l) = \frac{1}{N_x} \sum_x |T(l, x)|^q \sim A_q l^{\zeta(q)}. \quad (1)$$

Le spectre $\zeta(q)$ est alors estimé par régression linéaire du logarithme du moment d'ordre q en fonction du logarithme des échelles. Le formalisme multifractal relie alors ce spectre à la régularité locale du signal. Si le spectre $\zeta(q) = Hq$ est linéaire, le signal est dit monofractal : la régularité du signal est la même partout avec un exposant de Hölder H . Au contraire, une non linéarité du spectre $\zeta(q)$ rend compte de la variabilité de la régularité locale dans l'espace. Le signal est alors dit multifractal ou intermittent.

Analyse en log-cumulants. Récemment, il a été suggéré d'exprimer les $\zeta(q)$ par un développement limité au voisinage de $q = 0$ [3, 6]. En effet, si on suppose que la fonction $\zeta(q)$ est dérivable autour de 0, on peut considérer le développement de Taylor de $\zeta(q)$ à $q = 0$:

$$\zeta(q) = \sum_{p \geq 1} c_p \frac{q^p}{p!} \quad (2)$$

Les coefficients c_p de ce développement s'obtiennent alors naturellement à partir des cumulants $C_p(a)$ du logarithme des coefficients multirésolutions [14], c'est à dire pour les deux premiers cumulants :

$$C(1, l) = \frac{1}{N_x} \sum_x \log(|T(l, x)|) \sim c_1 \log l,$$

$$C(2, l) = \frac{1}{N_x} \sum_x \log(|T(l, x)|)^2 - C^2(1, l) \sim c_2 \log l. \quad (3)$$

Ce développement est motivé par le fait que ces log-cumulants, soulignent la différence entre deux grandes classes de processus invariant d'échelle : celle dont les $\zeta(q)$ ne sont pas des fonctions linéaires en q , dite multifractale, versus celle monofractale présentant un spectre $\zeta(q)$ linéaire en q ($\forall p \leq 2 : c_p = 0$).

Coefficients Multirésolutions. Plusieurs familles de coefficients multirésolutions peuvent être utilisés. Historiquement, ce sont les accroissements du signal $\delta_l f(x) = f(x+l) - f(x)$ qui ont été utilisés pour développer le formalisme multifractal [7]. Ce formalisme a ensuite été généralisé à tout un ensemble de quantités multirésolutions obtenus à partir des coefficients de la transformée en ondelette discrète ou continue. Nous utilisons ici la transformée en ondelette discrète qui correspond essentiellement à la restriction de la transformée en ondelette continue sur une grille dyadique $d_j(k) = T(2^j, k2^j)$, ainsi que les coefficients leaders, définis comme le maximum des coefficients en ondelette dans un certain voisinage espace-échelle. Plus exactement, on définit [13]

$$L_j(k) = \max_{j' \leq j, k_1 \leq k' \leq k_2} |d_{j'}(k')|, \quad (4)$$

avec $k_1 = 2^{j-j'}(k-2)+1$, $k_2 = 2^{j-j'}(k+1)$. Les estimations basées sur ces coefficients leaders donnent systématiquement des performances supérieures à celle obtenues en utilisant les accroissements du signal [14, 12].

3 La turbulence homogène isotrope

Théorie. En supposant la turbulence incompressible isotrope on obtient une formule générale pour la fonction de covariance

du champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ [2]. Si on définit les accroissements de vitesse transverses, $\delta_l^T \mathbf{u}$ et longitudinaux, $\delta_l^L \mathbf{u}$, comme

$$\delta_l^L \mathbf{u} = u_p(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - u_p(\mathbf{x}),$$

$$\delta_l^T \mathbf{u} = u_n(\mathbf{x} + \mathbf{l}) - u_n(\mathbf{x}),$$

où u_p et u_n représentent respectivement la composante de la vitesse parallèle et perpendiculaire au vecteur de séparation \mathbf{l} ($l = \|\mathbf{l}\|$). On peut alors écrire, pour toutes échelles l , que le moment d'ordre deux de ces accroissements [2] se comporte comme :

$$Z^T(q = 2, l) = Z^L(q = 2, l) + \frac{1}{2} l \frac{d}{dl} Z^L(q = 2, l). \quad (5)$$

Cette relation nous assure que si ces moments se comportent en loi de puissance alors l'exposant de la loi est le même pour l'incrément longitudinal et transverse. Si on suppose $Z^T(q = 2, l) = A^T l^{\zeta(2)}$ et $Z^L(q = 2, l) = A^L l^{\zeta(2)}$ alors on obtient :

$$\frac{A^T}{A^L} = \frac{Z^T(q = 2, l)}{Z^L(q = 2, l)} = 1 + \frac{\zeta(2)}{2}. \quad (6)$$

Dans le dissipatif profond $l \leq \eta$, la vitesse est dérivable et on a $\frac{A^T}{A^L} = 2$.

Ce résultat est facilement généralisable au moment d'ordre 2 des coefficients en ondelette. Dans le régime inertiel, la constante reste inchangée quelque soit l'ondelette utilisée. Par contre, dans le régime dissipatif on obtient :

$$\frac{A^T}{A^L} = \frac{Z^T(q = 2, l)}{Z^L(q = 2, l)} = 1 + N_\psi \quad (7)$$

où N_ψ est le nombre de moments nuls de l'ondelette. L'ondelette que nous utilisons ici est l'ondelette de Daubechies avec $N_\psi = 3$.

En ajoutant l'hypothèse d'un taux constant de dissipation de l'énergie cinétique à travers les échelles, Kolmogorov [8] prédit que, quand le nombre de Reynolds tend vers l'infini, le moment d'ordre 3 des accroissements non signés (notée $\tilde{Z} = \frac{1}{N_x} \sum_x T(l, x^q)$) se comporte asymptotiquement aux petites échelles comme :

$$\tilde{Z}^L(q = 3, l) = -\frac{4}{5} \epsilon l, \quad (8)$$

$$\tilde{Z}^T(q = 3, l) = 0, \quad (9)$$

où ϵ est le taux moyen de dissipation de l'énergie. Les statistiques des accroissements de vitesse ne sont donc pas symétriques et révèlent le phénomène de skewness. Le signal de vitesse est alors invariant d'échelle [7] avec un spectre $\zeta(q)$ linéaire de pente $H = 1/3$. Remarquons que cette théorie ne prend pas en compte le phénomène d'intermittence observé expérimentalement par une courbure nette des spectres $\zeta(q)$ estimés. La valeur généralement admise pour le coefficient d'intermittence est [1] $c_2 = 0.025$.

Modèle. Elaborant sur le modèle de chaos multiplicatif proposé par [11], Chevillard *et al.* proposent de modéliser le champ de vitesse turbulent par l'intégrale stochastique [5]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_L(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\epsilon^{\frac{5}{2}-H}} \wedge e^{\gamma \mathbf{x}_\epsilon \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{W}(\mathbf{y}) \quad (10)$$

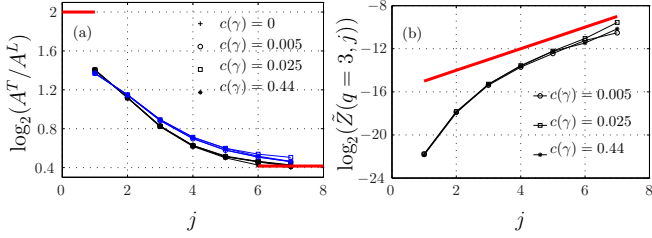


FIGURE 1 – **Moments.** (a) Rapport des fonctions de partitions transverse et longitudinale d’ordre 2 (eq. 7) des coefficients en ondelette (en noir) et des leaders (en bleu) pour les 4 valeurs du paramètre γ . Les lignes rouges correspondent aux valeurs prédites dans le régime dissipatif et inertiel. (b) Fonctions de partitions d’ordre 3 des coefficients en ondelette signés. Le comportement linéaire théorique du régime inertiel correspond à la ligne rouge

où $\varphi_L(\mathbf{x})$ est une fonction isotrope nulle pour $|\mathbf{x}| > L$ et telle que $\varphi_L(\mathbf{x}) = \exp[-x^2/(L^2 - x^2)]$ pour $|\mathbf{x}| < L$. La fonction $|\mathbf{x}|_\epsilon = \sqrt{x^2 + \epsilon^2}$ est une norme régularisée où ϵ peut être vu comme l’échelle dissipative de Kolmogorov. Le champ de vecteurs $d\mathbf{W}$ est un bruit blanc à 3 dimensions dont les composantes vérifient quelque soit la fonction $f \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C})

$$\int f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \langle dW_i(\mathbf{x}) dW_j(\mathbf{y}) \rangle \equiv \delta_{ij} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Cette formule s’inspire de la dynamique à court terme du champ de vortécité qui est déformé par l’exponentielle du tenseur taux de déformation. On s’inspire alors de la forme de ce taux de déformation pour définir \mathbf{X}_ϵ comme le champ matriciel suivant :

$$\mathbf{X}_\epsilon(\mathbf{y}) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{z}| \leq L} \left\{ \frac{(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \otimes [(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \wedge d\mathbf{W}'(\mathbf{z})]}{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|_\epsilon^{7/2}} + \frac{[(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \wedge d\mathbf{W}'(\mathbf{z})] \otimes (\mathbf{y}-\mathbf{z})}{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|_\epsilon^{7/2}} \right\}, \quad (11)$$

où \otimes représente le produit tensoriel. Les composantes de X_ϵ présentent alors des corrélations de la forme [5] :

$$\text{cov}(X_{i,i}(\mathbf{x}), X_{i,i}(\mathbf{y})) = \frac{8}{3} \log(L/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|_\epsilon),$$

quand $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \rightarrow 0$ avec $i = 1, 2$ ou 3. Cette structure de covariance permet de modéliser un phénomène d’intermittence qui augmente avec le paramètre γ . Quand $\gamma = 0$ le champ $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ est un processus gaussien monofractal d’exposant $H = 1/3$. Si les bruits $d\mathbf{W}$ et $d\mathbf{W}'$ sont pris indépendants le processus obtenu ne présente de skewness. Dans ce cas, on peut aussi montrer en utilisant la théorie matricielle du chaos multiplicatif que les intermittences longitudinales et transverses sont les mêmes [4]. Un critère nécessaire à l’apparition de skewness est l’existence d’une corrélation entre les vecteurs blancs $d\mathbf{W}$ et $d\mathbf{W}'$. La phénoménologie de la turbulence, en particulier le phénomène d’étirement de la vortécité présent dans les équations d’Euler, suggère fortement de prendre $d\mathbf{W} = d\mathbf{W}'$ impliquant une corrélation maximale entre les deux vecteurs blancs [5]. Dans ce

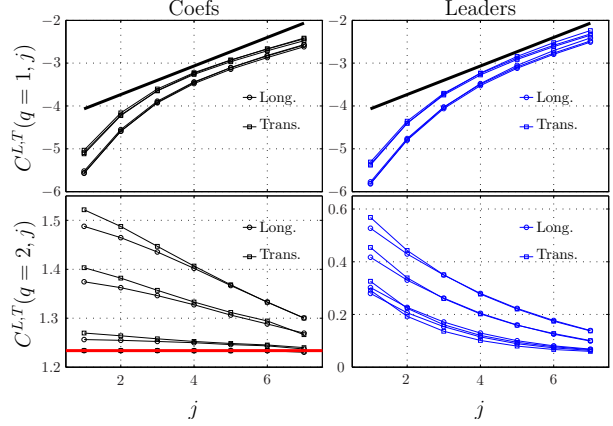


FIGURE 2 – **Log-cumulants.** Log-cumulants d’ordre 1 (en haut) et 2 (en bas) obtenus pour les coefficients en ondelette (courbes noires) et les leaders (courbes bleues) pour les 4 valeurs du paramètre γ . Les lignes noires correspondent à la prédiction $H = 1/3$ et la ligne rouge à la valeur théorique du log-cumulant d’une gaussienne ($c_2 = \pi^2/8$).

cadre de corrélation maximale on ne sait plus calculer analytiquement le spectre multifractal $\zeta(q)$. C’est pourquoi nous proposons une étude numérique de ces champs aléatoires et l’analyse précise des propriétés d’invariance d’échelle.

4 Résultats

Procédure Le champ de vitesse est généré sur une grille 2048^3 pixels pour différentes valeurs du paramètre γ (prises telles que le coefficient d’intermittence $\gamma^2 = 0, 0.005, 0.025, 0.044$). Pour chaque composante de la vitesse $u_x(\mathbf{x}), u_y(\mathbf{x}), u_z(\mathbf{x})$, on calcule 2048 transformées en ondelette discrète ainsi que les coefficients leaders associés. On estime les fonctions de partitions (équations 1 et 3) à partir des coefficients signés et des leaders. Ceci nous donne, pour chaque composante de la vitesse, deux estimations des fonctions de partitions transverses ($Z^T(q, j)$) et une estimation des fonctions longitudinales ($Z^L(q, j)$). Après avoir vérifié l’indépendance de ces fonctions par rapport à la composante de vitesse, nous prenons comme estimé finale la valeur moyenne obtenue pour le transverse et le longitudinal.

Incompressibilité. La figure 1a) présente le rapport des fonctions de partition d’ordre 2 (eq. 7) obtenus en utilisant les coefficients de la transformée en ondelette (courbes noires) ainsi que les leaders (courbes bleues) pour les différentes valeurs du paramètre γ . Ces courbes sont indépendantes de ce coefficient. Elles partent, à grandes échelles, de la valeur prédite par K41, $A^T/A^L = (1 + \zeta(2)/2)$ avec $\zeta(2) = 2/3$, pour se rapprocher de la valeur du dissipatif $A^T/A^L = 1 + N_\psi = 4$ mais sans l’atteindre.

Skewness. Les fonctions de partition signées d’ordre 3 obtenues avec les coefficients en ondelette sont représentées dans la figure 1b). Ces courbes ont été décalées verticalement pour permettre leur superposition et montrer l’indépendance par rapport

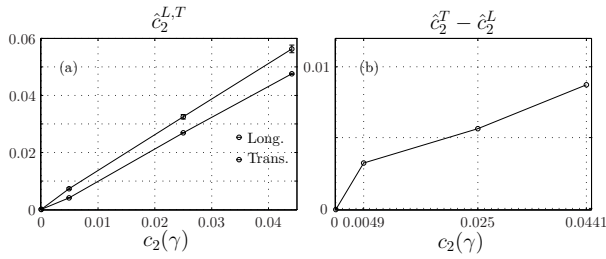


FIGURE 3 – **Intermittence.** (a) Biais par rapport à la valeur attendue dans le cas gaussien. (b) Différence entre le cas transversal et longitudinal.

à l’intermittence γ . A grandes échelles, ces courbes suivent un comportement linéaire proche du résultat théorique, $\zeta(3) = 1$, représentés par la droite rouge.

Log-cumulant. Les log-cumulants obtenus pour les coefficients en ondelette (courbes noires) et les leaders (courbes bleues) pour les différentes valeurs du paramètre γ sont représentés dans la figure 2. Les cumulants d’ordre 1 (graphes du haut) ne présentent pas de régime linéaire clair. Ceci peut être compris en prenant en compte les effets de taille finie aussi bien à grandes échelles (de l’ordre de L) qu’aux petites échelles dissipatives. Ceci est aussi observé en particulier sur le champ monofractal gaussien ($\gamma = 0$) pour lequel le comportement asymptotique devrait être une droite de pente $c_1 = 1/3$. Les résultats, décalés d’une constante arbitraire dépendant de γ , sont indiscernables. La différence entre le transverse et le longitudinal semble indépendante de ce paramètre γ .

Les cumulants d’ordre 2 des coefficients en ondelette présentent par contre un très beau régime linéaire. La valeur du cas gaussien ($\gamma = 0$) est bien vérifiée. Pour le cas gaussien on obtient bien un cumulants d’ordre 2 indépendant de l’échelle et égal à $\pi^2/8$ (ligne rouge). Les résultats de la régression linéaire de ces courbes entre les échelles 2 et 6 sont présentés dans la figure 3. L’intermittence mesurée, c’est-à-dire la pente du log-cumulant d’ordre 2 en fonction du logarithme des échelles, augmente bien avec le paramètre γ . De plus, nous observons que l’intermittence transverse est plus importante que l’intermittence longitudinale. Dans ce contexte nous quantifions précisément cette différence figure 3b. Nous observons que le coefficient d’intermittence transverse est 20% plus grand que le coefficient d’intermittence longitudinal. De manière étonnante, l’estimation du log-cumulant d’ordre 2 à partir des leaders présente un écart au régime linéaire d’autant plus important que l’échelle est petite. La définition des leaders, qui prend en compte les échelles plus petites, rend ces quantités beaucoup plus sensibles à la présence d’une échelle dissipative et complique l’estimation du coefficient d’intermittence.

5 Conclusion

Pour la première fois, nous avons estimé précisément les propriétés d’invariance d’échelle d’un champ aléatoire vectoriel proposé pour modéliser les écoulements turbulents homogènes

isotropes. Ceci nous permet de relier les paramètres libres de ce modèle (H et γ) à l’amplitude et exposant des lois de puissance. Nous confirmons le réalisme de ce modèle quant à décrire la turbulence des fluides, en particulier le phénomène d’intermittence et de skewness. Un des résultats importants est la confirmation de la différence d’intermittence entre fluctuations longitudinales et transverses. Les résultats obtenus avec les coefficients leaders montrent que ces quantités doivent être utilisées de manière prudente sur des données expérimentales qui présentent d’une échelle de coupure à petites échelles.

Références

- [1] A. Arneodo *et al.*, *Structure functions in turbulence, in various flow configurations, at reynolds number between 30 and 5000, using extended self-similarity*, Europhysics Letters **34** (1996), no. 6, 411–416.
- [2] G.K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, June 1982.
- [3] B. Castaing, Y. Gagne, and M. Marchand, *Log-similarity for turbulent flows*, Physica D **68** (1993), 387–400.
- [4] L. Chevillard, R. Rhodes, and V. Vargas, *Gaussian multiplicative chaos for symmetric isotropic matrices.*, J. Stat. Phys **150** (2013), 698.
- [5] L. Chevillard, R. Robert, and V. Vargas, *A stochastic representation of the local structure of turbulence*, EPL **89** (2010), no. 5, 54002.
- [6] J. Delour, J.F. Muzy, and A. Arneodo, *Intermittency of 1D velocity spatial profiles in turbulence : a magnitude cumulant analysis*, European Physical Journal B **23** (2001), 243–248.
- [7] U. Frisch, *Turbulence, the legacy of a.n. kolmogorov*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [8] A.N. Kolmogorov, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers*, Doklady Akademii Nauk **30** (1941), 301–305.
- [9] ———, *A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number*, Journal of Fluid Mechanics **13** (1962), no. 1, 82–85.
- [10] A.M. Obukhov, *Some specific features of atmospheric turbulence*, Journal of Fluid Mechanics **13** (1962), 77.
- [11] R. Robert and V. Vargas, *Hydrodynamic turbulence and intermittent random fields*, Commun. Math. Phys. **284** (2008), 649–673.
- [12] S.G. Roux, B. Lashermes, P. Abry, and S. Jaffard, *Contributions à l’étude des performances statistiques des estimateurs multifractals*. XXe colloque sur le Traitement du Signal et des Images. GRETSI, Louvaine la Neuve, Belgique, 2005.
- [13] H. Wendt, P. Abry, and S. Jaffard, *Bootstrap for empirical multifractal analysis*, IEEE Signal Processing Mag. **24** (2007), no. 4, 38–48.
- [14] H. Wendt, S.G. Roux, P. Abry, and S. Jaffard, *Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images*, Signal Processing **89** (2009), no. 6, 1100–1114.