

# Modélisation du bruit magnétique

JEAN-PIERRE TANGUY

DGA TN Brest

BCRM de Brest – CC 42 – 29240 BREST Cedex 9

jean-pierre.tanguy@intradef.gouv.fr.

Résumé - En détection magnétique aéroportée, la signature de la cible recherchée est entachée d'un bruit, dit magnétique, ayant des origines physiques diverses. Il est utile de disposer d'un modèle de bruit réaliste afin d'évaluer les performances des systèmes de détection. Le modèle proposé décrit dans l'article peut être obtenu, soit par une approche fréquentielle, soit par une approche temporelle. Dans le premier cas, les échantillons de bruit se déduisent directement d'un gabarit standard de bruit reposant sur des mesures réelles. Dans le second cas, les échantillons de bruit sont obtenus par filtrage linéaire d'un bruit blanc, de telle manière que la densité spectrale du bruit de sortie coïncide avec le gabarit standard de bruit. Deux méthodes selon ces deux approches sont présentées ici ainsi que des exemples de résultats.

Abstract - In airborne magnetic detection, the signature of the searched target is usually corrupted by a noise referred to as magnetic noise, and which has various physical origins. It is useful to have a realistic model of this noise, in order to assess the performances of detection systems. The suggested model described in this paper can be obtained, either by a frequency domain approach or by a time domain approach. In the former case, the samples of the noise are obtained directly from a standard noise power spectral density based on real measurements. In the latter case, the samples are obtained by linear filtering of a white noise, so that the power spectral density of the output noise equals the standard noise spectral density. Two methods according to these two approaches are presented here, as well as examples of results.

## 1 Introduction

La détection magnétique aéroportée, ou détection MAD (Magnetic Anomaly Detection) a pour but de détecter la perturbation du champ magnétique terrestre produite par le passage d'un sous-marin. Cette perturbation, ou signature, est entachée d'un bruit, dit magnétique, d'origines physiques diverses (géologique, géomagnétique, présence de courants marins et anisotropie des capteurs). La modélisation du bruit magnétique permet d'estimer les performances des détecteurs MAD, de les optimiser en situation opérationnelle et d'évaluer le risque MAD d'un sous-marin vis-à-vis de la détection, ce qui entraîne des conséquences sur l'immersion du sous-marin.

## 2 Principe de la modélisation

Un gabarit standard de bruit, établi à partir de mesures effectuées en un lieu donné, est présenté dans la thèse de R. Blanpain [Blanpain79]. Ce gabarit standard est une densité spectrale de puissance  $\gamma(\nu)$  définie pour deux situations « fort bruit » et « faible bruit », qui correspondent respectivement à des petits fonds et des

grands fonds. L'existence de la densité spectrale suppose le bruit stationnaire, ce qui, en toute rigueur, n'est pas le cas. Il est cependant possible de considérer un bruit localement stationnaire. Deux approches, l'une fréquentielle, l'autre temporelle [Miller12], sont considérées. Dans l'approche fréquentielle, une suite de variables aléatoires est générée à partir d'échantillons de  $\gamma(\nu)$ . Les échantillons temporels de bruit s'en déduisent par transformation de Fourier inverse. Dans l'approche temporelle, le bruit cherché est un bruit blanc filtré par un filtre linéaire de gain complexe  $H(\nu)$ , ce qui ramène le problème à la détermination d'un filtre linéaire, puisque la densité spectrale s'écrit  $\gamma(\nu) = |H(\nu)|^2$ , à une constante près.

## 3 Gabarit standard de bruit

### 3.1 Expression

Le gabarit standard de bruit [Blanpain79] est donné par l'expression  $\gamma(\nu) = \left( \frac{k_1'}{\nu^2} + k_3' \right)^2 + \frac{(k_2')^2}{\nu^2}$ . Les valeurs

numériques de  $k'_1, k'_2, k'_3$ , avec leurs unités, sont données dans le tableau Tab 1. Avec ces unités, la densité spectrale  $\gamma(\nu)$  s'exprime en  $\gamma^2 \text{Hz}^{-1}$  ( $1 \gamma = 1 \text{ nT}$  où « nT » signifie « nanoTesla »).

Tab 1 : paramètres du gabarit standard

	situation « fort bruit »	situation « faible bruit »	unités
$k'_1$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$\gamma \cdot \text{Hz}^{3/2}$
$k'_2$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$\gamma \cdot \text{Hz}^{1/2}$
$k'_3$	$10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$\gamma \cdot \text{Hz}^{-1/2}$

Comme la densité spectrale n'est pas définie pour  $\nu=0$  (elle tend vers l'infini), on convient de lui attribuer une valeur finie par extrapolation linéaire à partir de deux autres valeurs de la densité spectrale. La figure 1 représente le gabarit standard (normalisé par rapport à son maximum et représenté en échelle logarithmique) pour les situations « fort bruit » (en bleu) et « faible bruit » (en rouge).

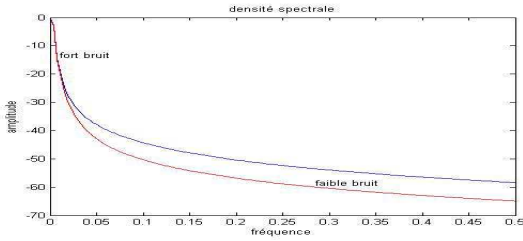


Figure 1 : gabarit standard pour les cas fort et faible bruit

### 3.2 Modification de l'expression

L'expression du gabarit standard est modifiée de façon à avoir une densité spectrale définie analytiquement pour toute fréquence. En écrivant  $\gamma(\nu) = A_1 + \frac{B_1 \nu^2 + C_1}{\nu^4}$  avec

$A_1 = k_3'^2$ ,  $B_1 = 2k_1'k_3' + (k_2')^2$ ,  $C_1 = k_1'^2$ , le bruit cherché apparaît comme la somme d'un bruit blanc de densité spectrale  $\gamma_1(\nu) = A_1$  et d'un processus de densité spectrale  $\gamma_2(\nu) = \frac{B_1 \nu^2 + C_1}{\nu^4}$ , en supposant ces deux

processus décorrélés (c'est le cas s'ils sont indépendants, ce qui est une hypothèse raisonnable)

Dans ce qui suit, tant pour l'approche fréquentielle que temporelle, on s'intéressera uniquement à la génération d'échantillons temporels de bruit à partir de la densité

spectrale modifiée  $\gamma_m(\nu) = \frac{B_1 \nu^2 + C_1}{\nu^4 + d^4}$  dans laquelle la

constante  $d$  est choisie de telle sorte que  $\gamma_m(0) = \gamma(0) - A_1$ , avec  $\gamma(0)$  valeur extrapolée en 0. On peut montrer que compte tenu des valeurs numériques des paramètres, l'erreur commise avec le terme correctif  $d^4$  est négligeable.

## 4 Approche fréquentielle

### 4.1 Principe

On suit l'approche décrite dans [Miller12]. On veut générer  $N$  échantillons d'un signal temporel  $x(t)$  sur une durée  $T$ , de densité spectrale  $\gamma_x(\nu) = \gamma_m(\nu)$ . Le développement en série de Fourier du signal périodisé

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) \text{ s'écrit } \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k \nu_0 t} \text{ avec}$$

$\nu_0 = 1/T$ .  $\tilde{x}(t)$  est un processus aléatoire cyclostationnaire, relativement à la durée  $T$ . Si les  $c_k$  sont des variables aléatoires non corrélées et centrées,  $\tilde{x}(t)$  est stationnaire, de fonction d'autocorrélation

$$\Gamma_{\tilde{x}}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V_k^2 e^{j2\pi k \nu_0 \tau} \text{ et de densité spectrale}$$

$$\gamma_{\tilde{x}}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V_k^2 \delta(\nu - k\nu_0) \text{ avec } V_k^2 = E(|c_k|^2). \text{ Les}$$

$V_k^2$  sont choisis de façon à ajuster la densité spectrale de  $\tilde{x}(t)$  à la densité spectrale voulue, ce qui peut s'écrire  $V_k^2 = \beta \gamma_x(k\nu_0)$ , la constante de proportionnalité  $\beta$  étant choisie de telle sorte que les puissances moyennes de  $\tilde{x}(t)$  et  $x(t)$  coïncident, ce qui

$$\text{s'exprime par la condition } \beta \sum_{k=-M}^M \gamma_x(k\nu_0) = \int_{-W}^W \gamma_x(\nu) d\nu.$$

car la densité spectrale de  $x(t)$  est bornée de fréquence maximale  $W$ .  $M$  est donné par  $M = [W/\nu_0] = [WT]$ , avec  $[X]$  partie entière du réel  $X$ . Le problème équivaut donc à la génération de  $2M+1$  variables aléatoires  $c_k$

centrées de variance  $V_k^2 = E(|c_k|^2) = \beta \gamma_x(k\nu_0)$ . On suppose ici que les variables  $c_k$  sont gaussiennes, bien que cette hypothèse ne soit pas indispensable. Comme le processus  $x(t)$  est supposé à valeurs réelles, il suffit de générer  $M+1$  valeurs, puisque les  $c_k$  sont à symétrie

hermitienne. On notera que  $c_0$  est réel. Les échantillons du processus aléatoire cherché sont déterminés par

$$x(nT_e) = \tilde{x}(nT_e) = \sum_{k=-M}^M c_k e^{j2\pi k \nu_0 n T_e} \text{ pour } 0 \leq n \leq N-1$$

### 4.2 Exemples de résultats

Les valeurs numériques sont données dans le tableau Tab 2.

Tab 2 : paramètres d'échantillonnage et de bande passante

Fréquence échantillonnage $f_e$ (Hz)	Bande spectrale $f_{\max} = f_e/2$ (Hz)	Période échantillonnage $T_e = 1/f_e$ (s)
1	0 - 0,5	1
3	0 - 1,5	0,33
6	0 - 3	0,17

On calcule  $\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(\nu) d\nu \approx \int_{-F \max}^{F \max} \gamma_x(\nu) d\nu$  avec  $F \max = 5$

Hz et un pas fréquentiel  $\Delta F = 0,005$  Hz. Le processus temporel est généré sur une durée d'observation

$T = 400T_e$ . La somme  $\sum_{k=-M}^M \gamma_x(k\nu_0)$  est calculée pour

$$M = \lceil f_{\max} / \nu_0 \rceil = \lceil f_{\max} T \rceil$$

On représente sur une même figure 128 points de la densité spectrale vraie et de la densité spectrale du processus généré (estimée par la méthode du périodogramme simple). L'espacement fréquentiel est  $f_e/256$ , soit  $1/256=0,004$  Hz dans le cas  $f_e = 1$  Hz.

Les fluctuations observées sur cette dernière proviennent de la variance de l'estimateur spectral simple, qui reste constante. Une comparaison grossière est néanmoins possible malgré la mauvaise qualité de l'estimateur simple.

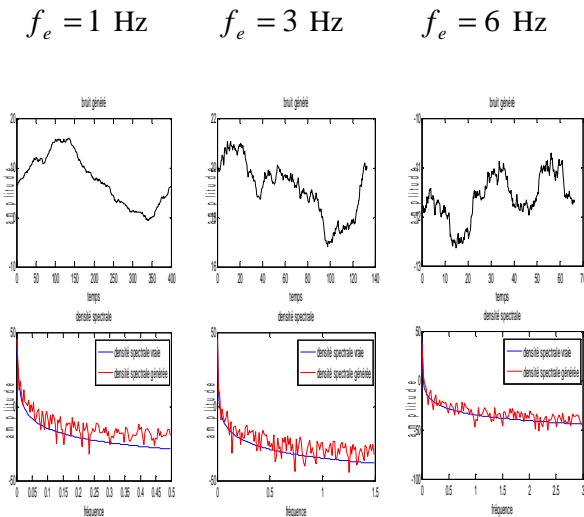


Figure 2 : résultats approche fréquentielle

## 5 Approche temporelle

### 5.1 Principe

L'approche temporelle revient à déterminer un filtre linéaire de gain complexe  $H_1(\nu)$  tel que  $|H_1(\nu)|^2 = \gamma_m(\nu)$  où  $\gamma_m(\nu)$  désigne l'expression modifiée introduite en 3-2. Sans perte de généralité, on peut supposer que la réponse impulsionnelle du filtre est à valeurs réelles, de sorte que le gain complexe est à symétrie hermitienne, c'est-à-dire  $H_1(-\nu) = H_1^*(\nu)$

En écrivant la densité spectrale au moyen de la variable

$$p = j\omega = j2\pi\nu, \text{ on obtient } \gamma_m(p) = \frac{C - Bp^2}{p^4 + D^4}, \text{ les}$$

constantes  $B, C$  et  $D$  étant reliées à  $B_1, C_1$  et  $d$  par  $B = 4\pi^2 B_1$ ,  $C = 16\pi^4 C_1$  et  $D = 2\pi d$

L'expression  $\gamma_m(p)$  est une fonction rationnelle en  $p^2$  qui peut se décomposer sous la forme  $\gamma_m(p) = H_1(p)H_1(-p)$  dans laquelle  $H_1(p)$  est constitué par les termes (numérateur et dénominateur) dont les racines sont à partie réelle strictement négative (ce qui garantit la stabilité du filtre). En l'occurrence, on peut

$$\text{montrer que } H_1(p) = \frac{\sqrt{B} \left( p + \sqrt{\frac{C}{B}} \right)}{(p + d_1)(p + d_1^*)} \text{ avec } d_1 = D e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Pour générer des échantillons de bruit sur ordinateur, on doit raisonner en numérique. On détermine donc un filtre numérique de fonction de transfert  $H_{Z_1}(z)$  tel que la densité spectrale du bruit cherché s'écrive  $\gamma_1(r) = \gamma_{Z_1}(e^{j2\pi r}) = |H_{Z_1}(e^{j2\pi r})|^2$  en faisant intervenir la fréquence réduite  $r = \nu/f_e$ . Plusieurs méthodes permettent de relier la fonction de transfert en  $z$   $H_{Z_1}(z)$  à la fonction de transfert analogique  $H_1(p)$ ,

par exemple la méthode des rectangles [Noback88], la méthode de l'invariance impulsionnelle [Miller12], la méthode de la transformation bilinéaire [Miller12]. On obtient ainsi une fonction de transfert en  $z$  dont les numérateur et dénominateur ont même degré que ceux de la fonction de transfert analogique de départ. Une approche plus générale consiste en la modélisation autorégressive à moyenne adaptée (ARMA) qui permet d'obtenir une fonction de transfert rationnelle en  $z$  dont on peut régler les degrés du numérateur et du dénominateur [Levin60]. Une autre approche consiste à déterminer un processus temporel par transformée de Fourier inverse des spectres d'amplitude et de phase [Hamernik90][Tavares11].

Seule la méthode des rectangles est examinée ici. Cette méthode, appliquée à des densités spectrales de forme particulière (termes avec des puissances fractionnaires), est proposée par Noback, sous une mise en œuvre un peu différente [Noback88]. Le filtre numérique équivalent est donné par  $H_{Z_1}(z) = H_1((1-z^{-1})/T_e)$  avec  $T_e = 1/f_e$  période d'échantillonnage, ce qui conduit à

$$\text{une expression de la forme } H_{Z_1}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

avec

$$b_0 = \frac{T_e(\sqrt{B} + \sqrt{CT_e})}{1 + D\sqrt{2T_e} + D^2 T_e^2}, \quad a_1 = \frac{-(2 + D\sqrt{2T_e})}{1 + D\sqrt{2T_e} + D^2 T_e^2}$$

$$b_1 = \frac{-\sqrt{BT_e}}{1 + D\sqrt{2T_e} + D^2 T_e^2}, \quad a_2 = \frac{1}{1 + D\sqrt{2T_e} + D^2 T_e^2}$$

### 5.2 Exemples de résultats

On se place dans les mêmes conditions que pour l'approche fréquentielle (échantillonnage, durée d'observation, nombre de points calculés pour les densités spectrales, espacement fréquentiel) (cf §4.2).

L'écart entre les densités spectrales vraie  $\gamma(V)$  et générée  $\hat{\gamma}(V)$  peut être mesuré par l'erreur quadratique moyenne, définie par  $E_{mq} = \frac{1}{N_F - 1} \sum_{i=1}^{N_F} |\gamma(V_i) - \hat{\gamma}(V_i)|^2$  où  $N_F$  désigne le nombre de fréquences calculées sur la bande passante d'intérêt, supposée égale à  $F=0.5$  Hz. On a ainsi  $N_F = 1 + \lceil F/\Delta f \rceil$

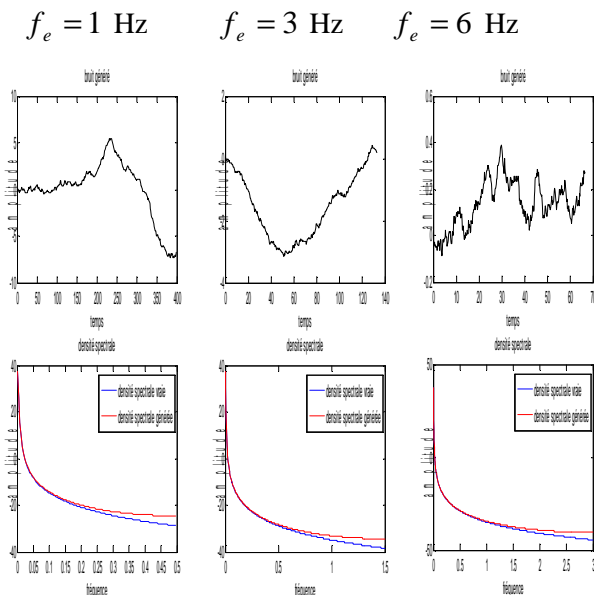


Figure 3 : résultats approche temporelle

Les densités spectrales vraie et générée ont la même allure, mais elles présentent un écart qui croît régulièrement avec la fréquence. L'écart reste limité (inférieur à 1,5 dB) pour des fréquences inférieures à  $f_e/4$  environ, soit 0,25 Hz dans le cas  $f_e= 1$  Hz, 0,75 Hz dans le cas  $f_e= 3$  Hz, 1,5 Hz dans le cas  $f_e= 6$  Hz. L'écart s'accroît nettement au-delà de  $f_e/4$ , jusqu'à atteindre 4 à 5 dB pour des fréquences proches de la fréquence de Nyquist  $f_e/2$ . Cet écart, probablement dû au repliement de spectre, peut être réduit en augmentant la fréquence d'échantillonnage, comme on peut le vérifier sur l'erreur quadratique moyenne, donnée dans le tableau Tab 3 pour les trois fréquences d'échantillonnage considérées.

Tab 3 : erreur quadratique moyenne

Fréquence d'échantillonnage $f_e$ (Hz)	Nombre de fréquences calculées $N_F$	Erreur quadratique moyenne $E_{mq}$ ( $\gamma^2 \text{Hz}^{-1}$ )
1	129	0.4023
3	171	0.3113
6	171	0.0783

## 6 Conclusion

Des méthodes relativement simples et classiques dans les domaines temporel et fréquentiel permettent de générer sur ordinateur un processus aléatoire stationnaire ayant une densité spectrale de puissance donnée. Deux méthodes sont illustrées dans le cas d'un gabarit standard de bruit magnétique, l'une dans le domaine fréquentiel, l'autre dans le domaine temporel.

La méthode fréquentielle, bien qu'elle n'ait pas été explorée en profondeur, semble donner des résultats satisfaisants.

Les méthodes temporelles se prêtent bien à notre application, car la densité spectrale de bruit magnétique est une fonction rationnelle qui peut être factorisée et qui est bien adaptée aux méthodes classiques (rectangles, invariance impulsionnelle, transformation bilinéaire,...). On dispose donc d'outils permettant de générer de façon satisfaisante des échantillons temporels d'un processus ayant la densité spectrale d'un bruit magnétique. Cependant, quelle que soit la méthode considérée ici, rien ne garantit que les variations temporelles du processus généré soient représentatives d'un bruit magnétique, car des processus aléatoires ayant des allures temporelles très différentes peuvent présenter la même densité spectrale.

Une suite possible de l'étude pourrait résider dans la détermination d'échantillons de bruit plus représentatifs de mesures réelles, en se donnant par exemple des contraintes physiques supplémentaires.

## Références

- [Blanpain79] R. BLANPAIN. Traitement en temps réel du signal issu d'une sonde magnétométrique pour la détection d'anomalies magnétiques. Thèse INPG, 1979
- [Hamernik90] K.D. HSUEH, R.P. HAMERNIK. A generalized approach to random noise synthesis: Theory and computer simulation. JASA 87 (3), March 1990
- [Levin60] M.J. LEVIN. Generation of a sampled Gaussian time series having a specified correlation function. IRE Transactions on information theory, vol 6, N° 5, December 1960
- [Miller12] S.L. MILLER, D. CHILDERS Probability and random processes, with applications to signal processing and communications, Elsevier 2012
- [Noback88] R. NOBACK. The generation of a random process with a spectrum with fractional power. National Aerospace Laboratory NLR. The Netherlands, 15 Nov 88.
- [Tavares11] G.N. TAVARES, A. PETROLINO. On the generation of correlated gaussian random variables by inverse DFT. IEEE Transactions on communications, vol 59, N° 1, January 2011