

Allocation de débit à faible complexité dans les systèmes OFDM en présence de contraintes spectrales

Thanh Nhan VO¹, Karine AMIS¹, Thierry CHONAVEL¹, Pierre SIOHAN²

¹Telecom Bretagne / UMR CNRS 6285 Lab-STICC, Brest, France

²Orange Labs, Rennes, France

thanh.vo@telecom-bretagne.eu, karine.amis@telecom-bretagne.eu
thierry.chonavel@telecom-bretagne.eu, pierre.siohan@orange.com

Résumé – Cet article traite de la maximisation du débit dans les systèmes OFDM soumis à des contraintes de limitation de la puissance. Nous proposons un algorithme d'allocation glouton dans lequel le vecteur de bits initial est la discrétisation par arrondi de la solution "Water-Filling" du problème continu associé. Nous montrons théoriquement que ce vecteur est "efficace", c'est-à-dire qu'il n'existe pas de mouvement d'un bit d'une sous-porteuse à l'autre qui réduise la puissance totale utilisée. Les résultats de simulation montrent l'efficacité de l'algorithme proposé : le débit réalisable est maximisé avec une réduction significative du coût de calcul par rapport à des algorithmes de référence de la littérature.

Abstract – This paper deals with throughput maximization in OFDM systems subject to spectral-compatibility limits. We propose a greedy-based loading algorithm where the initial bit vector is obtained by rounding the "water-filling" solution of the associated continuous-input problem. We theoretically prove that it is an efficient bit vector i.e., there is no movement of a bit from one subcarrier to another that reduces the total used power. Simulation results show the efficiency of the proposed algorithm: the achievable throughput is maximized with significant reduction of computation cost as compared to reference algorithms of the literature.

1 Introduction

Dans les systèmes de transmissions filaires de type OFDM (orthogonal frequency division multiplexing) tels que ADSL (asymmetric digital subscriber line) et PLC (powerline communication), des contraintes de puissance spectrale sont souvent imposées par les normes pour assurer la compatibilité électro-magnétique avec les autres systèmes de transmission [1, 2]. Les principales contributions relatives à l'allocation discrète de bits sur les sous-porteuses sous contraintes de puissance peuvent être trouvées dans [3], [4] et [5].

Dans la référence [3], l'optimisation de l'allocation est réalisée en partant de la solution du problème continu. Cependant, l'optimalité de l'algorithme proposé dans cet article n'est pas établie. Dans la référence [4], il est montré que l'algorithme glouton conventionnel (i.e. initialisé avec une puissance allouée nulle) permet d'obtenir l'optimum global du problème. Il apparaît que sa complexité est une fonction croissante de la puissance totale disponible. A la différence de cette approche itérative incrémentale, une approche par décrémentation de la puissance totale allouée est proposée dans [5]. Sa complexité est une fonction décroissante de la puissance totale disponible.

La contribution de cet article est la proposition d'un nouvel algorithme d'optimisation du débit réalisable sous

contraintes de puissance dans des systèmes OFDM. Afin de minimiser le coût de calcul on propose une allocation initialisée par la discrétisation de la solution fournie par l'algorithme d'allocation continue de Water Filling (WF). Il est en effet important pour être en mesure d'assurer une allocation dynamique de puissance parmi un grand nombre de sous-porteuses en présence de canaux qui fluctuent rapidement de pouvoir réaliser cette opération avec un coût de calcul raisonnable.

On démontre que cette initialisation, couplée à un algorithme glouton, permet d'obtenir l'optimum global du problème. Outre cette preuve théorique d'optimalité, on vérifie, et c'est l'intérêt essentiel de la procédure proposée, qu'elle permet d'améliorer les temps de calcul obtenus avec l'algorithme glouton conventionnel, basé sur l'ajout de bits d'information [4], l'algorithme glouton basé sur l'élimination de bits d'information et l'algorithme rapide sous-optimal proposé dans [3], quelle que soit la puissance totale disponible.

L'article est organisé comme suit : la formulation du problème est détaillée dans la section 2 ; la solution proposée est présentée en section 3 et sa comparaison avec les méthodes évoquées ci-dessus est présentée en section 4. Les annexes fournissent des indications sur la démonstration de l'optimalité de la méthode.

2 Allocation discrète de débit

Dans un système OFDM sans interférence, l'allocation discrète de débit sous contrainte de gabarit spectral est décrite par le problème (1), où b_n et P_n représentent le nombre de bits et la puissance alloués à la sous-porteuse d'indice n ; A_{max} est le nombre maximum de bits que l'on peut allouer à une sous-porteuse et est déterminé par l'ordre de la plus grande modulation autorisée pour le système; g_n représente le rapport du gain de canal à bruit; le coefficient $\Gamma \geq 1$ permet de prendre en compte l'écart existant entre la capacité théorique et le débit effectivement réalisable par les modulations. Il est souvent pris en compte dans les algorithmes d'allocation de débit [3, 4, 5, 6].

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } \sum_n b_n \\ & \text{sous } b_n \leq A_{max} \mid b_n \in \mathbb{N} \\ & b_n \leq c_n = \log_2 \left(1 + \frac{g_n P_n}{\Gamma} \right) \\ & \sum_n P_n \leq P_{tot}, P_n \leq P_n^{max} \end{aligned} \quad (1)$$

Notons

$$\begin{aligned} b_{max}(n) &= \lfloor \log_2 \left(1 + \frac{g_n P_n^{max}}{\Gamma} \right) \rfloor, \\ b_{max}^r(n) &= \min(A_{max}, b_{max}(n)), \\ P_{max}^r(n) &= \frac{(2^{b_{max}^r(n)} - 1)\Gamma}{g_n} \leq P_n^{max} \end{aligned} \quad (2)$$

(où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction d'arrondi à la valeur entière inférieure) le nombre maximum de bits autorisés sur la sous-porteuse n compte tenu des contraintes spectrales, le nombre maximum de bits, et la puissance maximale correspondants. Le problème (1) peut se réécrire

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } \sum_n b_n \\ & \text{sous } b_n \leq c_n = \log_2 \left(1 + \frac{g_n P_n}{\Gamma} \right), b_n \in \mathbb{N} \\ & \sum_n P_n \leq P_{tot}, P_n \leq P_{max}^r(n) \end{aligned} \quad (3)$$

Le problème d'optimisation continu correspondant à (3) est

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } \sum_n c_n \\ & \text{sous } \sum_n P_n \leq P_{tot}, P_n \leq P_{max}^r(n) \end{aligned} \quad (4)$$

La référence [3] étudie le problème (4) dont la solution est obtenue en résolvant

$$f(S_1) = \sum_n \underbrace{\left[S_1 - \frac{\Gamma}{g_n} \right]_0^{P_{max}^r(n)}}_{P_n^{WF}(S_1)} - P_{tot} = 0 \quad (5)$$

où

$$[x]_0^p = \begin{cases} p & x \geq p \\ x & 0 < x < p \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Dans [3], deux méthodes ont été proposées pour résoudre (5) : soit l'algorithme exact "Iterative Water-filling" (IWF) avec une complexité de l'ordre du carré du nombre de sous-porteuses, soit l'algorithme "Secant-based" qui cherche une solution approchée de (5), avec une complexité totale linéaire vis-à-vis du nombre de sous-porteuses.

3 Algorithme proposé

3.1 Analyse

Le "Water Filling" fournit la solution exacte du problème (4) :

$$\begin{cases} P_n^{WF}(S_1) &= \left[\left(S_1 - \frac{\Gamma}{g_n} \right) \right]_0^{P_{max}^r(n)} \\ c_n^{WF}(S_1) &= \log_2 \left(1 + \frac{P_n^{WF}(S_1) g_n}{\Gamma} \right) = \left[(\log_2(g_n) + S_2) \right]_0^{b_{max}^r(n)} \end{cases} \quad (7)$$

où S_1 est la racine de (5) et $S_2 = \log_2(S_1/\Gamma)$.

Son arrondi à l'unité le plus proche est noté

$b_n^{WFR} = \text{round}(c_n^{WF}(S_1))$, avec

$$\text{round}(x) = n \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x - n < \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

Notons \mathbf{b}^{WFR} le vecteur de composantes b_n^{WFR} et \mathbf{P}^{WFR} la puissance allouée correspondante :

$$P_n^{WFR} = \frac{(2^{b_n^{WFR}} - 1)\Gamma}{g_n} \leq P_n^{WF}(S_1) \quad (9)$$

Dans la référence [7], Campello a introduit la notion de vecteur efficace d'allocation. Un vecteur de bits d'information est dit efficace si pour toute paire de sous-porteuses, la permutation d'un bit d'information entre ces sous-porteuses correspond à une augmentation de la puissance allouée correspondante. Il a été établi dans [4] que l'algorithme glouton conduit à la solution optimale du problème (1) et que le vecteur de bits alloué reste efficace à chaque itération. En vue de simplifier cet algorithme au moyen d'une initialisation plus judicieuse nous avons établi le résultat suivant :

Théorème 1. \mathbf{b}^{WFR} est un vecteur d'allocation de débit efficace.

Démonstration. Voir l'annexe A. □

3.2 Algorithme WFR-GBL

Sur la base du résultat précédent, nous proposons l'algorithme d'allocation ci-dessous qui résout le problème (1). Nous avons nommé cet algorithme "Water-filling rounding Greedy-based bit loading (WFR-GBL)". Par ailleurs, on

se référera aux algorithmes de [3], [4] and [5] par les sigles respectifs BFB (d'après le nom des auteurs de [3]), Z-GBA ("Greedy-based bit-adding" avec initialisation à 0), M-GBR ("Greedy-based bit-removing" avec initialisation maximale). L'algorithme WFR-GBL proposé converge vers l'optimum global du problème (1). Sa démonstration repose sur le résultat suivant :

- 1 Calculer \mathbf{b}_{max} , \mathbf{b}_{max}^r , \mathbf{P}_{max}^r comme dans (2);
- 2 Calculer $P_{tot}^r = \sum_n P_{max}^r(n)$;
- si $P_{tot}^r \leq P_{tot}$ alors
- 3 $b(n) = b_{max}^r(n)$;
- 4 $P(n) = P_{max}^r(n)$;
- sinon
- 5 Résoudre Eq. (5) [3] $\rightarrow S_1$ et $S_2 = \log_2(\frac{S_1}{T})$;
- 6 Calculer $b_n^{WFR} = \text{round}\left(\left[\left(\log_2(g_n) + S_2\right)\right]_0^{b_{max}^r(n)}\right)$,
- $P_n^{WFR} = \frac{(2^{b_n^{WFR}} - 1)\Gamma}{g_n}$ and $P_{use} = \sum_n P_n^{WFR}$;
- si $P_{use} \leq P_{tot}$ alors
- 7 Utiliser l'algorithme glouton d'addition (cf. [4]);
- sinon
- 8 Utiliser l'algorithme glouton d'élimination (cf. [4]);

Algorithme 1: Pseudocode de l'algorithme WFR-GBL.

Théorème 2. Soient \mathbf{b}^e et \mathbf{b}^f deux vecteurs efficaces et \mathbf{P}^e et \mathbf{P}^f les puissances allouées correspondantes. Alors,

$$\|\mathbf{P}^e\|_1 \geq \|\mathbf{P}^f\|_1 \Leftrightarrow \mathbf{b}^e \geq \mathbf{b}^f \text{ (composante par composante)} \quad (10)$$

Démonstration. Voir l'annexe B. \square

On en déduit la convergence de l'algorithme WFR-GBL :

Théorème 3. L'algorithme WFR-GBL proposé converge vers l'optimum global du problème (1).

Démonstration. Voir l'annexe C. \square

4 Résultats de simulations

Les résultats de simulations ont été obtenus pour un système PLC avec les paramètres suivants :

- canal PLC de classe 2 [8] en présence de bruit gaussien coloré [9].
- nombre de sous-porteuses disponibles $N = 917$.
- nombre de bits par sous-porteuse entre de 1 à 12.
- $P_n^{max} = 1$, $\forall n \in \{1, 2, \dots, N\}$ (normalisée par rapport à $P_0\Delta f$ où $P_0 = -55$ dBm (1 Hz) est le masque spectral du standard IEEE P1901 et Δf l'espacement des sous-porteuses).
- P_{tot} (normalisée à $P_0\Delta f$) variant de 10 à 900.
- $\Gamma = 7$, pour un taux d'erreur symbole cible de 10^{-5} [6].
- nombre de canaux simulés : 1000.

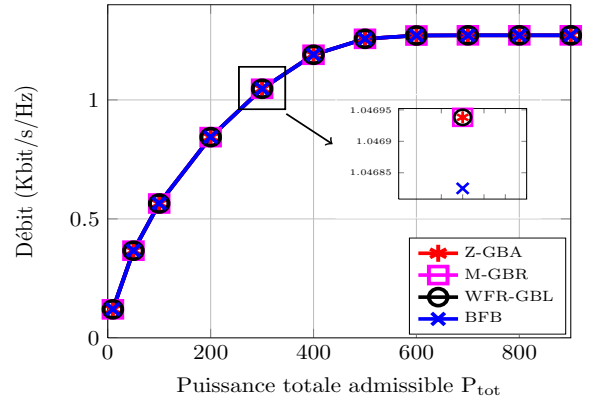


FIGURE 1 – Comparaison du débit réalisable.

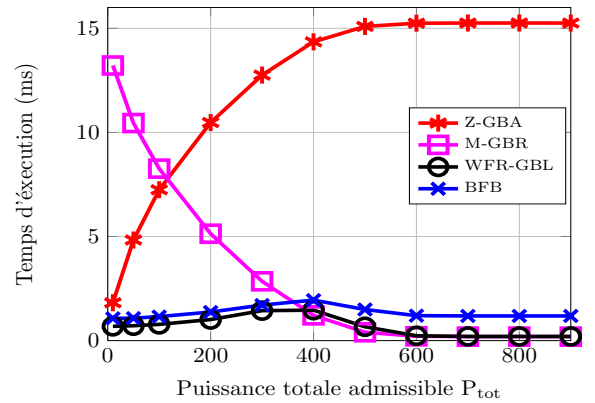


FIGURE 2 – Comparaison du temps d'exécution.

	Nombre d'opérations	Temps d'exécution (ms)	Temps (relative)
Z-GBA	962.25	11.60	16.8
M-GBR	331.37	3.85	5.6
BFB	126.35	1.32	1.9
WFR-GBL	70.76	0.69	1

TABLE 1 – Performance moyennée pour $P_{tot} \in [10, 900]$.

On teste les algorithmes WFR-GBL, Z-GBA, M-GBR et BFB. La figure 1 montre le débit obtenu avec les quatre algorithmes. On vérifie que l'algorithme WFR-GBL proposé atteint la valeur optimale, fournie par les algorithmes Z-GBA et M-GBR. On a également vérifié que la puissance allouée est la même pour les trois algorithmes.

Les comparaisons du nombre d'opérations moyen par sous-porteuse (la formule analytique n'est pas développée ici, limite de place) et du temps d'exécution (CPU 2x2.7 GHz, 4 Go de RAM et Matlab 2009) des algorithmes sont présentées sur la figure 2. Le nombre d'opérations moyen et aussi le temps d'exécution de l'algorithme WFR-GBL sont toujours inférieurs à celui du BFB qui est pourtant un algorithme sous-optimum. Le coût devient très faible vis-à-vis de celui du M-GBR pour de faibles puissances disponibles et vis-à-vis de celui du Z-GBA pour des puissances

disponibles élevées. Ces deux indicateurs de performance sont résumés dans le tableau 1.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé un algorithme de faible complexité, nommé WFR-GBL pour résoudre le problème de l'allocation de débit sous contraintes de puissance. L'optimalité a été établie théoriquement et vérifiée par simulation. Les simulations de Monte Carlo menées sur des canaux PLC ont de plus permis de montrer ses très bonnes performances en terme de vitesse d'exécution.

Annexe A. Preuve du théorème 1

Notons b_1^{WFR} et b_2^{WFR} les nombres de bits pour deux sous-porteuses distinctes. On supposera sans perte de généralité que $\Delta b = b_1^{WFR} - b_2^{WFR} \geq 0$. Comme $m = \text{round}(x) \Leftrightarrow m - 1/2 \leq x < m + 1/2$,

$$\Rightarrow b_1^{WFR} - 1/2 - (b_2^{WFR} + 1/2) < c_1^{WF} - c_2^{WF} < b_1^{WFR} + 1/2 - (b_2^{WFR} - 1/2) \quad (11)$$

$$\Rightarrow \Delta b - 1 < \log_2(g_1) + S_2 - (\log_2(g_2) + S_2) < \Delta b + 1 \quad (12)$$

$$\Rightarrow 2^{\Delta b - 1} < \frac{g_1}{g_2} < 2^{\Delta b + 1} \quad (13)$$

- La puissance requise pour ajouter un bit à la sous-porteuse 1 et la puissance gagnée en retirant un bit sur la sous-porteuse 2 sont $\Delta P_{b_1^{WFR} \rightarrow b_1^{WFR} + 1}^\uparrow = \frac{2^{b_1^{WFR}} \Gamma}{g_1}$ et $\Delta P_{b_2^{WFR} \rightarrow b_2^{WFR} - 1}^\downarrow = \frac{2^{b_2^{WFR} - 1} \Gamma}{g_2}$. D'après (13), $\frac{g_1}{g_2} < 2^{\Delta b + 1} \Rightarrow \Delta P_{b_1^{WFR} \rightarrow b_1^{WFR} + 1}^\uparrow > \Delta P_{b_2^{WFR} \rightarrow b_2^{WFR} - 1}^\downarrow$.
- De même, comme $\frac{g_1}{g_2} > 2^{\Delta b - 1}$ d'après (13), on a $\Delta P_{b_2^{WFR} \rightarrow b_2^{WFR} + 1}^\uparrow > \Delta P_{b_1^{WFR} \rightarrow b_1^{WFR} - 1}^\downarrow$.

Il n'y a aucun mouvement possible d'un bit entre deux sous-porteuses qui réduise la puissance totale requise. Ainsi, \mathbf{b}^{WFR} est un vecteur d'allocation de bits efficace.

Annexe B. Preuve du théorème 2

La condition suffisante, i.e., $\mathbf{b}^e \geq \mathbf{b}^f \Rightarrow \|\mathbf{P}^e\|_1 \geq \|\mathbf{P}^f\|_1$, provient du fait que la puissance allouée à une sous-porteuse augmente avec le nombre de bits, i.e., $\mathbf{b}^e \geq \mathbf{b}^f$ (inégalité composante par composante) $\Rightarrow \mathbf{P}^e \geq \mathbf{P}^f$ et donc $\|\mathbf{P}^e\|_1 \geq \|\mathbf{P}^f\|_1$.

Pour la condition nécessaire (si \mathbf{b}^e and \mathbf{b}^f sont deux vecteurs efficaces et $\|\mathbf{P}^e\|_1 \geq \|\mathbf{P}^f\|_1$ alors $\mathbf{b}^e \geq \mathbf{b}^f$), on utilise une démonstration par l'absurde.

Supposons que $\|\mathbf{P}^e\|_1 \geq \|\mathbf{P}^f\|_1$ et $\exists n_0 : b_{n_0}^e < b_{n_0}^f$. Si $\forall n \neq n_0, b_n^e \leq b_n^f$, alors $\|\mathbf{P}^e\|_1 < \|\mathbf{P}^f\|_1$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc, $\exists n_1 : b_{n_1}^e > b_{n_1}^f$ et

$$b_{n_0}^e < b_{n_0}^f \Rightarrow b_{n_0}^e \leq b_{n_0}^f - 1 \quad (14)$$

$$\Rightarrow \Delta P_{b_{n_0}^e \rightarrow b_{n_0}^e + 1}^\uparrow = \frac{2^{b_{n_0}^e} \Gamma}{g_{n_0}} \leq \frac{2^{b_{n_0}^f - 1} \Gamma}{g_{n_0}} = \Delta P_{b_{n_0}^f \rightarrow b_{n_0}^f - 1}^\downarrow \quad (15)$$

$$b_{n_1}^e > b_{n_1}^f \Rightarrow b_{n_1}^e \geq b_{n_1}^f + 1 \quad (16)$$

$$\Rightarrow \Delta P_{b_{n_1}^e \rightarrow b_{n_1}^e - 1}^\downarrow = \frac{2^{b_{n_1}^e - 1} \Gamma}{g_{n_1}} \geq \frac{2^{b_{n_1}^f} \Gamma}{g_{n_1}} = \Delta P_{b_{n_1}^f \rightarrow b_{n_1}^f + 1}^\uparrow \quad (17)$$

Comme \mathbf{b}^f est un vecteur efficace, $\Delta P_{b_{n_1}^f + 1 \rightarrow b_{n_1}^f}^\uparrow > \Delta P_{b_{n_0}^f \rightarrow b_{n_0}^f - 1}^\downarrow$.

Alors, d'après (15) et (17), on a $\Delta P_{b_{n_0}^e \rightarrow b_{n_0}^e + 1}^\uparrow < \Delta P_{b_{n_1}^f \rightarrow b_{n_1}^f - 1}^\downarrow$ ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle " \mathbf{b}^e est un vecteur efficace".

Finalement, $b_n^e \geq b_n^f, \forall n$, i.e., $\mathbf{b}^e \geq \mathbf{b}^f$ (composante par composante).

Annexe C. Preuve du théorème 3

On considère deux cas : i) $P_{tot}^r \leq P_{tot}$ et ii) $P_{tot}^r > P_{tot}$.

Dans le cas i), la contrainte de puissance totale est remplie. Donc, $P_n = P_{max}^r(n)$ et $b_n = b_{max}^r(n)$ représente l'allocation optimale. Dans le cas ii), il faut considérer deux sous cas : ii-1) $\|\mathbf{P}^{WFR}\|_1 \leq P_{tot}$ et ii-2) $\|\mathbf{P}^{WFR}\|_1 > P_{tot}$.

Pour le cas ii-1), l'algorithme Z-GBA est appliqué et sa solution \mathbf{b}^{op} vérifie $\mathbf{0} < \mathbf{b}^{WFR} \leq \mathbf{b}^{op}$. Comme \mathbf{b}^{WFR} est un vecteur efficace et que cette propriété est maintenue à chaque itération de l'algorithme Z-GBA, \mathbf{b}^{WFR} est un vecteur intermédiaire de l'algorithme Z-GBA. Donc dans ce cas l'algorithme WFR-GBL converge vers l'optimum global, comme le Z-GBA.

Pour le cas ii-2), $\|\mathbf{P}_{max}^r\|_1 \geq \|\mathbf{P}^{WFR}\|_1 \geq P_{tot} \geq \|\mathbf{P}^{op}\|_1$ et d'après le théorème 2, $\mathbf{b}_{max}^r \geq \mathbf{b}^{WFR} \geq \mathbf{b}^{op}$. l'algorithme M-GBR fournit à chaque itération un vecteur efficace. On en déduit comme pour le cas i-1) que \mathbf{b}^{WFR} est un vecteur intermédiaire efficace du M-GBR et que là l'algorithme WFR-GBL converge vers l'optimum global.

Références

- [1] IEEE Std 1901-2012, "IEEE Standard for Broadband over Power Line Networks : Medium Access Control and Physical Layer Specification."
- [2] ANSI Std. T1.413-1998, "Asymmetric digital subscriber line (ADSL) metallic interface."
- [3] E. Baccarelli, A. Fasano, and M. Biagi, "Novel efficient bit-loading algorithms for peak-energy-limited ADSL-Type multicarrier systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50(5), pp. 1237-1247, 2002.
- [4] E. Baccarelli and M. Biagi, "Optimal integer bit-loading for multicarrier ADSL systems subject to spectral-compatibility limits," *Signal Processing (EURASIP)*, vol. 84(4), pp. 729-741, 2004.
- [5] N. Papandreou and T. Antonakopoulos, "Bit and power allocation in constrained multicarrier systems : The single-user case," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2008.
- [6] J. M. Cioffi, "A multicarrier primer," <http://www.stanford.edu/group/cioffi/documents/multicarrier.pdf>, 2006, [Online].
- [7] J. Campello, "Optimal discrete bit loading for multicarrier modulation systems," *Proc. IEEE ISIT*, p. 193, 1998.
- [8] M. Tonello, F. Versolatto, B. Bejar, and S. Zazo, "A fitting algorithm for random modeling the PLC channel." *IEEE Trans. Pow. Del.*, vol. 27(3), pp. 1477-1484, 2012.
- [9] R. Hashmat, P. Pagani, and T. Chonavel, "Analysis and modeling of background noise for inhome MIMO-PLC channels," *Proc. IEEE ISPLC 2012*, pp. 316-321, 2012.