

Sur la génération de schémas d'échantillonnage compressé en IRM

Pierre WEISS¹, Nicolas CHAUFFERT², Claire BOYER³, Jonas KAHN⁴, Philippe CIUCIU²

¹ITAV (USR3505) et IMT (UMR5219), Université de Toulouse, CNRS.

²CEA Neurospin & INRIA Saclay, Parietal team.

³IMT (UMR5219), Université de Toulouse, CNRS.

⁴LPP (UMR8524), Université de Lille, CNRS.

pierre.weiss@itav.fr, nicolas.chauffert@inria.fr, Claire.Boyer@math.univ-toulouse.fr,
jonas.kahn@math.univ-lille1.fr, philippe.ciuciu@cea.fr

Résumé – Cet article a deux finalités. Premièrement, nous proposons un état de l'art des théories d'échantillonnage compressé pour l'Imagerie par résonance magnétique (IRM). Ceci nous permet de dégager quelques grands principes à suivre pour générer des schémas performants en termes de temps d'acquisition et de qualité de reconstruction. Dans une deuxième partie, nous proposons une méthodologie originale de conception de schémas qui repose sur des algorithmes de projection de densités sur des espaces de mesures. Nous proposons finalement des comparaisons avec des stratégies actuelles d'échantillonnage sur des simulations et montrons ainsi le bien-fondé de notre approche.

Abstract – This article contains two contributions. First, we describe the state-of-the-art theories in compressed sensing for Magnetic Resonance Imaging (MRI). This allows us to bring out important principles that should guide the generation of sampling patterns. Second, we describe an original methodology to design efficient sampling schemes. It consists of projecting a sampling density on the space of feasible measures for MRI. We end up by proposing comparisons to current sampling strategies on simulated data. This illustrates the well-foundedness of our approach.

1 Introduction

La génération de schémas d'échantillonnage compressé efficaces en Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) est une question qui reste aujourd'hui largement ouverte d'un point de vue théorique et applicatif. A notre connaissance, la majorité des méthodes implémentées actuellement sur des imageurs repose sur le bon sens, mais n'a pas de fondements mathématiques solides. Ceci s'explique par la grande diversité des modalités d'IRM (anatomique, fonctionnelle, parallèle,...), la complexité des contraintes d'acquisition et des images, ainsi que les nombreuses difficultés mathématiques pour produire une théorie unifiée capable de prendre en compte ces différents aspects. Il nous semble qu'il est encore possible d'obtenir des gains significatifs en terme de temps d'échantillonnage ou de résolution spatio-temporelle. Ceci aurait des conséquences très importantes pour la médecine et la biologie.

Dans une série de travaux récents [2, 4, 8, 10, 3], nous avons proposé de nouvelles idées pour combler une partie de ces lacunes. Bien que beaucoup de questions restent en suspens, ces travaux nous ont permis d'acquérir une bonne intuition des lignes à suivre pour générer des schémas performants. L'objectif de cet article est i) de résumer les conclusions principales de ces travaux et ii) de proposer une technique de génération de schémas d'échantillonnage originale suivant ces principes.

2 Notations

Dans ce travail, nous considérons une image $u \in L^2(\Omega)$ à valeurs dans \mathbb{C} . Nous supposons pour simplifier la discussion que $\Omega = [0, 1]^d$ avec $d = 2$ ou $d = 3$. La transformée de Fourier d'une image u est notée \hat{u} . Les images discrétisées sont notées en gras $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, où n représente le nombre de pixels ou de voxels. La matrice de la transformée de Fourier discrète est notée $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. On suppose de plus que les images sont compressibles avec une certaine transformée $\Psi \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dans les expériences numériques, la transformée Ψ est une transformée en ondelettes orthogonale. La compressibilité signifie que l'essentiel de l'énergie de \mathbf{u} est concentré dans un petit nombre de coefficients de la transformée $\Psi^* \mathbf{u}$. L'espace \mathcal{M} désigne l'ensemble des mesures de probabilité sur Ω . L'espace Δ_n est le simplexe de \mathbb{R}^n .

3 Etat de l'art

3.1 Echantillonnage en IRM

L'IRM permet de mesurer un ensemble de valeurs de la transformée de Fourier d'une image u .¹ Les valeurs de la transformée de Fourier sont acquises le long d'une courbe paramétrée

1. Ceci est vrai de façon conventionnelle, cependant, on peut modifier la signification des mesures en utilisant des pulses radio-fréquence particuliers

$s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui doit appartenir à un certain ensemble de contraintes de faisabilité \mathcal{S}_T [10]. Par exemple, dans le cas où l'acquisition est obtenue à partir d'une seule excitation radio-fréquence, la courbe s doit appartenir à l'ensemble suivant :

$$\mathcal{S}_T = \{s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d, \|\dot{s}\|_\infty \leq \alpha, \|s\|_\infty \leq \beta\}. \quad (1)$$

Les paramètres α et β dépendent de l'imager. Si l'acquisition se fait à partir de plusieurs excitations radio-fréquences, s appartient à des produits cartésiens de l'ensemble \mathcal{S}_T .

Après une acquisition en IRM, on a donc accès à l'ensemble E de mesures :

$$E = \left\{ \hat{u}(s(i\Delta t)), 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor \right\} \quad (2)$$

où $\Delta t > 0$ décrit la période d'échantillonnage de la courbe s . Dans ce papier, nous négligeons les dégradations de mesures liées au bruit ou aux inhomogénéités des champs magnétiques.

Maintenant que les possibilités d'une IRM sont posées, nous pouvons présenter les questions typiques qui se posent en échantillonnage pour l'IRM. A T fixé comment trouver une courbe $s \in \mathcal{S}_T$ optimale, au sens où elle permet d'obtenir la reconstruction la plus fidèle ? Quel est le temps d'acquisition T minimal qui permette d'obtenir une précision de reconstruction donnée ? Comment reconstruire les images connaissant E ?

Ces questions semblent extrêmement complexes mathématiquement, ce qui explique la prédominance d'heuristiques [13] dans la littérature. Dans la suite, nous présentons quelques résultats théoriques qui permettent tout de même de guider la conception d'une trajectoire.

3.2 Echantillonnage compressé usuel

Dans cette partie, nous décrivons la théorie de l'échantillonnage compressé telle qu'elle a été posée dans les papiers fondateurs [7] et plus récemment [6]. Les auteurs considèrent une matrice orthogonale $\mathbf{A}_0 = [\mathbf{a}_1^*; \dots; \mathbf{a}_n^*]$ où les vecteurs \mathbf{a}_i^* sont les lignes du dictionnaire (le séparateur ; indique une concaténation verticale). Ils proposent de construire une matrice de mesure aléatoire $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{J_1}^*; \dots; \mathbf{a}_{J_m}^*]$ où les quantités $J_k \in \{1, \dots, n\}$ sont des variables aléatoires i.i.d. uniformes. Connaissant $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, les auteurs proposent de reconstruire une estimée $\bar{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} en résolvant le problème ℓ_1 suivant :

$$\bar{\mathbf{x}} \in \underset{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}}{\text{Argmin}} \|\mathbf{x}\|_1$$

Le type de théorème qu'ils obtiennent dans [6] est de la forme suivante².

Théorème 1. *Supposons que \mathbf{x} est s -parcimonieux, i.e. qu'il ne contient que s composantes non nulles parmi n . Si le nombre*

[11], l'IRM parallèle [12] ou encore en modifiant l'utilisation des correcteurs de champs magnétiques [14].

2. Notez que nous ne parlons à aucun moment de Restricted Isometry Property (RIP). Ce type de notion est très répandu car il permet la reconstruction de tous les signaux s -parcimonieux. Cette propriété - bien que très plaisante - est extrêmement exigeante. Il nous semble clair qu'elle doit être abandonnée à l'avenir pour obtenir des résultats théoriques convaincants en IRM.

de mesures m satisfait :

$$m \geq Cs \left(n \max_{1 \leq k \leq n} \|\mathbf{a}_k\|_\infty^2 \right) \log \left(\frac{n}{\epsilon} \right),$$

où $C > 0$ est une constante universelle, alors $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ avec probabilité $1 - \epsilon$.

Ce théorème et tous ceux annoncés dans le papier peuvent de plus être étendus au cas de données bruitées en relaxant la contrainte $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. La cohérence [6], $\kappa(\mathbf{A}_0) = n \max_{1 \leq k \leq n} \|\mathbf{a}_k\|_\infty^2$ est comprise entre 1 et n . En particulier, $\kappa(\mathbf{F}) = 1$ et $\kappa(\mathbf{Id}) = n$. Dans le cas favorable de la transformée de Fourier, ce théorème indique donc qu'il suffit d'environ $s \log \left(\frac{n}{\epsilon} \right)$ mesures pour obtenir une reconstruction exacte d'un signal s -parcimonieux.

Bien que ce type de théorème ait eu un impact énorme dans la littérature, il n'est pas applicable en IRM. En effet, la transformée naturelle en IRM est $\mathbf{A}_0 = \mathbf{F}^*\Psi$, i.e. le produit d'une transformée de Fourier et d'une transformée en ondelettes. On peut montrer que $\kappa(\mathbf{F}^*\Psi) = O(n)$.

3.3 Les avancées récentes

Dans cette partie, nous indiquons les avancées récentes en échantillonnage compressé qui nous semblent les plus importantes. Des omissions sont possibles car une telle entreprise contient nécessairement une bonne dose de subjectivité.

3.3.1 Echantillonnage à densité variable

Dans la majorité des applications réelles, les transformées à utiliser sont cohérentes. C'est notamment le cas de l'IRM. Une technique possible pour briser la cohérence consiste à tirer les échantillons cohérents plus souvent. Précisons cette idée. Soit $\pi \in \Delta_n$ la distribution des variables aléatoires J_k . Le théorème suivant [8] justifie l'utilisation d'échantillonnage à densité variable. Notons que cette technique est la base (non justifiée) de l'article fondateur [13].

Théorème 2. *Supposons que \mathbf{x} est s -parcimonieux, i.e. qu'il ne contient que s composantes non nulles parmi n . Posons $\pi_k = \frac{\|\mathbf{a}_k\|_\infty^2}{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\|_\infty^2}$. Si le nombre de mesures m satisfait :*

$$m \geq Cs \left(\sum_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\|_\infty^2 \right) \log \left(\frac{n}{\epsilon} \right),$$

où $C > 0$ est une constante universelle, alors $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ avec probabilité $1 - \epsilon$.

On peut montrer que pour le cas de l'IRM (i.e. $\mathbf{A}_0 = \mathbf{F}^*\Psi$), $\sum_{i=1}^n \|\mathbf{a}_i\|_\infty^2 \propto \log(n)$. Ainsi, il suffit de $O(s \log(n)^2)$ coefficients de Fourier pour pouvoir reconstruire exactement une image s -parcimonieuse.

3.3.2 Parcimonie structurée

Bien que le théorème (2) soit plutôt attrayant théoriquement, des expériences numériques [1] montrent qu'il est encore insuffisant pour une application en IRM : les constantes apparaissant dans les O sont en effet grandes, et même le terme $\log(n)^2$

n'est pas négligeable en pratique. Une avancée récente qui nous semble importante est le papier [1]. Les auteurs montrent qu'il est possible d'exploiter une parcimonie structurée (e.g. plus de coefficients d'ondelettes non nuls dans les sous-bandes correspondant aux basses fréquences) pour obtenir de meilleures garanties théoriques. Nous ne décrivons pas les théorèmes résultants par manque de place. Ils permettent cependant d'obtenir deux conclusions importantes. Premièrement, il faut utiliser des schémas d'échantillonnage à densité variable comme dans le paragraphe précédent. Les densités doivent dépendre à la fois de la cohérence locale $\|\mathbf{a}_k\|_\infty$ et de l'a priori qu'on se donne sur le support de \mathbf{x} . Deuxièmement, comme la parcimonie est asymptotique (elle n'apparaît que dans les sous-bandes hautes-fréquences), l'acquisition comprimée en IRM peut difficilement être utilisée comme une technique pour gagner du temps. Elle permet par contre - à temps d'acquisition constant - d'obtenir de meilleures résolutions spatiales.

3.3.3 Acquisition structurée

Tous les résultats donnés jusqu'à présent ne contiennent aucune notion de structure dans l'acquisition. Ils ne sont donc pas applicables en pratique. A notre connaissance, les seuls travaux commençant à proposer des solutions d'échantillonnage plausibles et justifiées théoriquement sont [8, 3].

Dans [8] nous avons d'abord proposé une définition générale précise de ce qu'est un échantillonneur à densité variable : c'est un processus dont la mesure empirique converge vers une densité cible quand le temps tend vers l'infini. Nous avons analysé l'utilisation de tels échantillonneurs théoriquement et en avons déduit deux propriétés essentielles pour qu'ils permettent des reconstructions précises :

1. La *mesure empirique* du processus doit correspondre à une mesure cible, i.e. il faut effectuer un échantillonnage à densité variable.
2. Le processus ne sera efficace que si son *temps de mélange* (i.e. sa rapidité à converger vers la densité cible) est faible.

Ces résultats indiquent qu'un bon échantillonneur doit i) couvrir l'espace rapidement (temps de mélange) ii) avoir une densité cible fixée et iii) appartenir à un ensemble admissible pour l'IRM. Ces conclusions sont très proches des travaux plus heuristiques menés par les leaders mondiaux en échantillonnage compressé pour l'IRM [15]. Dans la suite de ce travail, nous proposons un algorithme original permettant de générer de tels schémas automatiquement.

4 Génération automatique de schémas d'échantillonnage

Nous supposons connue une densité cible $\pi \in \mathcal{M}$. Celle-ci peut être obtenue par des considérations heuristiques [13] ou en utilisant des théories de l'échantillonnage compressé [1, 8, 3].

Nous fixons aussi le temps total d'acquisition T et cherchons à trouver une courbe d'échantillonnage $s \in \mathcal{S}_T$ efficace.

À une courbe $s \in \mathcal{S}_T$, nous pouvons associer une mesure image $\mu_s \in \mathcal{M}(\mathcal{S}_T)$ définie pour tout Borélien $B \subseteq \Omega$ par

$$\mu_s(B) = \gamma(s^{-1}(B))$$

où γ est la mesure de Lebesgue normalisée par T . Ainsi $\mu_s(B)$ mesure le temps relatif que s passe dans l'ensemble B . On souhaite que $\mu_s \simeq \pi$ et il faut donc définir une notion de distance entre mesures. Dans un travail récent [9], nous avons proposé de définir une distance entre mesures comme suit :

$$\text{dist}(\mu_s, \pi) = \|h \star (\mu_s - \pi)\|_2,$$

où h est un noyau de convolution continu sur Ω . Si la transformée de Fourier de h est réelle et non nulle partout, on a montré que dist est effectivement une distance et qu'elle métrise la convergence faible entre mesures. Elle est de plus majorée par la distance de Wasserstein si h est Lipschitz continue.

L'idée principale de ce papier est de définir s comme la courbe paramétrisant la solution du problème variationnel suivant :

$$\min_{\mu_s \in \mathcal{M}(\mathcal{S}_T)} \frac{1}{2} \|h \star (\mu_s - \pi)\|_2^2. \quad (3)$$

Ce problème de projection consiste à chercher la courbe s admissible dont la mesure approche au mieux la densité cible π .

Nous avons montré dans [9] que des algorithmes de programmation non-linéaire permettent de trouver des points critiques de la fonctionnelle (3). De plus, ces algorithmes donnent des résultats de projection d'une bonne qualité quelque soit l'initialisation. Nous renvoyons le lecteur intéressé à ce papier pour plus de détails.

5 Résultats

Pour évaluer la pertinence, de cette approche, nous travaillons sur un fantôme couramment utilisé en IRM de taille 1024^2 , voir Fig. 1 (a). Nous projetons une densité cible avec décroissance radiale sur : des sommes de N Diracs, Fig. 2 (b), les mesures empiriques de courbes dans l'ensemble \mathcal{S}_T défini en (1), Fig. 2 (c), la mesure empirique d'un ensemble de 200 segments de longueurs arbitraires, Fig. 2 (d). L'exemple de la Fig. 2 (a) correspond à des tirages i.i.d. Il sert uniquement de référence car il n'est pas implémentable, mais correspond aux approches standards utilisées en simulation. Nous indiquons uniquement les SNR des images reconstruites par manque de place. On peut donner plusieurs conclusions. i) Utiliser une répulsion entre points (telle que le Poisson disk sampling [5]) améliore très légèrement les résultats par rapport à des tirages i.i.d. ii) Le schéma de projection permet de retrouver des schémas correspondant à l'état de l'art (e.g. spirales bruitées) automatiquement, Fig. 2 (c). iii) Le schéma de projection permet aussi de trouver de nouveaux schémas inédits (e.g. lignes de longueur variables, Fig. 2 (d)). iv) Ajouter des contraintes cinématiques sur les trajectoires semble réduire la qualité de reconstruction, mais la baisse est raisonnable ($\sim 1\text{dB}$).

Les schémas proposés sont en cours d'implémentation sur les scanners pré-cliniques Bruker 7T et 17T du projet Neurospin.

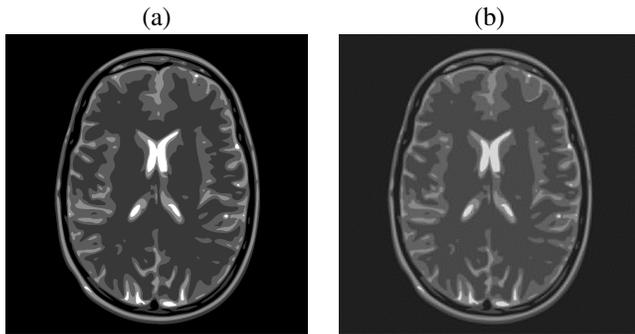


FIGURE 1 – (a) image à reconstruire de taille 1024x1024. (b) Image reconstruite avec le schéma de Fig. 2 (a), SNR=19.6dB.

Références

- [1] B. Adcock, A. C. Hansen, C. Poon, and B. Roman. Breaking the coherence barrier : asymptotic incoherence and asymptotic sparsity in compressed sensing. *Preprint*, 2013.
- [2] J. Bigot, C. Boyer, and P. Weiss. An analysis of block sampling strategies in compressed sensing. *arXiv preprint arXiv :1305.4446*, 2013.
- [3] C. Boyer, J. Bigot, and P. Weiss. Compressed sensing with structured sparsity and block structured acquisition. *arXiv preprint*, 2015.
- [4] C. Boyer, P. Weiss, and J. Bigot. An algorithm for variable density sampling with block-constrained acquisition. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 7(2) :1080–1107, 2014.
- [5] R. Bridson. Fast poisson disk sampling in arbitrary dimensions. In *ACM SIGGRAPH*, volume 2007, page 5, 2007.
- [6] E. Candès and Y. Plan. A probabilistic and riplless theory of compressed sensing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 57(11) :7235–7254, 2011.
- [7] E. Candès, J. Romberg, and T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on pure and applied mathematics*, 59(8) :1207–1223, 2006.
- [8] N. Chauffert, P. Ciuciu, J. Kahn, and P. Weiss. Variable density sampling with continuous sampling trajectories. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2014.
- [9] N. Chauffert, P. Ciuciu, J. Kahn, and P. Weiss. A projection method on measures sets. *submitted*, 2015.

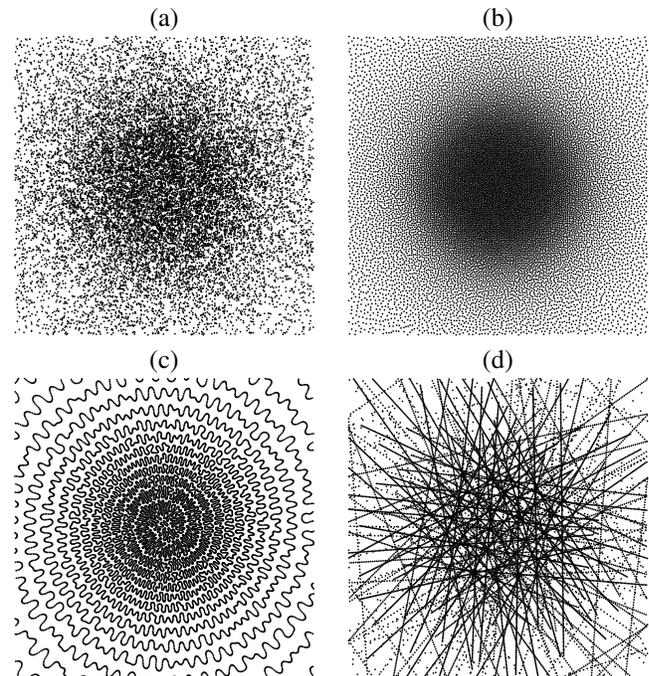


FIGURE 2 – Exemples de schémas d'échantillonnage générés avec 50000 échantillons, soit 4.7% des mesures. (a) Tirages i.i.d. (infaisable - SNR=19.6dB) (b) projection sur les mesures discrètes (infaisable - SNR=19.8dB) (c) projection sur les mesures admissibles pour une trajectoire d'IRM (SNR=18.6dB). (d) projection sur 200 segments de longueur variable (SNR=18.9dB).

- [10] N. Chauffert, P. Weiss, J. Kahn, and P. Ciuciu. Gradient waveform design for variable density sampling in magnetic resonance imaging. *arXiv preprint arXiv :1412.4621*, 2014.
- [11] J. P. Haldar, D. Hernando, and Z.-P. Liang. Compressed-sensing MRI with random encoding. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 30(4) :893–903, 2011.
- [12] D. J. Larkman and R. G. Nunes. Parallel magnetic resonance imaging. *Physics in medicine and biology*, 52(7) :R15, 2007.
- [13] M. Lustig, D. Donoho, and J. M. Pauly. Sparse MRI : The application of compressed sensing for rapid mr imaging. *Magnetic resonance in medicine*, 58(6) :1182–1195, 2007.
- [14] G. Puy, J. P. Marques, R. Gruetter, J. Thiran, D. Van De Ville, P. Vanderghenst, and Y. Wiaux. Spread spectrum magnetic resonance imaging. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 31(3) :586–598, 2012.
- [15] S. Vasanawala, M. Murphy, M. T. Alley, P. Lai, K. Keutzer, J. M. Pauly, and M. Lustig. Practical parallel imaging compressed sensing MRI : Summary of two years of experience in accelerating body MRI of pediatric patients. In *Proc. ISBI*, pages 1039–1043, 2011.