

Une Approche Générale pour l'Optimisation des Concaténations en Série Spatialement Couplées

Tarik BENADDI¹, Charly POUILLIAT²

¹IMT Atlantique, ²ENSEEIH

tarik.benaddi@imt-atlantique.fr, charly.poulliat@enseeiht.fr

Résumé – Nous présentons un formalisme général pour étudier les concaténations série spatialement couplées (SC). Nous explicitons l'analogie avec les protographes SC et fournissons une analyse asymptotique adaptée. En proposant une matrice de couplage dans \mathbb{R} , nous décrivons une méthode pour l'optimiser. Enfin, nous conjecturons que dans le cas général de détecteurs souples, les systèmes SC saturent à une valeur minorée par le seuil donné par le théorème de l'aire sous l'EXIT.

Abstract – In this paper, we provide a general framework for spatially coupled (SC) concatenated systems. We explicit the analogy with SC protographs and provide an adapted asymptotic analysis. By proposing a continuous-valued coupling matrix, a code design procedure is introduced. Finally, we will conjecture that the SC schemes saturate to a value lower bounded by the threshold given by the Area theorem of general detectors.

1 Introduction

Les homologues convolutifs des codes LDPC (low density parity-check) sont appelés codes LDPC convolutif (LDPC-C) [1, 2]. Ils sont obtenus en couplant spatialement un code LDPC et présentent de très bons seuils de décodage grâce au phénomène de saturation [3, 4, 5]. Récemment, différents papiers ont étendu le couplage aux turbo-codes [6, 7, 8] et ont fournis une preuve de la saturation dans le cas du BEC utilisant l'évolution de densité. D'autre part, [6, 7] ont proposé un couplage des turbo-codes parallèles et séries systématiques dans le cas du BEC et ont conclu que les schémas série ont un meilleur seuil. Afin de terminer le couplage, ils ont proposé de forcer les derniers bits d'information à zéros.

Dans ce papier, nous présentons un formalisme général pour les concaténations série (CS) spatialement couplées (SC) généralisant les approches précédentes. Premièrement, on décrira la procédure de couplage puis on montrera que le couplage spatial est une généralisation des codes LDPC « multi-edge type » (MET) ou protographes [9] spatialement couplés. Deuxièmement, en s'inspirant des EXIT pour codes protographes (P-EXIT) [10], on étudiera le comportement asymptotique des systèmes proposés. On interprétera le gain de couplage et on décrira la procédure de terminaison et de tail-biting (circularisation du code). Troisièmement, grâce au formalisme proposé, on proposera une optimisation de la matrice de couplage. Enfin, on donnera des résultats d'optimisation et on conjecturera que le seuil des codes turbo spatialement couplés est minoré par le seuil donné par le théorème de l'aire sous la courbe EXIT [11].

2 Description du système

Sans perte de généralisation, on considère des modulations codées à bits entrelacés (BICM) [12]. Considérons pour l'exemple la concaténation en série d'un code

convolutif et d'un modulateur. Un bloc de k bits d'information $\mathbf{s} \in \{0, 1\}^k$ est encodé avec le code externe, noté \mathcal{O} , pour obtenir un mot de code $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^n$ de taille n bits (le rendement du code est $R = k/n$). Ensuite, la séquence \mathbf{u} est entrelacée par π pour obtenir \mathbf{v} , qui sera à son tour modulé en $\mathbf{x} = \{x_i\}_i$ avec $x_i \in \{0, \dots, M-1\}$ (M est l'ordre de la modulation). Enfin, le vecteur \mathbf{x} est modulé en $x(t)$ en utilisant une mise en forme adéquate. La modulation et la mise en forme sont considérées conjointement et forment le modulateur, noté \mathcal{M} . Le signal complexe $x(t)$ est bruité par un bruit blanc Gaussien additif (AWGN) de puissance N_0 .

Au récepteur, on considère un décodeur itératif [13] : le signal reçu $y(t)$ est d'abord traité par le démodulateur MAP (maximum a posteriori) à entrée et sortie souples (SISO), \mathcal{M}^{-1} . Puis, les logarithmes des rapports de vraisemblance (LLRs) extrinsèques des bits démodulés, $L_e(\mathcal{I})$, sont dés-entrelacés et utilisés en *a priori*, $L_a(\mathcal{O})$ par le décodeur \mathcal{O}^{-1} . Ce dernier déroule l'algorithme BCJR [14] pour calculer les LLRs extrinsèques qui correspondent aux bits codés, $L_e(\mathcal{O})$. Après entrelacement, ces derniers forment les LLRs *a priori* des bits démodulés, $L_a(\mathcal{I})$. Après un nombre de turbo-itérations, les bits d'informations estimés sont déduits du signe des LLRs *a posteriori* des bits décodés, notés $L_{ap}(\mathcal{O})$.

En s'inspirant de la représentation protographes [9], on propose une version « vectorisée » Fig. 1. Les bits sont représentés par des nœuds circulaires, les composants interne et externe par des rectangles et les entrelaceurs sont placés sur les branches correspondantes. Une représentation similaire, appelée graphe compact, a été proposée dans [8, 6]. On adoptera ici la même nomenclature.

3 BICM spatialement couplée

Dans cette section, on va décrire comment on peut réaliser le couplage du schéma Fig. 1. Le couplage pro-

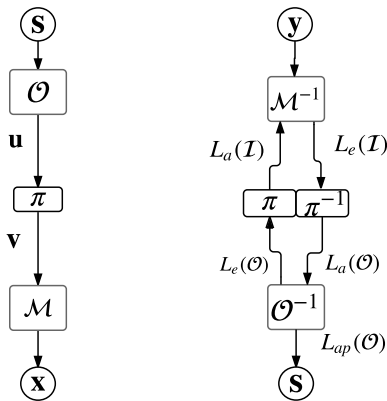


FIGURE 1 – Graphe compact : émetteur(gauche), récepteur(droite)

posé ici ressemble à [8, 7, 6], toutefois, notre formalisme fournit d’une part plus d’outils de design (matrice de couplage, optimisation du mapping, terminaison, ...) et présente d’autre part des caractéristiques analogues aux protographes spatialement couplés (P-SC)[2] (perte de rendement, matrice de couplage, tail-biting, propagation de deux « vagues » de couplage ...). En effet, les turbo codes spatialement couplé (TC-SC) peuvent être obtenus par une variante de *la règle d’étalement de branches (Edge spreading rule) (ESR)* [2] : Dans le graphe compact, les bits encodés \mathbf{v} sont dé-multiplexés en $m_s + 1$ « paquets », puis, le graphe obtenu est recopié un certain nombre de fois, L . Ensuite, les L graphes obtenus sont inter-connectés en inter-échangeant les terminaisons des paquets de même type. Pour décrire ces inter-connections, on introduit une matrice de couplage à valeurs entières B définie comme $B = [b_0, b_1, \dots, b_{m_s}] \in \{0, \dots, n\}^{m_s+1}$, où b_i représente la largeur (nombre de bits) du paquets connectant un graphe à l’instant t avec le graphe à l’instant $(t + i)$. B doit vérifier $\sum_{i=0}^{m_s} b_i = n$.

Comme pour les codes LDPC, L est appelée la longueur de couplage et m_s sa mémoire. Comme on le verra plus tard, il est plus pratique de considérer une matrice de couplage à valeurs continues. Pour cela, il suffit de normaliser toutes les entrées de B par n : maintenant, $b_i \in [0, 1]$ représente la proportion de bits de \mathbf{u} qu’on passe du graphe de l’instant t à l’instant $(t + i)$. On obtient donc $\sum_{i=0}^{m_s} b_i = 1$. Un exemple de cette construction est schématisé dans Fig. 2.

3.1 Tail-biting

Avec l’ESR, on se retrouve avec des connections de paquets vacantes au début et d’un nombre de paquets non connectés à la fin. On peut donc remédier à cela en connectant la fin du graphe avec le début : on parle alors de tail-biting. On peut montrer que l’on n’a aucune perte de rendement par rapport au schéma non couplé (R). Par contre, on n’observera pas le gain de couplage puisque, localement, chaque étage i se comporte exactement comme le schéma sous-jacent dans Fig. 1.

3.2 Terminaison

Une autre manière de résoudre le problème serait de rajouter m_s modulateurs à la fin pour raccorder les paquets restants, et autant de bits d’informations connus

pour compléter les m_s connections vacantes au début et à la fin. Un exemple est illustré dans Fig. 2. Les m_s cercles noirs dans les bords représentent les bits connus rajoutés.

On peut montrer que le rendement du TC-SC vaut :

$$R_L = \frac{L}{L + m_s} R = R - \frac{m_s}{L + m_s} R \quad (1)$$

Ceci est analogue au résultat obtenu pour les P-SC. Remarquons que la terminaison ($L < \infty$), induit une perte de rendement égale à $\frac{m_s}{L+m_s} R$. Cette perte tend vers 0 avec $L \rightarrow +\infty$.

La différence de l’Eq. (1) avec le rendement [7] vient du fait que notre perte de rendement vient des modulateurs rajoutés à la fin et des bits insérés, tandis que la perte de rendement dans [7] vient des derniers bits fixés à 0 pour terminer l’encodeur à l’état 0¹. D’autre part, notre expression est vraie aussi pour les codes non-systématiques.

Comme on le verra plus tard, les démodulateurs les moins connectés² produisent un phénomène de « vague » : les bits connus insérés au début et à la fin vont améliorer les LLRs calculés "sur les bords", qui vont, à fur et à mesure des itérations, se propager vers l’intérieur du graphe Fig. 2. Les étages intermédiaires, eux, vont se comporter exactement comme le système turbo sous-jacent tant que le gain de couplage ne les aura pas atteints.

4 Étude asymptotique

4.1 Analyse EXIT

Les auteurs dans [6] ont étudié la convergence sur le BEC des TC-SC en utilisant l’évolution de densité (DE). Dans le cas d’un canal AWGN et avec des composants internes et externes génériques, évaluer le seuil de décodage avec la DE devient très complexe. Alternativement, les courbes EXIT [15] sont souvent utilisées.

L’analyse EXIT permet, pour un paramètre fixe du canal (ici le rapport signal à bruit (RSB) E_b/N_0), de suivre à fur et à mesure des itérations, l’évolution de l’information mutuelle (IM) entre les LLRs extrinsèques et les bits correspondants. Pour cela, l’analyse EXIT considère la fonction de transfert d’entrée-sortie des blocs SISO des composants interne et externe. La fonction de transfert du démodulateur $T_{\mathcal{M}}(\cdot)$ (dépend implicitement du RSB) calcule l’IM extrinsèque $I_e(\mathcal{I})$ (des LLRs $L_e(\mathcal{I})$ et des bits correspondants) en fonction l’observation du canal et de l’IM *a priori* $I_a(\mathcal{I})$ (de $L_a(\mathcal{I})$ et des bits correspondants). De manière similaire, la fonction de transfert du décodeur externe $T_{\mathcal{O}}(\cdot)$ calcule l’IM extrinsèque $I_e(\mathcal{O})$ (de $L_e(\mathcal{O})$ et des bits correspondant) et l’IM *a posteriori* $I_{ap}(\mathcal{O})$ (de $L_{ap}(\mathcal{O})$ et des bits correspondant) en fonction de l’IM *a priori* $I_a(\mathcal{O})$ (des LLRs $L_a(\mathcal{O})$ et des bits correspondant). Les expressions analytiques de $T_{\mathcal{O}}(\cdot)$ and $T_{\mathcal{M}}(\cdot)$ ne sont pas disponibles en général, on les estime donc par simulation Monte Carlo. On considère en plus les notations suivantes relatives à l’étage i dans Fig. 3 :

1. l’état 0 concerne ici le système TC-SC (les derniers symboles transmis valent 0), et non l’état interne de chaque code constituant
2. car ils ont moins de bits d’informations réels à leur entrée

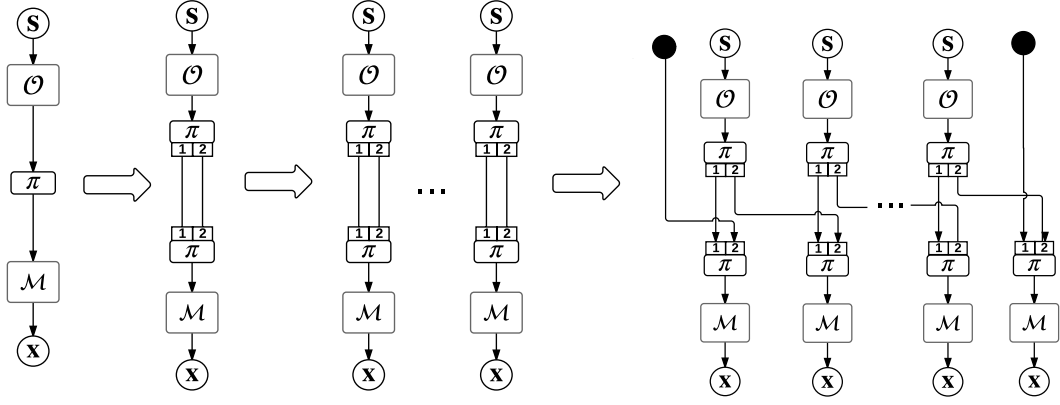


FIGURE 2 – Émetteur TC-SC. La matrice de couplage est $B = [0.5, 0.5]$.

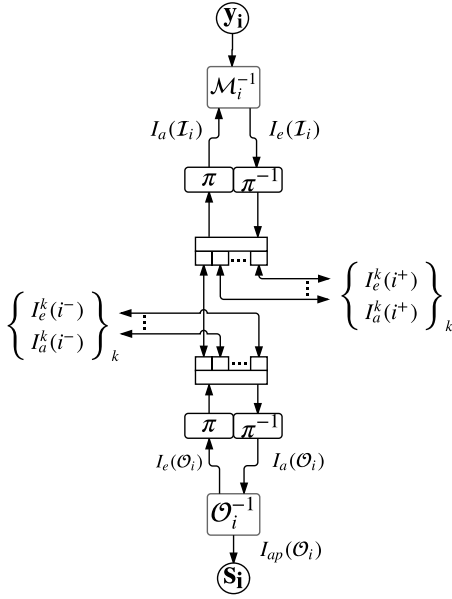


FIGURE 3 – Graphe compact du système TC-SC terminé

- i indexe les quantités de chaque étage.
- $I_e^k(i^+)$ (resp. $I_a^k(i^+)$) est l'IM extrinsèque (resp. *a priori*) des LLRs passés du \mathcal{M}_i^{-1} (resp. du \mathcal{O}_{i+k}^{-1} passé) vers \mathcal{O}_{i+k} (resp. \mathcal{M}_i^{-1}).
- idem pour $I_e^k(i^-)$ et $I_a^k(i^-)$ vis-à-vis \mathcal{O}_i^{-1} et \mathcal{M}_{i-k}^{-1} .

À chaque turbo-itération, on déroule les mises à jour relatives à tous les démodulateurs (resp. les décodeurs externes) en parallèle comme dans l'algorithme de propagation de croyance [9]. La différence avec le système non couplé réside dans le calcul des mixtures ($I_e^k(i^+) = I_e(\mathcal{I}_i).b_k$ et $I_a(\mathcal{I}_i) = \sum I_a^k(i^+).b_k$, puis $I_e^k(i^-) = I_e(\mathcal{O}_i).b_k$ et $I_a(\mathcal{O}_i) = \sum I_a^k(i^-).b_k$) et des conditions limites (l'IM *a priori* venant des nœuds additionnels vaut 1).

Ainsi, le seuil de décodage est défini comme le plus petit RSB tel que $I_{ap}(\mathcal{O}_i) \rightarrow 1, \forall i$. Remarquons que les itérations EXIT obtenues ne peuvent plus être interprétées géométriquement comme dans [11, Fig. 6], mais plutôt comme des P-EXIT [10] où les nœuds de variables et de parités sont généralisés et où les $(m_s + 1)$ branches incidentes de chaque étage sont pondérées par $\{b_k\}_k$.

4.2 Minimiser le nombre d'itérations

On présente ici une méthode qui permet d'accélérer la convergence sans détériorer le seuil de décodage ni

augmenter la mémoire de couplage m_s . Pour cela, considérons la procédure suivante :

1. Choisir une matrice de couplage initiale B_0
2. Évaluer le seuil de décodage
3. Trouver le couplage optimal B_{opt} tel que :
 - Le système TC-SC converge au même seuil
 - le nombre d'itérations est minimal

Après plusieurs essais, nous avons remarqué qu'un couplage uniforme B_0 (les entrées $b_k \neq 0$ sont égales) est un bon candidat pour calculer le seuil de l'ensemble TC-SC à L et m_s fixe mais à couplage B différent. Le seuil de l'étape 2 peut être estimé par une recherche dichotomique. Pour l'étape 3, on propose deux stratégies :

1. En discrétisant $[0, 1]$, parcourir l'ensemble : $\{\{b_k\}_k \mid \sum b_k = 1 \text{ et } b_k \in [0, 1]\}$.
2. Comme B est une matrice continue, on peut utiliser l'algorithme d'évolution différentielle [16]

L'espace de recherche peut être largement réduit en considérant des matrices de couplage asymétriques. En effet, à cause de la symétrie de Fig. 2, $B_1 = \{b_k\}_k$ et $B_1 = \{b_{m_s-k}\}_k$ ont les mêmes performances. De plus, la dimension de l'espace de recherche peut être réduite en remplaçant la contrainte d'égalité $\sum_{i=0}^{m_s} b_i = 1$ par $\sum_{i=0}^{m_s-1} b_i \leq 1$ et déduire à la fin $b_{m_s} = 1 - \sum_{i=0}^{m_s-1} b_i$.

NB : Remarquer que si B était une matrice entière, seule la stratégie 1 est valide et le problème d'optimisation deviendrait très complexe pour les valeurs de n et m_s d'intérêt.

5 Résultats

Figure 5 illustre l'évolution de $\{I_{ap}(\mathcal{O}_i)\}_i$ selon les itérations. Le seuil de décodage du système non-couplé est $E_s/N_0 = 6.67\text{dB}$. On voit bien que les bits insérés sur les bords permettent d'avoir un gain de couplage, et que les nœuds intermédiaires se comporte comme dans le schémas non-couplé tant que le gain de couplage ne les aura pas atteint. Par conséquent, même si le RSB est inférieur au seuil du système non couplé (ici $E_s/N_0 = 5.8\text{dB}$), tous les étages convergent après 134 itérations.

Considérons le code externe systématique [5, 7] de rendement 1/2 et un modulateur composé d'un accumulateur de rendement 1 de fonction de transfert $1/(1+D)$ et d'une modulation 16-QAM. Pour éviter un système doublement itératif, on considère un mapping de Gray

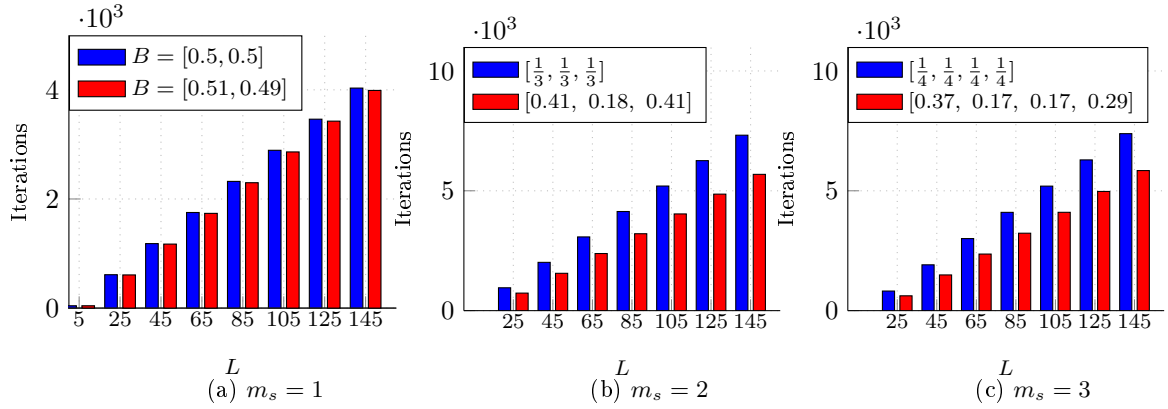


FIGURE 4 – Nombre d’itérations pour différentes mémoires de couplage au seuil de décodage donnée par Fig. 6

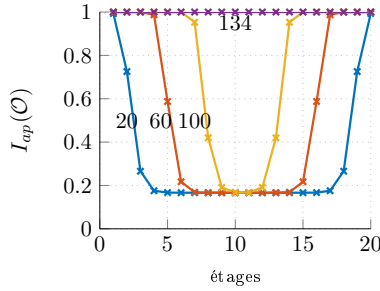


FIGURE 5 – $I_{ap}(\mathcal{O}_i)$ en fonction des itérations du TC-SC

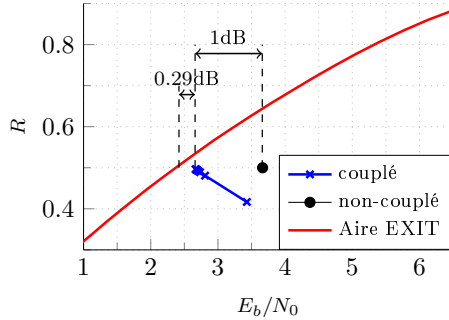


FIGURE 6 – Seuil vs le rendement des deux schémas. $B = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

(courbe EXIT quasi-plate). Figure 6 représente le seuil vs le rendement du TC-SC. Nous avons aussi tracé l’aire sous la courbes EXIT du démodulateur [11] du système non-couplé \mathcal{A}^* . On peut voir que le couplage permet de gagner 1dB et qu’on n’est plus qu’à 0.29dB de \mathcal{A}^* . En augmentant L , on remarque que le seuil sature à une valeur très proche par \mathcal{A}^* .

Les matrices de couplage optimales ainsi que le nombre d’itérations correspondant sont présentées dans Fig. 4. Grâce à notre optimisation, nous avons réduit le nombre d’itérations de 1%, 22.3% et 20.8% quand m_s vaut 1, 2 et 3 respectivement. Pour $m_s = 2$, observer que nous avons besoin de plus d’itérations pour converger en comparaison à $m_s = 1$. En effet, cette différence est due au fait qu’en considérant une plus grande mémoire de couplage, nous avons sensiblement amélioré le seuil de décodage.

6 Conclusion

Nous avons présenté un formalisme générale pour les TC-SC. Nous avons montré l’analogie avec les P-SC et nous avons présenté l’analyse EXIT des systèmes couplés. Nous avons optimisé la matrice de couplage pour accélérer la vitesse de convergence et finalement, nous avons conjecturé que le seuil des TC-SC sature à une

valeur minorée par \mathcal{A}^* .

Références

- [1] A. Jimenez Felstrom and K. S. Zigangirov, “Time-varying periodic convolutional codes with low-density parity-check matrix,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 45, no. 6, pp. 2181–2191, 1999.
- [2] D. G. Mitchell, M. Lentmaier, and D. J. Costello Jr, “Spatially coupled ldpc codes constructed from protographs,” *arXiv preprint arXiv :1407.5366*, 2014.
- [3] S. Kudekar, T. J. Richardson, and R. L. Urbanke, “Threshold saturation via spatial coupling : Why convolutional ldpc ensembles perform so well over the bec,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 2, pp. 803–834, 2011.
- [4] S. Kumar, A. J. Young, N. Macris, and H. D. Pfister, “Threshold saturation for spatially coupled ldpc and ldgm codes on bms channels,” *IEEE Trans. on Inf. Theory*, vol. 60, no. 12, pp. 7389–7415, 2014.
- [5] P. S. Nguyen, A. Yedla, H. D. Pfister, and K. R. Narayanan, “Spatially-coupled codes and threshold saturation on intersymbol-interference channels,” *arXiv preprint arXiv :1107.3253*, 2011.
- [6] S. Moloudi, M. Lentmaier, and A. G. i Amat, “Spatially coupled turbo codes,” in *8th Int. Symp. on Turbo Codes and Iterative Inf. Process. (ISTC)*, pp. 82–86, 2014.
- [7] S. Moloudi, M. Lentmaier, *et al.*, “Spatially coupled turbo-like codes,” *arXiv preprint arXiv :1604.07315*, 2016.
- [8] D. J. Costello, M. Lentmaier, and D. G. Mitchell, “New perspectives on braided convolutional codes,” in *9th Int. Symp. on Turbo Codes and Iterative Inf. Process. (ISTC)*, pp. 400–405, 2016.
- [9] W. Ryan and S. Lin, *Channel codes : classical and modern*. Cambridge University Press, 2009.
- [10] G. Liva and M. Chiani, “Protograph ldpc codes design based on exit analysis,” in *IEEE Global Telecommun. Conf., GLOBECOM*, pp. 3250–3254, 2007.
- [11] J. Hagenauer, “The exit chart-introduction to extrinsic information transfer in iterative processing,” in *Proc. 12th Eur. Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, 2004.
- [12] A. G. i Fàbregas, A. Martinez, G. Caire, *et al.*, “Bit-interleaved coded modulation,” *Foundations and Trends® in Commun. and Inf. Theory*, vol. 5, no. 1–2, pp. 1–153, 2008.
- [13] C. Berrou and A. Glavieux, “Near optimum error correcting coding and decoding : Turbo-codes,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 10, pp. 1261–1271, 1996.
- [14] L. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, “Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate (corresp.),” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 20, pp. 284–287, 1974.
- [15] S. ten Brink, “Convergence behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 10, pp. 1727–1737, 2001.
- [16] R. Storn and K. Price, “Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces,” *Journal of global optimization*, vol. 11, no. 4, pp. 341–359, 1997.