

Méthode parcimonieuse pour l'analyse spectrale de signaux tip-timing

Antoine BOUCHAIN^{1,2}, José PICHERAL¹, Elisabeth LAHALLE¹, Agathe VERCOUTTER²

¹Laboratoire des Signaux et Systèmes

CentraleSupélec - CNRS - Université Paris Sud - Université Paris Saclay, 3 Rue Joliot-Curie, 91192 Gif sur Yvette, France

²Safran Helicopter Engines

Avenue Joseph Szydlowski, 64510 Bordes, France

Antoine.Bouchain@centralesupelec.fr, Jose.Picheral@centralesupelec.fr,
Elisabeth.Lahalle@centralesupelec.fr, Agathe.Vercoutter@safrangroup.com

Résumé – Les vibrations d’aubes sont particulièrement étudiées pour la certification des turbomachines. L’une des méthodes de mesure est le tip-timing dont la principale contrainte est de générer des signaux sous-échantillonnés et à échantillonnage non-uniforme périodique. Cet article présente une nouvelle méthode parcimonieuse pour l’analyse spectrale de signaux tip-timing. Une modélisation parcimonieuse du spectre est développée sous forme d’un système linéaire dont la résolution est obtenue par minimisation d’un critère régularisé par un terme de pénalité l^1 . Des résultats sur signaux simulés et réels illustrent la méthode proposée. Le principal avantage de la méthode est de réduire les repliements des composantes fréquentielles dues au sous-échantillonnage des signaux mesurés.

Abstract – Blades vibrations are measured to validate blade design. Tip-timing is one of the classical used methods but its main constraint is to generate sub-sampled and non-uniform sampled signals. This paper presents a new sparse method for the tip-timing spectral analysis. A sparse model of signals is introduced as linear system whose solution is performed by the minimization of a regularized criterion with l^1 penalization term. Results over simulated and real signals are given to illustrate the method. The main advantage of this method is to reduce the frequency component aliasing due to the sub-sampling of the measured signals.

1 Introduction

Les vibrations de pales sont un élément clé dans la certification des turbomachines. Classiquement mesurées par jauge de déformation, d’autres alternatives, moins intrusives et plus facile à mettre en œuvre, sont explorées. L’une d’elle est le tip-timing. Le système d’acquisition se compose de C sondes optiques disposées sur le stator et permettant d’estimer les déplacements en bout de pale. L’échantillonnage est irrégulier du fait de la répartition non-uniforme des capteurs sur le stator. Il est également périodique de période T_r (durée d’un tour). Les composantes spectrales des signaux de vibrations étant largement supérieures à la fréquence de rotation, il y a ambiguïtés entre les composantes du spectre et les motifs période dûs à l’échantillonnage.

Différentes méthodes existent dans la littérature pour répondre à ces problèmes telles que la méthode ESMV [1], méthode itérative pour estimer la matrice de covariance du spectre de Capon, la reconstruction de spectre par acquisition comprimée (*compressed sensing*) [2] ou encore la méthode ABS [3] dont la spécificité est d’exploiter l’ensemble des pales vues par un unique capteur, contrairement aux autres méthodes qui exploitent les vibrations d’une seule pale vue par tous les capteurs. Dans ce papier, nous comparons deux approches d’estimation spectrale : la méthode de Capon et la méthode parcimonieuse que nous proposons. L’utilisation d’une méthode

parcimonieuse se justifie par le fait que les pales présentent un nombre limité de modes de vibration dans le domaine d’utilisation du moteur. Le spectre du signal de vibration est donc principalement constitué d’un faible nombre de raies. Ainsi, cet article présente une nouvelle méthode d’estimation exploitant la parcimonie des spectres de signaux tip-timing.

Le modèle d’un signal tip-timing est introduit en partie 2. L’adaptation de la méthode de Capon à des signaux à échantillonnage irrégulier périodique est donnée en partie 3. La méthode proposée est présentée en partie 4. Enfin, des résultats numériques sur données simulées et réelles sont présentés en Partie 5.

2 Modèle d’un signal Tip-Timing

Soit une mesure composée de C capteurs par tour sur N_t tours d’un signal de vibration $x(t)$ pour une pale donnée, à la fréquence de rotation $F_r = 1/T_r$. Le modèle du signal échantillonné à temps continu sur N points s’écrit :

$$y(t) = \sum_{k=1}^N x(t_k) \delta(t - t_k) = x(t) \Pi_{[0, N_t T_r]}(t) e(t), \quad (1)$$

avec $\Pi_{[0, N_t T_r]}(t)$ la fenêtre d’observation de durée $N_t T_r$ et $e(t) = \sum_{k=1}^N \delta(t - t_k)$.

Dans le cas d'un signal tip-timing, les capteurs sont disposés à des positions angulaires arbitraires sur le stator, le motif temporel d'échantillonnage est alors irrégulier et périodique de période T_r . Les instants d'échantillonnage s'écrivent sous la forme :

$$t_k = \theta_c T_r / 2\pi + nT_r \quad (2)$$

avec $k = c + C(n - 1)$ où n , $1 \leq n \leq N_t$, est l'indice du tour et θ_c la position angulaire du capteur c , $1 \leq c \leq C$. La fonction d'échantillonnage irrégulier $e(t)$ s'écrit alors comme la convolution d'un peigne de Dirac de période T_r , noté $\text{III}_{T_r}(t)$, par un motif d'échantillonnage tip-timing $e_{TT}(t)$ liée à la répartition irrégulière des capteurs :

$$e(t) = e_{TT}(t) * \text{III}_{T_r}(t), \quad (3)$$

avec $e_{TT}(t) = \sum_{c=1}^C \delta(t - \theta_c T_r / 2\pi)$.

Une estimation du spectre de $x(t)$ peut être obtenue par transformée de Fourier non uniforme $\tilde{y}(f) = \sum_{k=1}^N x(t_k) e^{-j2\pi f t_k}$ de $y(t)$, qui s'exprime également sous cette forme :

$$\tilde{y}(f) = F_r \sum_{n=0}^{+\infty} (\tilde{x} * \tilde{\Pi}_{[0, N_t T_r]})(f - nF_r) \tilde{e}_{TT}(nF_r). \quad (4)$$

Ce spectre correspond au spectre de $x(t)$ convolué avec la transformée de Fourier $\tilde{\Pi}(f)$ de la fenêtre d'observation et replié sur les multiples de la fréquence de rotation. Contrairement au cas régulier, chaque repliement est pondéré par une valeur différente $\tilde{e}_{TT}(nF_r)$ liée à la disposition des capteurs.

3 Méthode de Capon

La méthode de Capon permet de limiter les interférences entre les composantes du signal. Il est possible de l'adapter à l'échantillonnage irrégulier périodique et contrairement à MUSIC, elle permet d'accéder directement à l'amplitude et indirectement à la phase des composantes fréquentielles. C'est donc une méthode intéressante pour les signaux tip-timing. Le spectre de Capon s'écrit

$$S_{\text{Capon}}(f) = \frac{1}{\mathbf{a}(f)^H \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(f)}, \quad (5)$$

avec $\mathbf{a}(f)^H = [e^{-j2\pi f t_1}, e^{-j2\pi f t_2}, \dots, e^{-j2\pi f t_N}]$, $\mathbf{a}(f)^H$ le transposé conjugué de $\mathbf{a}(f)$ et $\hat{\mathbf{R}}$ l'estimation de la matrice de covariance de $x(t)$.

Pour l'estimation empirique de chaque coefficient de la matrice de covariance d'un signal ergodique, l'écart entre les différents instants considérés doit être constant. Pour satisfaire cette contrainte dans le cas d'un échantillonnage irrégulier périodique de période un tour, la solution consiste à décaler les vecteurs d'observations de C échantillons (soit un tour). En considérant des signaux de vibrations à moyenne nulle, l'estimation de la matrice de covariance est donnée par :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \mathbf{X} \mathbf{X}^H, \quad (6)$$

avec $\mathbf{X}$ la matrice des observations virtuelles de taille $[l \times L]$, dont l'élément (i, j) , $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq L$, s'écrit $x_{t_i + (j-1)C}$ où L est le paramètre de lissage qui correspond au nombre d'observations et $l = (N_t - L + 1)C$.

4 Modèle parcimonieux

L'idée de la méthode proposée est d'exploiter la parcimonie du spectre de $x(t)$ et le modèle obtenu en (4). Les vibrations $x(t)$ d'intérêts sont supposées sinusoïdales et de support fréquentiel borné sur $[0, f_{max}]$. Le spectre de $x(t)$ peut être approximé par discrétisation sous la forme $\tilde{x}(f) = \tilde{x}^M(f) + \tilde{b}(f)$, où $\tilde{b}(f)$ représente l'erreur de modélisation et le bruit de mesure, et le modèle $\tilde{x}^M(f)$ s'écrit :

$$\tilde{x}^M(f) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M a_m \delta(f - f_m) + a_m^* \delta(f + f_m), \quad (7)$$

avec $f_m = \frac{m}{M} f_{max}$, a_m l'amplitude complexe de la composante f_m et a_m^* le conjugué de a_m . Les pales ne vibrant qu'à quelques fréquences, la majorité des coefficients a_m sont nuls. C'est cette propriété de parcimonie que nous allons exploiter par la suite. Avec (7), l'équation (4) peut alors se réécrire :

$$\tilde{y}(f) = \sum_{m=1}^M a_m g_m^+(f) + a_m^* g_m^-(f), \quad (8)$$

avec $g_m^\pm(f) = \frac{F_r}{2} \sum_{n=0}^{N_f/F_r} \tilde{e}_{TT}(nF_r) \tilde{\Pi}_{[0, N_t T_r]}(f \pm f_m - nF_r)$.

L'espace $[0, f_{max}]$ est discrétisé en (f_k) , $1 \leq k \leq N_f$ valeurs. L'équation (8) peut alors s'écrire sous la forme d'un système linéaire :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \boldsymbol{\vartheta}, \quad (9)$$

avec

$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}(f_1), \dots, \tilde{y}(f_{N_f})]^T$ de taille $[N_f \times 1]$,

$\boldsymbol{\vartheta} = [a_M, \dots, a_1, a_1^*, \dots, a_M^*]^T$ de taille $[2M \times 1]$,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_M^+(f_1) & \dots & g_1^+(f_1) & g_1^-(f_1) & \dots & g_M^-(f_1) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_M^+(f_{N_f}) & \dots & g_1^+(f_{N_f}) & g_1^-(f_{N_f}) & \dots & g_M^-(f_{N_f}) \end{bmatrix}$$

de taille $[N_f \times 2M]$ et où $[\cdot]^T$ est l'opérateur de transposition.

Afin de résoudre (9) en prenant en compte l'*a priori* de parcimonie sur $\boldsymbol{\vartheta}$ nous proposons d'introduire une pénalisation de norme l^1 sur les coefficients de $\boldsymbol{\vartheta}$. Avec $\lambda \in \mathbb{R}$ le paramètre de la régularisation de la pénalité, le critère à minimiser s'écrit :

$$J(\boldsymbol{\vartheta}) = \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{G} \boldsymbol{\vartheta}\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\vartheta}\|_1. \quad (10)$$

Ce critère (10) correspond à une régression de type LASSO [4] qui peut être réécrite dans l'ensemble des réels en décomposant le système (9) en partie réelle (notée par l'exposant R) et imaginaire (respectivement notée par I) :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}^R \\ \tilde{\mathbf{y}}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1(f_k)_{1 \leq k \leq N_f} & \mathbf{G}_2(f_k)_{1 \leq k \leq N_f} \\ \mathbf{G}_3(f_k)_{1 \leq k \leq N_f} & \mathbf{G}_4(f_k)_{1 \leq k \leq N_f} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \quad (11)$$

avec $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ et $\mathbf{G}_4$ de taille $[N_f \times M]$ telles que

$$\mathbf{G}_1(f_k) = [(g_M^{+R} + g_M^{-R})(f_k), \dots, (g_1^{+R} + g_1^{-R})(f_k)],$$

$$\mathbf{G}_2(f_k) = [(g_1^{+I} - g_1^{-I})(f_k), \dots, (g_M^{+I} - g_M^{-I})(f_k)],$$

$$\mathbf{G}_3(f_k) = [(g_M^{+I} + g_M^{-I})(f_k), \dots, (g_1^{+I} + g_1^{-I})(f_k)],$$

$$\mathbf{G}_4(f_k) = [(-g_1^{+R} + g_1^{-R})(f_k), \dots, (-g_M^{+R} + g_M^{-R})(f_k)]$$

et $\boldsymbol{\theta} = [a_M^R, \dots, a_1^R, -a_1^I, \dots, -a_M^I]^T$ de taille $[2M \times 1]$.

Ainsi, en introduisant (11) dans (10), on obtient un critère convexe réel qui a été minimisé par descente de gradient (les algorithmes FISTA [5] ou ADMM [6] auraient également pu être utilisés). En posant $\forall 1 \leq m \leq M$, $a_m = |a_m|e^{j\varphi_m}$, l'amplitude et la phase de chaque composante peuvent être estimées comme suit :

$$|a_m| = \sqrt{a_m^R{}^2 + a_m^I{}^2} \text{ et } \varphi_m = \arctan(a_m^I/a_m^R). \quad (12)$$

5 Résultats expérimentaux

5.1 Résultats sur signaux simulés

Le signal simulé comporte deux composantes fréquentielles $f_1 = 213$ Hz d'amplitude 10, de phase 0.3 *radian* et $f_2 = 1131$ Hz d'amplitude 1, de phase 0.5 *radian*. Les $C = 5$ capteurs sont aux positions angulaires : 3.6° , 39.6° , 144° , 291.6° et 313.2° . La fréquence de rotation est de $F_r = 470$ Hz sur $N_t = 150$ tours. Un bruit blanc gaussien centré est ajouté, de rapport signal sur bruit de 5dB par rapport à la composante f_2 .

La Figure 1 montre la transformée de Fourier non uniforme (TFNU) et le spectre de Capon du signal simulé. Les flèches en pointillés indiquent les composantes fréquentielles et leur repliements. Sur la transformée de Fourier, les repliements empêchent d'identifier les composantes fréquentielles du signal. Pour la méthode de Capon, les paramètres de calcul de la matrice de covariance sont $l = 25$ et $L = 146$. Celle-ci fait apparaître les deux composantes principales du signal, avec une faible résolution, mais sans leurs repliements.

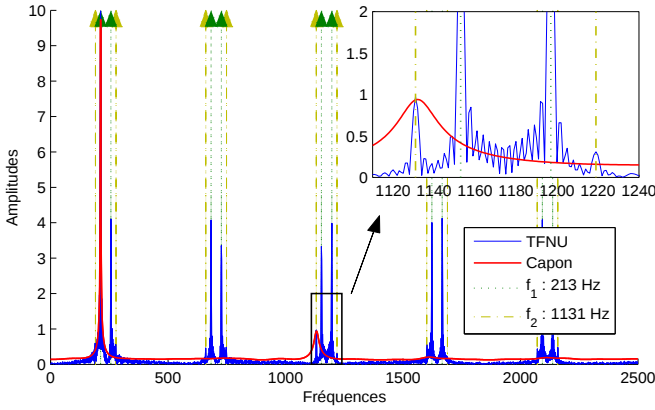


FIGURE 1 – Transformée de Fourier Non Uniforme (module) et Spectre de Capon pour le signal simulé (module)

Les figures n°2 et n°3 présentent différents résultats obtenus avec la méthode parcimonieuse proposée. La Figure 2 expose 3 spectres pour différentes valeurs de λ montrant l'évolution de l'accentuation du caractère parcimonieux, diminuant ainsi les composantes du spectre. Un zoom sur les fréquences de 1kHz à f_{max} est donné. On peut remarquer que le choix d'un λ trop grand amène à sous-estimer l'amplitude des composantes, comme c'est le cas avec λ_3 . La méthode proposée

fournit également une estimation des phases des composantes avec 0.010 et 0.016 d'erreur absolue sur f_1 et f_2 respectivement, pour $\lambda = 10^{-3}$.

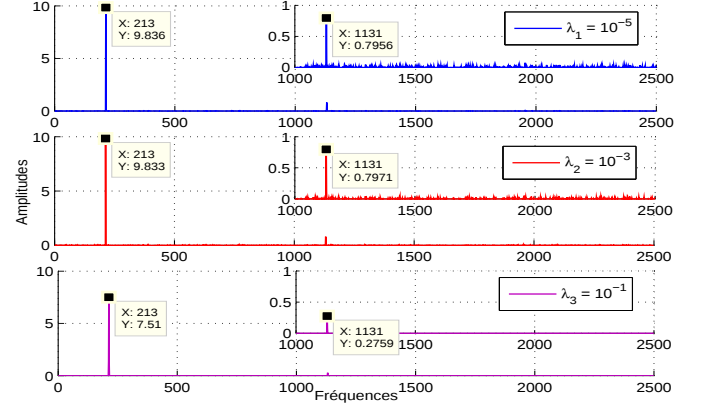


FIGURE 2 – Spectre obtenu avec la méthode proposée pour le signal simulé

La Figure 3 montre l'évolution de l'estimation des amplitudes (a) et des phases (b) des composantes f_1 et f_2 en fonction de λ . Lorsque λ augmente, les amplitudes diminuent : le système devient de plus en plus parcimonieux. Le graphe (c) montre l'évolution des deux termes du critère défini à l'équation (10), en fonction de λ . La figure illustre le compromis à réaliser entre le critère d'adéquation aux données et celui de régularisation. Pour ce type de signal, $\lambda \in [10^{-3}, 10^{-2}]$ semble un bon compromis.

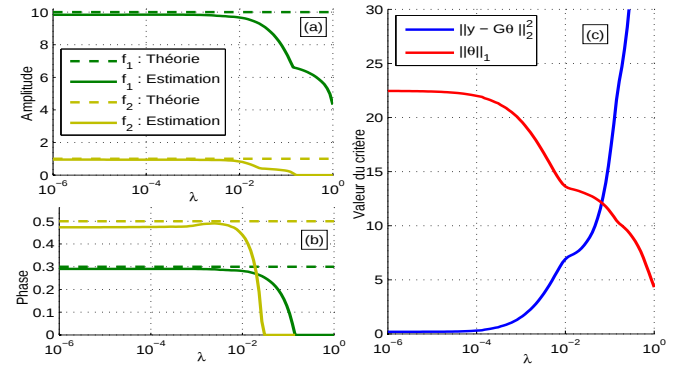


FIGURE 3 – Évolution des amplitudes (a), des phases (b) des composantes principales et des critères (c) en fonction de λ sur le signal simulé

5.2 Résultats sur signaux réels

Le signal réel est issu de données d'essai sur prototype de recherche appartenant à Safran Helicopter Engines. Pour des raisons de confidentialité, les fréquences sont normalisées par $f_{eq} = CF_r$ et les amplitudes ont été normalisées par le maxi-

mum du module de la transformée de Fourier non uniforme. Ce signal comporte une composante principale de à 0.609 ainsi que des composantes secondaires représentées sur la Figure 5. Ce signal a été mesuré sur 72 tours.

La Figure 4 présente les spectres de la transformée de Fourier non uniforme et de Capon du signal réel. Sur celle-ci, les repliements de la composante principale sur le spectre de la transformée de Fourier. Pour la méthode de Capon, les paramètres de calcul de la matrice de covariance sont $l = 16$ et $L = 71$. Les deux méthodes font apparaître clairement la composante d'intérêt mais ses repliements gênent l'interprétation de toute autre composante. Pour Capon, l'amplitude de la composante principale est sensiblement sous-évaluée.

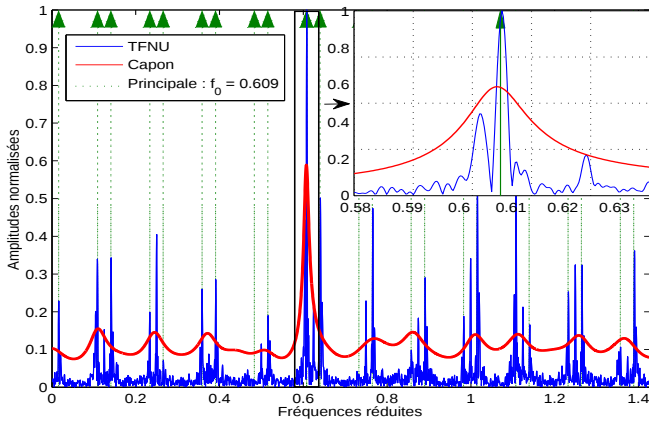


FIGURE 4 – Transformée de Fourier Non Uniforme (module) et spectre de Capon pour le signal réel (module)

La Figure 5 présente le spectre estimé par la méthode proposée pour 3 valeurs de λ différentes. La composante principale est représentée par une flèche verte et les secondaires par des flèches jaunes. Un spectre obtenu par transformée de Fourier de signaux issus d'un autre système de mesure utilisant une jauge de déformation (échantillonnage périodique et respectant la condition de Shannon) est également représenté. Les résultats issus de jauges et du tip-timing peuvent présenter des différences car les systèmes ne réalisent pas la mesure du même point ni avec la même sensibilité. Néanmoins, ils présentent tous deux des niveaux importants aux fréquences d'intérêt, c'est pourquoi nous en proposons la comparaison. La composante principale f_0 obtenue par la méthode proposée est bien visible et son amplitude est comparable à celle de la transformée de Fourier non uniforme. Des repliements de faible amplitude sont cependant présents.

6 Conclusion

Cet article a présenté une nouvelle méthode d'estimation de spectre pour des signaux tip-timing en exploitant leur parcimo-

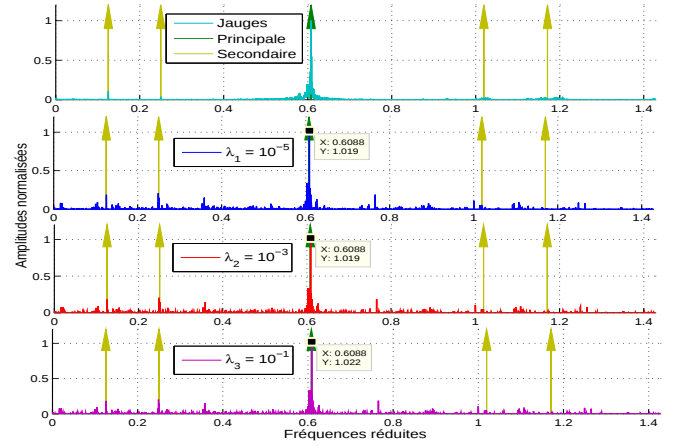


FIGURE 5 – Spectres obtenus par signaux de jauge et avec la méthode proposée pour le signal réel

nie. Cette méthode est particulièrement intéressante pour les composantes sinusoïdales. D'autres pistes sont en cours d'étude pour la perfectionner, telles que l'exploitation de la variation de la fréquence de rotation F_r pendant l'essai, ce qui induit un décalage sur les repliements, ou encore le choix du paramètre de régularisation λ étudié par validation croisée ou courbe en L. Enfin, l'ensemble des auteurs tiennent à remercier SAFRAN Helicopter Engines pour son soutien et tout particulièrement A. Vercoutter et A. Talon pour leur accompagnement.

Références

- [1] A. Vercoutter, M. Berthillier, A. Talon, B. Burgardt, J. Lardies *Tip timing spectral estimation method for aeroelastic vibrations of turbomachinery blades*. International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, 2011.
- [2] Jun Lin, Zheng Hu, Zhong-Sheng Chen, Yong-Min Yang, Hai-Long Xu. *Sparse reconstruction of blade tip-timing signals for multi-mode blade vibration monitoring*. Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 81, pp 250-258, 2016.
- [3] M. Zielinski, G. Ziller. *Noncontact vibration measurements on compressor rotor blades*. Measurement Science and Technology, Vol. 11, pp 847-856, 2000.
- [4] R. Tibshirani *Regression shrinkage and selection via the lasso*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol 58, No. 1, pp. 267-288, 1996.
- [5] A. Beck, M. Teboulle, *A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems*. SIAM Journal of Imaging Sciences, Vol. 2, No. 1, pp 183-202, 2009.
- [6] S. Boyd, N Parikh, E. Chu, B. Peleato, J. Eckstein, *Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Method of Multipliers*. Foundations and Trends in Machine Learning, Vol. 3, No. 1, pp. 1-122, 2010.