

# Estimation quantique en présence de bruit améliorée par l'intrication

Nicolas GILLARD, Étienne BELIN, François CHAPEAU-BLONDEAU

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS),  
Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.

nicolas.gillard@univ-angers.fr, etienne.belin@univ-angers.fr, chapeau@univ-angers.fr

**Résumé** – Nous traitons un problème d'estimation paramétrique en présence de bruit dans un cadre quantique. Nous montrons qu'en quantique il est possible de profiter d'une ressource inexistante en classique, qui est l'intrication, et qui opère d'une façon tout à fait non intuitive. Il s'agit d'estimer le changement de phase subi par un qubit lors de son interaction dans un processus quantique et lorsque le qubit est ensuite affecté par un bruit quantique avant d'être mesuré pour l'estimation. En intriquant ce premier qubit avec un second qubit auxiliaire qui n'interagit jamais avec le processus à estimer, on établit que l'on obtient néanmoins une amélioration nette de la performance d'estimation. L'étude illustre l'apport de l'intrication pour le traitement du signal et de l'information, au niveau quantique, avec de larges potentialités qui demeurent encore à explorer.

**Abstract** – We address a task of parameter estimation in the presence of noise in a quantum framework. We show that quantumly it is possible to benefit from a resource nonexisting classically, which is entanglement, and which operates in a very nonintuitive way. We seek to estimate the phase change experienced by a qubit upon interacting in a quantum process and when the qubit is subsequently altered by a quantum noise before it is measured for estimation. By entangling this first qubit with a second auxiliary qubit which never interacts with the process to be estimated, we establish that we nevertheless obtain a net enhancement of the performance in estimation. The study illustrates the contribution of entanglement for signal and information processing, at the quantum level, with large potentialities still open for exploration.

## 1 Introduction

Pour le traitement du signal et de l'information, on rencontre le quantique lorsque l'on pousse les dispositifs vers leurs limites physiques ultimes, là où l'information est supportée par des constituants élémentaires comme des photons uniques ou des électrons uniques que l'on doit traiter conformément à leur nature quantique. On peut aussi se tourner vers le quantique afin de profiter, pour le traitement de l'information, de propriétés spécifiquement quantiques et inexistantes en classique. C'est le cas notamment avec le parallélisme quantique et avec l'intrication. Dans cet article, nous illustrons comment l'exploitation de l'intrication autorise des performances accrues lors d'une tâche standard de traitement du signal, constituée par une tâche d'estimation paramétrique en présence de bruit, quoiqu'opérant dans un cadre quantique.

L'association de la théorie quantique avec la théorie de l'estimation statistique telle que connue en traitement du signal est relativement récente [1]. Ce secteur carrefour de l'estimation et de la métrologie quantiques s'est étoffé progressivement [2, 3, 4] concomitamment à l'essor du domaine plus large de l'information quantique [5, 6]. Il est encore en pleine progression, à la fois sur le plan théorique et pour ses implications pratiques. Dans ce secteur de la métrologie et de l'estimation, les bénéfices accessibles via l'intrication quantique sont introduits dans [2, 3], et nous les étudions ici dans une situation distincte spécialement en présence de bruit quantique. Dans ce secteur, la prise en compte explicite du bruit quantique ou de la décohérence, quoique de grande importance pratique, n'est abordée de façon spécifique que depuis peu [7, 8, 9, 10]. De nombreuses situations d'estimation quantique demeurent toutefois encore à explorer et à optimiser, selon les systèmes quantiques impliqués, les caractéristiques à estimer, les conditions de bruit et de mesure et leur post-traitement, les métriques de performance, et spécialement avec une orientation "signal" comme nous le faisons [11, 12].

Nous considérons ici un système quantique, préparé dans un état quantique fixé, qui va jouer le rôle d'une sonde, assimilable à un signal d'excitation. Ce signal sonde est appliqué à l'entrée d'un processus quantique, caractérisé par un paramètre  $\xi$  de valeur inconnue que l'on cherche à estimer. Pour ce faire, une

mesure quantique est envisagée sur le signal sonde après qu'il a été transformé par le processus  $\xi$ -dépendant. Toutefois, pour davantage de réalisme, on considère de plus que le signal sonde transformé, avant qu'il devienne accessible à la mesure, est affecté par un bruit quantique matérialisant l'action de la décohérence des états quantiques. C'est donc sur le signal sonde transformé et bruité qu'est réalisée la mesure quantique. La mesure quantique présente un caractère probabiliste inhérent ; elle délivre des résultats représentables au moyen d'une variable aléatoire classique, ce qui nous replace dans le cadre classique de l'estimation paramétrique à partir de résultats de mesure bruitée. Pour estimer le paramètre inconnu  $\xi$  à partir des résultats de mesure, on peut alors se tourner vers des estimateurs classiques standards, comme par exemple l'estimateur du maximum de vraisemblance, accompagné d'une métrique de performance standard comme l'erreur quadratique moyenne d'estimation. On peut donc reconnaître ici une tâche d'estimation paramétrique, ou bien une tâche d'identification d'un processus à un paramètre  $\xi$ , toutefois dans un cadre quantique, où le signal sonde, le processus et le bruit sont de nature quantique. L'apport spécifique de la présente étude est de montrer que dans ce cadre quantique, l'estimation paramétrique peut bénéficier, pour améliorer sa performance, d'une ressource inexistante en classique, et opérant de façon tout à fait non intuitive, qui est l'intrication quantique.

## 2 Estimation sur un qubit

On considère un système élémentaire et fondamental pour l'information quantique qui est un qubit, représentant par exemple les deux états de polarisation d'un photon ou de spin d'un électron. Ce qubit est préparé dans un état quantique représenté par le vecteur d'état  $|\psi_0\rangle$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2$  de dimension 2 sur  $\mathbb{C}$ , et associé à l'opérateur densité  $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  de  $\mathcal{H}_2$  sur  $\mathcal{H}_2$ , élément donc de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ . Cet état quantique  $\rho_0$  du qubit constitue le signal sonde. Celui-ci est appliqué à l'entrée d'un processus quantique représenté par l'opérateur unitaire

$$U_\xi = |0\rangle\langle 0| + e^{i\xi} |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Dans la base canonique  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  de  $\mathcal{H}_2$  l'opérateur unitaire  $U_\xi$  de l'Éq. (1) laisse invariant l'état de base  $|0\rangle$ , i.e.  $U_\xi |0\rangle = |0\rangle$ , et ajoute une phase complexe via  $e^{i\xi}$  à l'état de base  $|1\rangle$ , i.e.  $U_\xi |1\rangle = e^{i\xi} |1\rangle$ . Il s'agit d'une opération qui peut être accomplie par un interféromètre optique, qui pour un photon à deux états de polarisation, laisse invariant un état de polarisation  $|0\rangle$  de référence et ajoute un déphasage de  $\xi$  sur l'autre état de polarisation  $|1\rangle$ , comme représenté sur la Fig. 1. On veut alors estimer le déphasage  $\xi$  de l'interféromètre. On s'intéresse donc à un processus d'interférométrie, qui représente un procédé fondamental pour la physique et la métrologie, qui a par exemple récemment servi à la première observation d'ondes gravitationnelles [13], et on s'intéresse ici à l'interférométrie ultime au niveau de photons individuels.

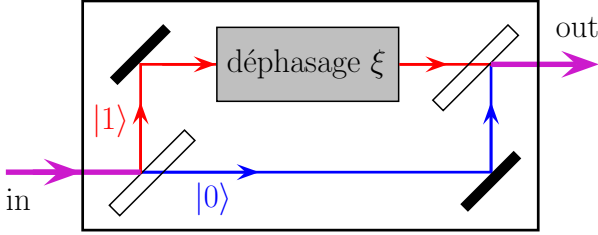


FIGURE 1 – Interféromètre réalisant entre l'entrée (in) et la sortie (out) une implémentation photonique de la transformation  $U_\xi$  de l'Éq. (1) dont on veut estimer le déphasage  $\xi$ .

Le signal sonde  $\rho_0$  transformé par l'opérateur unitaire  $U_\xi$  de l'Éq. (1) produit l'état quantique  $\rho_1(\xi) = U_\xi \rho_0 U_\xi^\dagger$ . L'état quantique  $\rho_1(\xi)$ , en vue d'estimer le déphasage  $\xi$ , n'est pas directement accessible à la mesure, mais après l'action d'un bruit quantique, comme représenté sur la Fig. 2.

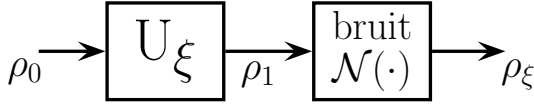


FIGURE 2 – Transformation  $U_\xi$  de l'Éq. (1) suivie d'un bruit quantique, réalisant  $\rho_0 \rightarrow U_\xi \rho_0 U_\xi^\dagger = \rho_1(\xi) \rightarrow \mathcal{N}(\rho_1) = \rho_\xi$ .

D'une façon générale, un bruit quantique qui agit sur un système quantique constitue une évolution non unitaire qui transforme son état quantique  $\rho$  (un opérateur densité) en un état quantique bruité  $\rho'$  (un autre opérateur densité) selon une opération quantique complètement positive et préservant la trace, qui peut s'écrire [5, 6]

$$\rho \longrightarrow \rho' = \mathcal{N}(\rho) = \sum_{\ell} \Lambda_{\ell} \rho \Lambda_{\ell}^{\dagger}. \quad (2)$$

Les  $\Lambda_{\ell}$  dans l'Éq. (2) sont des opérateurs linéaires (opérateurs de Kraus) qui vérifient  $\sum_{\ell} \Lambda_{\ell}^{\dagger} \Lambda_{\ell} = \mathbf{I}$ , où  $\mathbf{I}$  est l'opérateur identité, et ils caractérisent le bruit quantique.

Nous considérons ici qu'agit un bruit dépolarisant, qui est un bruit quantique de référence, fondamental pour le qubit, et qui constitue, à un certain titre, le bruit le plus sévère sur le qubit, représentant ainsi une forme de cas extrême [6]. Pour le bruit dépolarisant sur le qubit [5, 12], les opérateurs de Kraus  $\Lambda_{\ell}$  de l'Éq. (2) sont constitués avec les trois opérateurs de Pauli et l'identité  $\mathbf{I}_2$  qui a eux quatre forment une base orthogonale  $\{\mathbf{I}_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ , appliqués avec une pondération probabiliste appropriée où l'Éq. (2) revêt la forme

$$\mathcal{N}(\rho) = (1 - p')\rho + \frac{p'}{3}(\sigma_x \rho \sigma_x^{\dagger} + \sigma_y \rho \sigma_y^{\dagger} + \sigma_z \rho \sigma_z^{\dagger}). \quad (3)$$

Puisque pour tout  $\rho$  on dispose [5, 6] de l'égalité  $\rho + \sigma_x \rho \sigma_x^{\dagger} + \sigma_y \rho \sigma_y^{\dagger} + \sigma_z \rho \sigma_z^{\dagger} = 2\mathbf{I}_2$ , on a accès pour l'Éq. (3) à la forme alternative [4, 5, 6]

$$\mathcal{N}(\rho) = (1 - p)\rho + p \frac{\mathbf{I}_2}{2}, \quad (4)$$

avec  $p = 4p'/3$ , qui offre une interprétation simple et concrète de l'action du bruit dépolarisant sur le qubit. D'après l'Éq. (4), l'action du bruit dépolarisant peut se décrire comme laissant l'état  $\rho$  du qubit inchangé avec la probabilité  $1 - p$ , ou bien forçant son état  $\rho$  dans l'état maximalement dépolarisé  $\mathbf{I}_2/2$  avec la probabilité  $p$ . C'est donc le signal sonde transformé bruité  $\mathcal{N}[\rho_1(\xi)] = \rho_\xi$  qui est accessible pour estimer la phase  $\xi$ , conformément à la Fig. 2.

On prépare le signal sonde dans l'état pur  $|\psi_0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  associé à l'opérateur densité  $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  qui constitue une sonde optimale selon [10]. L'état transformé  $U_\xi |\psi_0\rangle = (|0\rangle + e^{i\xi} |1\rangle)/\sqrt{2} = |\psi_1\rangle$  est aussi un état pur, associé à l'opérateur densité  $\rho_1(\xi) = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| = U_\xi \rho_0 U_\xi^\dagger = (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + e^{-i\xi} |0\rangle\langle 1| + e^{i\xi} |1\rangle\langle 0|)/2$ . L'état transformé bruité  $\rho_\xi = \mathcal{N}(\rho_1)$  produit par l'évolution non unitaire des Éqs. (3) ou (4), est en général un état mélangé, représentant un ensemble statistique d'états purs, et via l'Éq. (3) ou (4) il est décrit par l'opérateur densité qui résulte comme

$$\rho_\xi = \frac{1}{2} \left[ |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + (1 - p) \left( e^{-i\xi} |0\rangle\langle 1| + e^{i\xi} |1\rangle\langle 0| \right) \right]. \quad (5)$$

Pour la mesure de l'état bruité  $\rho_\xi$  en vue d'estimer  $\xi$ , on considère une mesure projective du qubit dans la base orthogonale  $\{|\psi_0\rangle, |\psi_0^\perp\rangle\}$  de  $\mathcal{H}_2$  avec  $|\psi_0^\perp\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ . Lors de la mesure quantique [5] la probabilité de projeter sur  $|\psi_0\rangle$  est

$$\langle\psi_0|\rho_\xi|\psi_0\rangle = \frac{1}{2} [1 + (1 - p) \cos(\xi)], \quad (6)$$

et sur  $|\psi_0^\perp\rangle$  la probabilité complémentaire à 1.

Une stratégie standard d'estimation de  $\xi$  consiste à répéter  $N$  fois l'expérience où le signal sonde est préparé dans le même état  $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  et le signal transformé bruité  $\rho_\xi$  résultant est mesuré dans la base  $\{|\psi_0\rangle, |\psi_0^\perp\rangle\}$  pour enregistrer un nombre  $N_0$  de résultats projetant sur  $|\psi_0\rangle$  selon la probabilité de l'Éq. (6), et  $N - N_0$  projetant sur  $|\psi_0^\perp\rangle$ . L'estimateur du maximum de vraisemblance est alors

$$\hat{\xi} = \arccos \left( \frac{1}{1 - p} \frac{2N_0 - N}{N} \right); \quad (7)$$

sa performance peut s'évaluer par l'erreur quadratique moyenne  $e_1 = \langle(\hat{\xi} - \xi)^2\rangle$  qui dans le cas où  $N$  est grand est bien représentée par  $e_1 = 1/[NF_1(\xi)]$  où  $F_1(\xi)$  est l'information de Fisher classique contenue dans le résultat d'une mesure au sujet du paramètre inconnu  $\xi$ . Elle s'exprime comme  $F_1(\xi) = \sum_k (\partial P_k / \partial \xi)^2 / P_k$  où les  $P_k$  sont les probabilités des différents (deux ici) résultats accessibles à la mesure, selon l'Éq. (6), ce qui conduit à l'information de Fisher

$$F_1(\xi) = \frac{(1 - p)^2 \sin^2(\xi)}{1 - (1 - p)^2 \cos^2(\xi)}, \quad (8)$$

et à l'erreur quadratique moyenne à  $N$  grand

$$e_1 = \frac{1 - (1 - p)^2 \cos^2(\xi)}{(1 - p)^2 \sin^2(\xi)} \frac{1}{N}. \quad (9)$$

On peut alors étudier l'influence du niveau de bruit évalué par la probabilité  $p$  de l'Éq. (4) sur la performance d'estimation. Avant d'en venir là, nous allons introduire le bénéfice d'un second qubit intriqué.

### 3 Estimation sur une paire de qubits

Une paire de qubits se trouve dans un état conjoint qui appartient à l'espace produit tensoriel  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ . La paire est intriquée quand, mathématiquement, son état dans  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$  ne peut pas se factoriser comme un produit tensoriel de deux états à un qubit de  $\mathcal{H}_2$ . Dans une paire intriquée, chaque qubit individuellement ne possède pas d'état local défini ; seule la paire possède un état global délocalisé. Physiquement, il en résulte que la paire se comporte comme un tout délocalisé, avec ce qui peut se manifester comme des interactions à distance, non locales et instantanées.

Pour servir de sonde, on prépare maintenant une paire de qubits dans l'état  $\rho_0$  qui est à présent un état sur l'espace produit tensoriel  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ . La paire de qubit interagit avec le processus  $\xi$ -dépendant  $U_\xi$  à estimer selon la Fig. 3. Ainsi, seul le premier qubit de la paire est exposé au processus  $U_\xi$  et au bruit, alors que le second qubit est laissé intouché. D'une façon concrète, le premier qubit représente par exemple un photon qui est conduit par une fibre optique vers l'entrée de l'interféromètre, où il pénètre puis ressort pour être reconduit par une autre fibre optique vers l'appareil de mesure au laboratoire, et ce faisant se charge de bruit ; alors que le second qubit, lui, reste bien à l'abri au laboratoire et ne voit rien ni du processus  $U_\xi$  ni du bruit.<sup>1</sup> Toutefois, de façon très contre-intuitive, ce second qubit, s'il est quantiquement intriqué au premier, permet un bénéfice net pour l'estimation, comme nous allons le montrer.

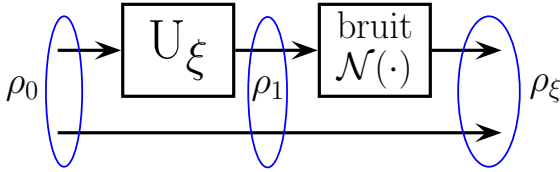


FIGURE 3 – Interaction d'une paire de qubits intriqués avec le processus  $U_\xi$  et le bruit quantique.

Le signal sonde à deux qubits  $\rho_0$  est donc transformé par le processus  $\xi$ -dépendant via l'opérateur produit tensoriel  $U_\xi \otimes I_2$ , pour donner l'état  $\rho_1(\xi) = (U_\xi \otimes I_2)\rho_0(U_\xi \otimes I_2)^\dagger$ . Le bruit dépolarisant, qui lui aussi n'affecte que le premier qubit de la paire, délivre l'état transformé bruité à deux qubits pouvant s'exprimer par  $\rho_\xi = \mathcal{N} \otimes \mathcal{I}(\rho_1)$ , avec  $\mathcal{I}(\cdot)$  l'application identité de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$  vers  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$  définie par  $\mathcal{I}(|j\rangle\langle k|) = |j\rangle\langle k|$  sur la base canonique  $\{|j\rangle\langle k|; j, k = 0, 1\}$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ .

On prépare alors le signal sonde dans l'état  $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  avec le vecteur d'état maximalement intriqué à deux qubits  $|\psi_0\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ . Alors, avec les définitions de l'Éq. (1) pour  $U_\xi$  et de l'Éq. (3) pour le bruit  $\mathcal{N}(\cdot)$ , engagées dans les produits tensoriels, on aboutit finalement à l'état transformé bruité  $\rho_\xi$  à deux qubits,

$$\begin{aligned} \rho_\xi = & \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{p}{2}\right) (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + \right. \\ & (1-p) \left( e^{-i\xi} |00\rangle\langle 11| + e^{i\xi} |11\rangle\langle 00| \right) + \\ & \left. \frac{p}{2} (|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Pour la mesure de l'état bruité  $\rho_\xi$  en vue d'estimer  $\xi$ , on

1. Notons qu'il est possible de montrer que l'action du bruit dépolarisant  $\mathcal{N}(\cdot)$  commute avec l'action de l'opérateur unitaire  $U_\xi$ , ce qui fait que le bruit  $\mathcal{N}(\cdot)$  sur la Fig. 2 pourrait équivalentement être placé avant  $U_\xi$ . On peut même envisager un bruit dépolarisant distribué, avec une part agissant avant  $U_\xi$  et une après, le tout étant équivalent à un unique bruit  $\mathcal{N}(\cdot)$  comme sur la Fig. 2.

considère une mesure projective de la paire de qubits dans la base orthonormale  $\{|\psi_0\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$  de  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ , avec  $|\beta_{01}\rangle = (|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ ,  $|\beta_{10}\rangle = (|00\rangle - |11\rangle)/\sqrt{2}$  et  $|\beta_{11}\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$ . Cette base projective de  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$  est formée des 4 états dits de Bell qui sont 4 états orthogonaux maximalement intriqués à deux qubits [5].

Lors de la mesure quantique [5] la probabilité de projeter sur  $|\psi_0\rangle$  est

$$\langle\psi_0|\rho_\xi|\psi_0\rangle = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{p}{2} + (1-p) \cos(\xi) \right], \quad (11)$$

la probabilité de projeter sur  $|\beta_{10}\rangle$  est

$$\langle\beta_{10}|\rho_\xi|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{p}{2} - (1-p) \cos(\xi) \right], \quad (12)$$

la probabilité de projeter sur  $|\beta_{01}\rangle$  est identique à celle de projeter sur  $|\beta_{11}\rangle$  et vaut

$$\langle\beta_{01}|\rho_\xi|\beta_{01}\rangle = \langle\beta_{11}|\rho_\xi|\beta_{11}\rangle = \frac{p}{4}. \quad (13)$$

Pour estimer  $\xi$ , on reproduit la stratégie standard d'estimation de la Section 2 consistant à répéter  $N$  fois l'expérience où le signal sonde à deux qubits est préparé dans le même état  $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  et le signal transformé bruité  $\rho_\xi$  résultant est mesuré dans la base  $\{|\psi_0\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$  pour enregistrer un nombre  $N_0$  de résultats projetant sur  $|\psi_0\rangle$ , un nombre  $N_{10}$  de résultats projetant sur  $|\beta_{10}\rangle$ , un nombre  $N_{01}$  sur  $|\beta_{01}\rangle$  et un nombre  $N_{11}$  sur  $|\beta_{11}\rangle$ , avec  $N_0 + N_{10} + N_{01} + N_{11} = N$ . L'estimateur du maximum de vraisemblance est alors

$$\hat{\xi} = \arccos \left( \frac{1 - p/2}{1 - p} \frac{N_0 - N_{10}}{N_0 + N_{10}} \right); \quad (14)$$

sa performance est évaluée par l'erreur quadratique moyenne  $e_2 = \langle(\hat{\xi} - \xi)^2\rangle$  qui dans le cas où  $N$  est grand est aussi représentée par  $e_2 = 1/[NF_2(\xi)]$  où  $F_2(\xi)$  est l'information de Fisher classique qui s'exprime comme  $F_2(\xi) = \sum_k (\partial P_k / \partial \xi)^2 / P_k$  où les  $P_k$  sont les probabilités des différents (quatre ici) résultats accessibles à la mesure de la paire de qubits selon les Éq. (11)–(13), ce qui conduit à l'information de Fisher

$$F_2(\xi) = \frac{(1 - p/2)(1 - p)^2 \sin^2(\xi)}{(1 - p/2)^2 - (1 - p)^2 \cos^2(\xi)}, \quad (15)$$

et donc à l'erreur quadratique moyenne à  $N$  grand

$$e_2 = \frac{(1 - p/2)^2 - (1 - p)^2 \cos^2(\xi)}{(1 - p/2)(1 - p)^2 \sin^2(\xi)} \frac{1}{N}. \quad (16)$$

Pour illustration du bénéfice apporté par la paire intriquée, la Fig. 4 compare les informations de Fisher classiques  $F_1(\xi)$  de l'Éq. (8) et  $F_2(\xi)$  de l'Éq. (15), en fonction du niveau de bruit évalué par la probabilité  $p$  de l'Éq. (4).

La Fig. 4 montre qu'à  $p = 0$ , i.e. sans bruit,  $F_1(\xi)$  et  $F_2(\xi)$  coïncident, mais dès qu'un bruit non nul existe, i.e. à  $p > 0$ , alors  $F_2(\xi)$  devient strictement supérieure à  $F_1(\xi)$ , indiquant une supériorité du protocole d'estimation de la Fig. 3 à deux qubits intriqués sur le protocole de la Fig. 2 à un seul qubit. L'encart de la Fig. 4 qui montre des erreurs quadratiques moyennes  $e_1$  et  $e_2$  évaluées numériquement à  $N = 10$  petit (avec  $10^4$  répétitions par valeur de  $p$ ), atteste aussi de la supériorité du protocole à deux qubits intriqués qui réalise une plus faible erreur d'estimation.

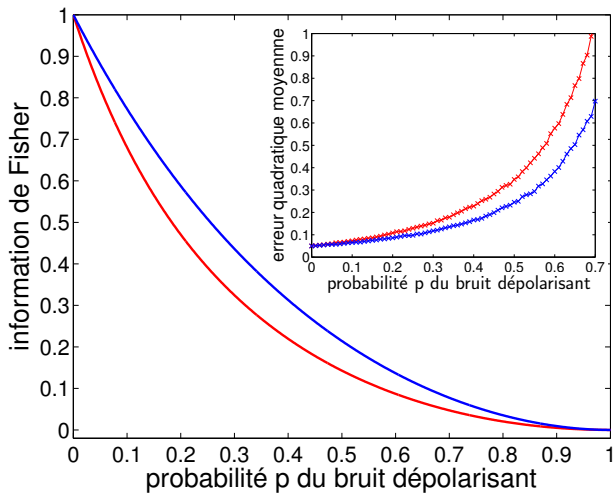


FIGURE 4 – En fonction du niveau de bruit évalué par la probabilité  $p$  de l'Éq. (4), pour la valeur  $\xi = \pi/4$  du déphasage, en rouge pour l'estimation à un qubit selon la Fig. 2 l'information de Fisher  $F_1(\xi)$  de l'Éq. (8), en bleu pour l'estimation à deux qubits intriqués selon la Fig. 3 l'information de Fisher  $F_2(\xi)$  de l'Éq. (15). L'encart montre des erreurs quadratiques moyennes  $e_1$  et  $e_2$  évaluées numériquement à  $N = 10$ .

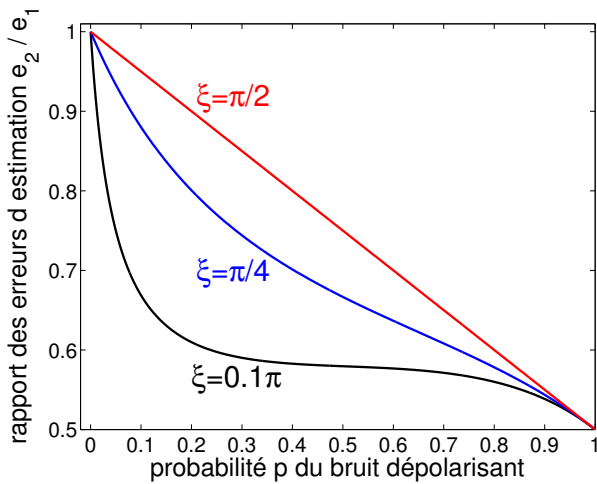


FIGURE 5 – Rapport  $e_2/e_1$  des erreurs quadratiques moyennes d'estimation des Éqs. (9) et (16) associées aux deux protocoles d'estimation des Figs. 2 et 3, en fonction du niveau de bruit évalué par la probabilité  $p$  de l'Éq. (4), à trois valeurs du déphasage  $\xi$ .

Une autre traduction du bénéfice de l'intrication est fournie par la Fig. 5 qui montre le rapport  $e_2/e_1$  des erreurs quadratiques moyennes d'estimation issues des Éqs. (9) et (16), en fonction du niveau de bruit  $p$ .

La Fig. 5 montre qu'à  $p = 0$ , i.e. sans bruit,  $e_2/e_1 = 1$  indique que les deux protocoles d'estimation présentent la même erreur quadratique ; toutefois dès qu'un bruit non nul existe, i.e. à  $p > 0$ , alors  $e_2/e_1 < 1$  indique une erreur d'estimation strictement plus faible pour le protocole à deux qubits intriqués de la Fig. 3. À très fort bruit, quand  $p \rightarrow 1$ , la Fig. 5 montre que  $e_2/e_1 \rightarrow 0.5$  indiquant une erreur deux fois plus faible pour le protocole à deux qubits intriqués.

## 4 Conclusion

Pour la tâche d'estimation paramétrique étudiée, il est important de souligner le caractère a priori inattendu et contre-

intuitif du bénéfice apporté par l'intrication et illustré sur les Figs. 4–5. Le second qubit de la paire intriquée, comme traduit par la Fig. 3, n'interagit jamais avec le processus à estimer ; néanmoins sa présence est capable d'augmenter en quelque sorte l'information extraite du processus, pour ainsi améliorer son estimation. Toutefois, l'analyse montre également que cette amélioration par l'intrication ne survient qu'en présence de bruit quantique ou de décohérence – ce qui constitue une situation plus réaliste mais aussi plus difficile à analyser, en général. Au delà de la situation étudiée ici, l'intrication peut être exploitée de façons très diverses et encore largement à explorer, pour offrir un apport spécifiquement quantique au bénéfice du traitement du signal et de l'information.

## Références

- [1] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*. New York : Academic Press, 1976.
- [2] G. M. D'Ariano, P. Lo Presti, M. G. A. Paris, "Using entanglement improves the precision of quantum measurements," *Physical Review Letters*, vol. 87, pp. 270404,1–4, 2001.
- [3] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, "Quantum-enhanced measurements : Beating the standard quantum limit," *Science*, vol. 306, pp. 1330–1336, 2004.
- [4] Z. Ji, G. Wang, R. Duan, Y. Feng, M. Ying, "Parameter estimation of quantum channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, pp. 5172–5185, 2008.
- [5] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
- [6] M. M. Wilde, *Quantum Information Theory*. Cambridge : Cambridge University Press, 2013.
- [7] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, "Advances in quantum metrology," *Nature Photonics*, vol. 5, pp. 222–229, 2011.
- [8] B. M. Escher, R. L. de Matos Filho, L. Davidovich, "General framework for estimating the ultimate precision limit in noisy quantum-enhanced metrology," *Nature Physics*, vol. 7, pp. 406–411, 2011.
- [9] A. Smirne, J. Kołodyński, S. F. Huelga, R. Demkowicz-Dobrzański, "Ultimate precision limits for noisy frequency estimation," *Physical Review Letters*, vol. 116, pp. 120801,1–6, 2015.
- [10] F. Chapeau-Blondeau, "Optimized probing states for qubit phase estimation with general quantum noise," *Physical Review A*, vol. 91, pp. 052310,1–13, 2015.
- [11] F. Chapeau-Blondeau, "Détection quantique optimale sur un qubit bruité," in *Actes 25è Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Lyon, France, 8–11 sept. 2015.
- [12] F. Chapeau-Blondeau, "Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, pp. 4500–4510, 2015.
- [13] B. P. Abbott, *et al.*, "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger," *Physical Review Letters*, vol. 116, pp. 061102,1–16, 2016. ■