

# Arbres de Markov triplets pour la segmentation d'images

Jean-Baptiste COURBOT<sup>1,2</sup>, Emmanuel MONFRINI<sup>3</sup>, Vincent MAZET<sup>1</sup>, Christophe COLLET<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ICube, Université de Strasbourg - CNRS, 67412 Illkirch, France

<sup>2</sup>Univ Lyon, Univ Lyon1, Ens de Lyon, CNRS, CRAL UMR5574, F-69230, Saint-Genis-Laval, France

<sup>3</sup>Département CITI, CNRS, UMR 5157 SAMOVAR, 91011 Évry, France

jb.courbot@unistra.fr

**Résumé** – Cet article présente un modèle d'arbre de Markov triplet qui minimise l'effet de bloc parfois rencontré lors de la segmentation d'images par des modèles d'arbres de Markov cachés (AMC). Nous présentons les spécificités du modèle, la segmentation bayésienne au sens du MPM (Maximum Posterior Mode), ainsi qu'une méthode d'estimation des paramètres dans le contexte non supervisé. L'application sur des images de synthèse améliore largement les résultats obtenus en utilisant les AMC et montrent en particulier l'efficacité de la modélisation pour des signaux extrêmement ténus (−15 à −10 dB).

**Abstract** – This paper introduces a Triplet Markov Tree model designed to minimize the block effect that may be encountered while performing image segmentation using Hidden Markov Tree (HMT) modeling. We present the model specificities, the Bayesian MPM segmentation, and a parameter estimation strategy for the unsupervised context. Results on synthetic images show that the method greatly improves over HMT-based segmentation, and that the model performs very well for extremely faint signal segmentation (−15 to −10 dB).

## 1 Introduction

Les modèles de Markov sont souvent employés de manière satisfaisante pour la segmentation bayésienne d'images. Parmi ceux-ci, nous pouvons citer les modèles par chaînes, par champs ou par arbres de Markov cachés [13]. La segmentation repose sur l'utilisation, dans le contexte approprié, de critères bayésiens comme le *maximum posterior mode* (MPM) [8] ou le *maximum a posteriori* (MAP) [6].

Les modèles par chaînes de Markov offrent, outre une certaine rapidité de traitement, la possibilité de calculer exactement les valeurs des probabilités *a posteriori* de la classification  $\mathbf{X}$  à partir de l'observation  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ , requises pour la segmentation. Bien que ce modèle ne soit pas intuitif, il offre des applications généralement performantes. La modélisation par champs de Markov est en comparaison plus riche. La contrepartie de cette richesse réside dans l'impossibilité de calculer exactement les probabilités *a posteriori*, rendant nécessaire le recours à l'échantillonnage de Gibbs [6].

Un compromis entre la richesse de modélisation et la possibilité d'effectuer les calculs exacts, évitant le recours à des méthodes stochastiques, semble exister avec les modèles par arbres de Markov cachés à bruit indépendant (AMC-BI) [7]. Cette modélisation permet d'exploiter, dans un contexte de segmentation, une hiérarchie traduisant l'homogénéité spatiale des classifications recherchées. Cet aspect a pour principal défaut d'introduire, dans les cas difficiles, des résultats de segmenta-

tion présentant des effets « blocs » relativement marqués. Plusieurs types de modèles ont été proposés pour compenser cet effet. Citons par exemple les modèles d'arbres de Markov *évolutifs* [11], dans lesquels les probabilités de transition parent-enfant changent de manière déterminée, selon l'échelle. Il existe également des modélisations par *champs hiérarchiques* [9] où chaque *a priori* est markovien spatialement, sur chaque échelle de l'arbre.

Les modèles basés sur des arbres de Markov, tout comme les modèles par chaînes ou par champs, ont été enrichis par l'introduction de modèles *triplets* [1, 12, 14]. Dans ce cadre, en plus du processus observé  $\mathbf{Y}$  et du processus de classe  $\mathbf{X}$ , un troisième processus,  $\mathbf{U}$ , est adjoint, dans le but de modéliser des phénomènes plus complexes, comme des directions privilégiées par exemple [3].

Dans cet article, nous proposons un modèle d'arbre de Markov triplet (AMT) dans lequel le processus auxiliaire permet de réguler les probabilités de transitions entre un site et le site enfant, en tenant compte des classifications des voisins du parent. Ce modèle sera appelé « AMT spatial » (AMTS) et sera introduit en section 2, avec la segmentation au sens du MPM. Nous appliquons ce modèle dans le cas d'une observation en section 3. Enfin, les résultats présentés en section 4 montrent le gain apporté par notre modélisation pour la segmentation d'images fortement bruitées, par rapport aux méthodes d'arbres de Markov cachés (AMC) classiques.

J.-B. Courbot mentionne le soutien de la bourse ERC 339659-MUSICOS. Ce travail a été partiellement financé par le projet DSIM (bourse ANR-14-CE27-0005).

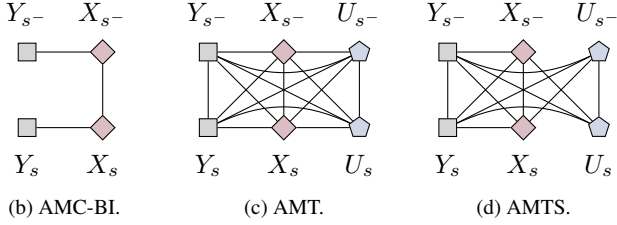
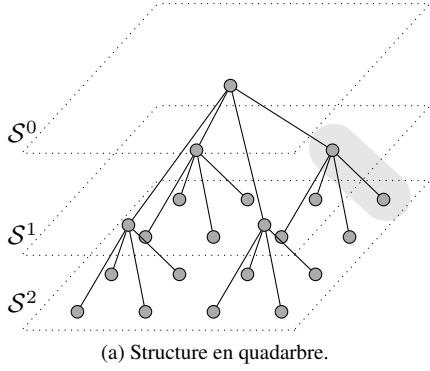


FIGURE 1 – Détail des transitions parent-enfant (région grisée dans (a)) pour les différents modèles.

## 2 Arbre de Markov triplet spatial

### 2.1 Modèle général

Soit  $\mathbf{T} = (T_s)_{s \in \mathcal{S}}$  un processus stochastique, où  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des résolutions d'un quadarbre :  $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}^0, \dots, \mathcal{S}^N\}$ . Chaque  $\mathcal{S}^n$  contient  $4^n$  sites :  $n = 0$  représente la racine de l'arbre, et  $n = N$  la plus fine résolution. De plus,  $\mathbf{T} = (\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{U})$ , où  $\mathbf{Y}$  est un processus d'observation,  $\mathbf{X}$  est un processus de classe et  $\mathbf{U}$  est un processus auxiliaire. Nous avons :  $T_s = (Y_s, X_s, U_s) \in \mathbb{R} \times \Omega_x \times \Omega_u$ , avec  $\Omega_x$  et  $\Omega_u$  des ensembles finis.

Formellement,  $\mathbf{T}$  est un arbre de Markov [7], et vérifie :

$$p(\mathbf{T}) = p(T_0) \prod_{s \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0} p(T_s | T_{s^-}); \quad (1)$$

où  $s^-$  est le site parent de  $s$ , et  $T_0$  est la valeur de  $T_s$  en la racine  $s \in \mathcal{S}^0$ .

$\mathbf{U}$  est un processus auxiliaire, qui permet de faire varier la loi de  $\mathbf{X}$  à chaque transition parent-enfant. Chaque  $U_s$  est un vecteur aléatoire de même loi que  $(X_v)_{v \in V_s}$ , où  $V_s$  est un voisinage (à définir) de  $s$ . Dans ce qui suit, nous supposons que  $X_s$  et  $U_s$  sont indépendants conditionnellement à  $T_{s^-}$ . Sans perte de généralité, cela nous permet d'écrire  $\forall s \in \{\mathcal{S}^1, \dots, \mathcal{S}^N\}$  :

$$p(T_s | T_{s^-}) = p(Y_s | X_s, U_s, T_{s^-}) p(X_s | T_{s^-}) p(U_s | T_{s^-}) \quad (2)$$

Les trois distributions de cette équation seront précisées dans la section 3. La figure 1 représente le graphe de dépendance du quadarbre, et les dépendances intervenant au sein de l'AMC-BI, de l'AMT et de l'AMTS.

### 2.2 Segmentation au sens du MPM

Nous choisissons d'effectuer la segmentation grâce à l'estimateur du MPM. Par souci de concision, nous noterons  $p(A = a)$  sous la forme  $p(a)$  lorsque cela est possible. L'estimateur du MPM requiert le calcul, en tout site  $s \in \mathcal{S}$ , de  $p(\omega_i, \nu_j | \omega_k, \nu_l, \mathbf{y})$ , pour toutes les valeurs  $(\omega_i, \nu_j, \omega_k, \nu_l) \in (\Omega_x \times \Omega_u)^2$ . L'algorithme présenté en [10], adapté au cas des AMT, permet le calcul du MPM et comporte les cinq étapes décrites ci-dessous. Il repose sur l'utilisation de fonctions auxiliaires notées  $A_n, 0 \leq n \leq N$ , qui sont calculées dans la *passé montante* suivante :

1. À la plus fine résolution,  $\forall s \in \mathcal{S}^N$  :

$$A_N(s; \omega_i, \nu_j, \omega_k, \nu_l) = p(y_s, \omega_i, \nu_j | y_{s^-}, \omega_k, \nu_l). \quad (3)$$

2. Sur les résolutions intermédiaires,  $\forall s \in \{\mathcal{S}^1, \dots, \mathcal{S}^{N-1}\}$  :

$$A_n(s; \omega_i, \nu_j, \omega_k, \nu_l) = p(y_s, \omega_i, \nu_j | y_{s^-}, \omega_k, \nu_l) \times \prod_{s^+ \in \mathcal{E}_s} \left( \sum_{(\omega, \nu) \in \Omega_x \times \Omega_u} A_{n+1}(s^+; \omega, \nu, \omega_i, \nu_j) \right). \quad (4)$$

où  $\mathcal{E}_s$  est l'ensemble des enfants de  $s$ .

3. En la racine,  $r \in \mathcal{S}^0$  :

$$A_0(\omega_i, \nu_j) = p(y_0, \omega_i, \nu_j) \times \prod_{s^+ \in \mathcal{E}_0} \left( \sum_{(\omega, \nu) \in \Omega_x \times \Omega_u} A_1(s^+; \omega, \nu, \omega_i, \nu_j) \right); \quad (5)$$

où  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{S}^1$ .

Un AMT étant markovien *a posteriori* [12], il est possible de calculer  $p(X_s = \omega_i, U_s = \nu_j | \mathbf{y})$  pour  $s \in \mathcal{S}^N$  et  $(\omega_i, \nu_j) \in \Omega_x \times \Omega_u$ . Ce calcul s'effectue dans la *passé descendante* suivante :

4. La sélection de la classe la plus probable en la racine, avec la distribution *a posteriori* obtenue par :

$$p(X_r = \omega_i, U_r = \nu_j | \mathbf{y}) = \frac{A_0(\omega_i, \nu_j)}{\sum_{(\omega, \nu) \in \Omega_x \times \Omega_u} A_0(\omega, \nu)}. \quad (6)$$

5. La sélection, en chaque site  $\forall s \in \{\mathcal{S}^1, \dots, \mathcal{S}^N\}$ , de la classe la plus probable, avec les distributions *a posteriori* suivantes :

$$p(X_s = \omega_i, U_s = \nu_j | X_{s^-} = \omega_k, U_{s^-} = \nu_l, \mathbf{y}) = \frac{A_n(s; \omega_i, \nu_j, \omega_k, \nu_l)}{\sum_{(\omega, \nu) \in \Omega_x \times \Omega_u} A_n(s; \omega, \nu, \omega_k, \nu_l)}. \quad (7)$$

Une fois cette cascade de sélection effectuée, la segmentation au sens du MPM est l'ensemble des  $\omega_i, \nu_j$  retenus à la résolution  $\mathcal{S}^N$ .

1. Remarquons que dans un AMT,  $p(\mathbf{X}, \mathbf{U} | \mathbf{Y} = y)$  est de Markov mais pas nécessairement  $p(\mathbf{X} | \mathbf{Y} = y)$ .

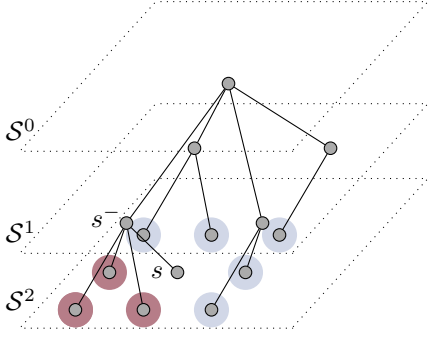


FIGURE 2 – Restriction du quadarbre présenté en figure 1(a) aux parents du 8-voisinage  $V_s$  d'un site  $s$ . Les disques rouges représentent les voisins de  $X_s$  enfants de  $X_{s-}$ , dont la distribution est donnée par (10). Les disques bleus représentent les voisins  $X_v$  de  $X_s$  qui ne sont pas enfants de  $X_{s-}$  (distribution (11)).

### 3 Application à la segmentation d'images

#### 3.1 Spécificités du modèle

Une image observée correspond à  $(Y_s)_{s \in \mathcal{S}^N}$ . Par ailleurs, nous supposons que :

$$p(Y_s | X_s, U_s, T_{s-}) = p(Y_s | X_s). \quad (8)$$

De plus,  $\forall s \in \{\mathcal{S}^1, \dots, \mathcal{S}^{N-1}\}$ , nous considérons formellement que  $p(Y_s | X_s, U_s, T_{s-}) \propto 1$ , et  $p(Y_0 | X_0, U_0) \propto 1$ .

Pour la construction du processus auxiliaire  $\mathbf{U}$ , le voisinage correspond aux 8 plus proches voisins à la même résolution. Chaque  $U_s$  est donc 8-varié :  $U_s = (U_{s,1}, \dots, U_{s,8})$ . Comme  $U_s$  a la même distribution que  $(X_v)_{v \in V_s}$ , et comme conditionnellement à  $T_{s-}$ , les sites  $(X_v)_{v \in V_s}$  sont indépendants, alors :

$$p(U_s | T_{s-}) = p((X_v)_{v \in V_s} | T_{s-}) = \prod_{v \in V_s} p(X_v | T_{s-}). \quad (9)$$

$X_v$  peut faire partie des enfants de  $T_{s-}$  ou non (cf. figure 2). Dans le premier cas, nous définissons pour  $p(X_v | T_{s-})$  en s'inspirant d'un modèle de Potts :

$$p(X_s | T_{s-}) \propto \exp(\beta \delta_{X_s}^{X_{s-}} + \gamma \sum_{1 \leq k \leq 8} \delta_{U_{s-,k}}^{X_s}); \quad (10)$$

où  $\delta_a^b$  est le produit de Kronecker et vaut 1 si  $a = b$  et 0 sinon, et  $\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres du modèle. Remarquons que lorsque  $\gamma = 0$ , on se ramène aux probabilités standard de transition parent-enfant utilisées dans un arbre de Markov caché.

Dans le second cas, lorsque  $X_v$  ne fait pas partie des enfants de  $T_{s-}$ , nous savons que  $X_v \in (X_w)_{w \in V_{s-}}$ . Supposons sans perte de généralité que  $U_{s-,k}$  occupe le même site que le père de  $v$ . Nous définissons alors :

$$p(X_v | T_{s-}) \propto \exp(\beta \delta_{U_{s-,k}}^{X_v} + \gamma \delta_{X_{s-}}^{X_v} + \gamma \sum_{\substack{1 \leq k' \leq 8 \\ k' \neq k}} \delta_{U_{s-,k'}}^{X_v}). \quad (11)$$

Enfin, nous avons en la racine et  $\forall (\omega_i, \nu_j) \in \Omega_x \times \Omega_u$  :  $p(T_0 = (y_0, \omega_i, \nu_j)) = \pi_i$ ; où les  $\pi_i$  sont des paramètres du modèle, représentant l'a priori sur la racine de l'arbre.

Notons qu'en pratique, la notion de 8-voisinage n'est pas définie sur la bordure de l'image. Dans l'implémentation du modèle, les bords sont dupliqués afin de contourner cette limitation. Dans la suite, nous retenons un modèle de bruit gaussien de paramètres  $\mu_i, \sigma_i$  et nous considérons une segmentation en  $|\Omega_x| = 2$  classes.

#### 3.2 Estimation des paramètres

Les paramètres du modèle sont  $\{\mu_0, \mu_1, \sigma_0, \sigma_1, \pi_0, \pi_1, \gamma, \beta\}$ . En contexte non supervisé, les paramètres sont estimés à partir de  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$  seulement. Nous présentons dans un premier temps les estimateurs sur les données complètes  $(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ . L'estimation de  $\mu_k$  et  $\sigma_k$  se fait avec les estimateurs du maximum de vraisemblance sur le couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . L'estimation des  $\pi_k$  se fait directement à partir du calcul des probabilités *a posteriori* (6) :  $\hat{\pi}_k = p(X_r = \omega_k | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \sum_{\nu \in \Omega_u} p(X_r = \omega_k, U_r = \nu | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$ .

Nous détaillons maintenant les estimations de  $\beta$  et  $\gamma$ , inspirées de l'estimation au sens des moindres carrés [5] pour des distributions de champs de Markov. Pour  $s \in \{\mathcal{S}^1, \dots, \mathcal{S}^N\}$  et  $\omega_i \neq \omega_j$  :

$$\frac{p(X_s = \omega_i | T_{s-})}{p(X_s = \omega_j | T_{s-})} = \exp[\beta (\delta_{X_{s-}}^{\omega_i} - \delta_{X_{s-}}^{\omega_j}) + \gamma \sum_{1 \leq k \leq 8} (\delta_{U_{s-,k}}^{\omega_i} - \delta_{U_{s-,k}}^{\omega_j})]. \quad (12)$$

Le terme de gauche est estimé grâce aux distributions *a posteriori* (7). En pratique, cet estimation est plus robuste que l'estimation par les fréquences. Cela nous amène à considérer l'estimation « partielle » de  $\beta$  pour tout couple  $(x_s, t_{s-})$  :

$$\hat{\beta}_{s,s-} = \frac{\log \left[ \frac{p(x_s = \omega_i | t_{s-}, \mathbf{Y} = \mathbf{y})}{p(x_s = \omega_j | t_{s-}, \mathbf{Y} = \mathbf{y})} \right] - \gamma \sum_{1 \leq k \leq 8} (\delta_{u_{s-,k}}^{\omega_i} - \delta_{u_{s-,k}}^{\omega_j})}{\delta_{x_{s-}}^{\omega_i} - \delta_{x_{s-}}^{\omega_j}}. \quad (13)$$

L'estimation de  $\beta$  au sens des moindres carrés est donc :

$$\hat{\beta} = \frac{1}{|\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0|} \sum_{s \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0} \hat{\beta}_{s,s-}. \quad (14)$$

En suivant le même raisonnement, nous pouvons avec (7) et poser pour tout  $(x_s, t_{s-})$  :

$$\hat{\gamma}_{s,s-} = \frac{\log \left[ \frac{p(x_s = \omega_i | t_{s-}, \mathbf{Y} = \mathbf{y})}{p(x_s = \omega_j | t_{s-}, \mathbf{Y} = \mathbf{y})} \right] - \beta (\delta_{x_{s-}}^{\omega_i} - \delta_{x_{s-}}^{\omega_j})}{\sum_{1 \leq k \leq 8} (\delta_{u_{s-,k}}^{\omega_i} - \delta_{u_{s-,k}}^{\omega_j})}. \quad (15)$$

Lorsque  $\sum_{1 \leq k \leq 8} (\delta_{u_{s-,k}}^{\omega_i} - \delta_{u_{s-,k}}^{\omega_j}) = 0$ , cette estimation « partielle » n'est pas définie. En notant  $C(s^-, i, j)$  cette grandeur, l'estimation de  $\gamma$  au sens des moindres carrés est donc :

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{s \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0} \mathbb{I}_{\{C(s^-, i, j) \neq 0\}} \hat{\gamma}_{s,s-}}{\sum_{s \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^0} \mathbb{I}_{\{C(s^-, i, j) \neq 0\}}}. \quad (16)$$

Les paramètres  $\{\mu_0, \mu_1, \sigma_0, \sigma_1, \pi_0, \pi_1, \gamma, \beta\}$  sont estimés avec la méthode itérative SEM [2]. Cette variante stochastique de

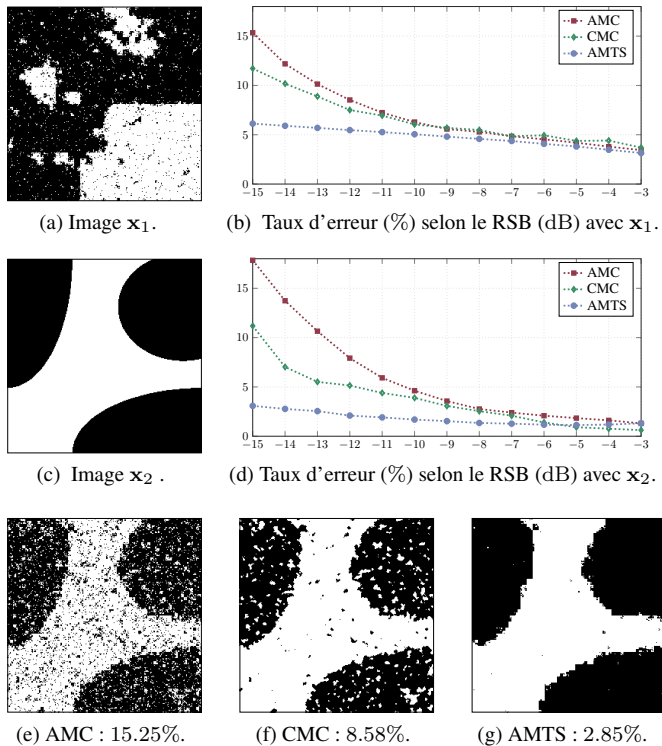


FIGURE 3 – Comparaison des résultats de l'AMC, du CMC et de l'AMTS. Les images de la troisième ligne montrent les segmentation d'une observation de  $x_2$  à  $-15$  dB, et les taux d'erreur associés.

EM [4] génère des réalisations de  $X$  et  $U$  à chaque itération, de sorte à mettre à jour les paramètres du modèle avec les estimateurs présentés dans cette section.

## 4 Résultats numériques

Nous utilisons deux images de synthèse  $x_1$  et  $x_2$  de taille  $256 \times 256$  pixels : l'une générée à l'aide d'une simulation d'AMT avec  $\beta = 2.25$  et  $\gamma = 0.25$  (figure 3a), l'autre présentant de grandes régions homogènes avec des contours plus nets et elliptiques (figure 3c). Nous prenons par ailleurs  $\mu_r = 0$ ,  $\mu_1 = 1$ , et  $\sigma_r = \sigma_1 = \sigma$ , de sorte à régler le rapport signal à bruit (RSB)  $20 \log_{10}(\bar{x}/\sigma)$ ,  $\bar{x}$  étant la valeur moyenne de  $x$ .

Des segmentations d'une image à RSB =  $-15$  dB dans le cadre d'un AMC classique, d'un modèle par champ de Markov caché (CMC) et pour l'AMTS présenté sont données en figures 3e, 3f et 3g. Elles illustrent la capacité du modèle à représenter de larges régions homogènes à faible RSB. En effet, dans ces situations, la segmentation par AMC, tout comme la segmentation par CMC, semblent ne pas concorder avec l'exigence d'homogénéité spatiale de l'image, ce qui induit un certain « mouchetage » lors des segmentations. Ce constat semble généralisé par les mesures des figures 3b et 3d, dans lesquelles sont représentées les taux d'erreur, moyennés sur 100 réalisations de  $y$ . Notons en particulier la faible augmentation du taux d'erreur lorsque le RSB diminue.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté un modèle d'AMTS, minimisant la structure en blocs parfois rencontrée avec des AMC. Nous avons décrit la segmentation bayésienne au sens du MPM, ainsi qu'une procédure d'estimation des paramètres pour le cas non supervisé. Les résultats illustrent en particulier la robustesse du modèle, avec notamment des résultats de segmentation de très bonne qualité même au sein d'images très bruitées. Les travaux futurs porteront notamment sur l'enrichissement du modèle de bruit, et sur la possibilité de proposer un AMT évolutif.

## Références

- [1] D. Benboudjema and W. Pieczynski. Unsupervised statistical segmentation of nonstationary images using triplet Markov fields. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 29(8) :1367–1378, 2007.
- [2] G. Celeux and J. Diebolt. L'algorithme SEM : un algorithme d'apprentissage probabiliste pour la reconnaissance de mélange de densités. *Revue de statistique appliquée*, 34(2) :35–52, 1986.
- [3] J.-B. Courbot, E. Monfrini, V. Mazet, and C. Collet. Oriented triplet Markov fields for hyperspectral image segmentation. In *WHISPERS*. IEEE, 2016.
- [4] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J. R. Stat. Soc. Series B*, pages 1–38, 1977.
- [5] H. Derin and H. Elliott. Modeling and segmentation of noisy and textured images using Gibbs random fields. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, (1) :39–55, 1987.
- [6] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 6 :721–741, 1984.
- [7] J.-M. Laferté, P. Pérez, and F. Heitz. Discrete Markov image modeling and inference on the quadtree. *IEEE Trans. Image Process.*, 9(3) :390–404, 2000.
- [8] J. Marroquin, S. Mitter, and T. Poggio. Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision. *J. Am. Stat. Assoc.*, 82(397) :76–89, 1987.
- [9] M. Mignotte, C. Collet, P. Pérez, and P. Bouthemy. Sonar image segmentation using an unsupervised hierarchical MRF model. *IEEE Trans. Image Process.*, 9(7) :1216–1231, 2000.
- [10] E. Monfrini, T. Ledru, E. Vaie, and W. Pieczynski. Segmentation non supervisée d'images par arbres de Markov cachés. In *17ème Colloque GRETSI*, 1999.
- [11] E. Monfrini and W. Pieczynski. Estimation de mélanges généralisés dans les arbres de Markov cachés, application à la segmentation des images de cartons d'orgue de barbarie. *Traitement du Signal*, 22(2), 2005.
- [12] W. Pieczynski. Arbres de Markov triplet et fusion de Dempster-Shafer. *Comptes Rendus Mathématique*, 336(10) :869–872, 2003.
- [13] W. Pieczynski. Modèles de Markov en traitements d'images. *Traitement du signal*, 20(3) :255–278, 2003.
- [14] W. Pieczynski, C. Hulard, and T. Veit. Triplet Markov chains in hidden signal restoration. In *International Symposium on Remote Sensing*, pages 58–68. International Society for Optics and Photonics, 2003.