

Nouvelles propriétés asymptotiques de détecteurs robustes

Gordana DRAŠKOVIĆ¹, Frédéric PASCAL¹, Arnaud BRELOY², Jean-Yves TOURNERET³

¹L2S, CentraleSupélec
3 rue Juliot Curie, 91192 Gif-surYvette, France

²LEME, Université Paris Ouest
92410 Ville d'Avray, France

³IRIT, ENSEEIHT
2 rue Charles Camichel, 31071 Toulouse, France

gordana.draskovic@l2s.centralesupelec.fr, frederic.pascal@l2s.centralesupelec.fr
a.breloy@gmail.com, jean-yves.tourneret@enseeiht.fr

Résumé – L'objectif de cet article est d'établir de nouvelles propriétés asymptotiques pour le filtre adapté normalisé adaptatif (*adaptive normalized matched filter - ANMF*). L'ANMF est ici construit avec un M -estimateur (M -ANMF) et est analysé sous les modèles de distributions symétriques complexes elliptiques (*complex elliptically symmetric (CES)*). Nous montrons que la distribution du détecteur M -ANMF peut être approchée avec beaucoup de précision par celle du détecteur ANMF construite avec la matrice de covariance empirique (MCE-ANMF) sous hypothèses gaussiennes. Cette propriété est intéressante car la loi du détecteur MCE-ANMF est connue sous forme analytique et donne une approximation plus précise de la loi du M -ANMF que celle obtenue avec la loi du NMF. Des simulations Monte-Carlo permettent d'illustrer ce résultat et son intérêt pour des données gaussiennes mais aussi hétérogènes.

Abstract – The purpose of this paper is to derive new asymptotic properties of the robust adaptive normalized matched filter (ANMF). More precisely, the ANMF built with M -estimators (M -ANMF) is analyzed under the framework of complex elliptically symmetric (CES) distributions. We show that the distribution of the detector constructed with the M -ANMF can be accurately approximated by the well-known distribution of the ANMF built with the sample covariance matrix (SCM-ANMF) under the Gaussian assumption. To that end, the asymptotic properties of the difference between both ANMF detectors are derived. By comparison with the state of the art, the asymptotic properties of the M -ANMF are shown to be better approximated by the SCM-ANMF when compared to the NMF (test built with the true covariance matrix). Some Monte-Carlo simulations support that claim and demonstrate the interest of this theoretical result.

1 Introduction

La théorie de la détection est un aspect important du traitement statistique du signal, en particulier pour les traitements radar (voir e.g., [1]). En pratique, les paramètres du bruit sont inconnus et doivent être estimés, notamment sa matrice de covariance dont la qualité d'estimation affecte fortement les performances du détecteur adaptatif résultant. Sous hypothèses gaussiennes, l'estimateur classiquement utilisé est la matrice de covariance empirique (MCE), distribuée selon une loi de Wishart [2] (à distance finie, i.e. pour un nombre d'échantillon N et une dimension m des observations fixés). En tant qu'estimateur du maximum de vraisemblance, la MCE possède de plus de bonnes propriétés asymptotiques. Cependant, lorsque la distribution des données n'est plus gaussienne ou que ces données sont corrompues par des données aberrantes (*outliers*), les performances de la MCE peuvent se dégrader fortement.

La théorie de l'estimation robuste offre dans ce cas une alternative grâce aux M -estimateurs, étudiés dans le cas réel dans [3]. Ces résultats ont été récemment étendus au cas complexe, plus approprié aux applications de traitement du signal, dans

[4]. La plupart des travaux sur l'estimation robuste de la matrice de covariance ont été menés dans le cadre de distributions symétriques elliptiques (CES) (voir e.g., [5]). Ces M -estimateurs, notamment l'estimateur de Tyler [6] ou du point fixe [7], noté $\hat{\mathbf{M}}_{FP}$, donnent de très bons résultats quand ils sont utilisés à la place de la vraie matrice de covariance, inconnue en pratique. Malheureusement, leur définition est implicite, ce qui rend leur analyse statistique difficile. Ainsi, certaines propriétés asymptotiques des M -ANMF ont été obtenues dans [8]. Le but de ce travail est de caractériser de façon plus fine les propriétés de l'ANMF construit avec les différents estimateurs robuste de la matrice de covariance. Pour cela, nous étudions la distribution asymptotique de la différence entre le MCE-ANMF (sous hypothèses gaussiennes) et le M -ANMF (sous hypothèses CES). Nous montrons particulièrement que cette différence converge plus vite vers 0 que pour le cas classique du théorème de la limite centrale, justifiant ainsi théoriquement l'utilisation des propriétés du MCE-ANMF pour caractériser celles du M -ANMF, plus robuste en pratique.

La section II introduit le contexte de travail. La section III présente la contribution théorique principale de cet article. En-

suite, des simulations Monte-Carlo illustrent les résultat théoriques dans la section IV et les conclusions sont données en section V.

Notations. Les vecteurs (resp. matrices) sont notés en lettres minuscules (resp. majuscules) grasses. T et H sont les opérateurs transposé et hermitien. \mathcal{N} et \mathcal{CN} représentent les distributions gaussiennes réelle et complexe. \sim signifie “est distribué comme”, \xrightarrow{d} représente la convergence en loi et \otimes le produit de Kronecker. vec est l’opérateur qui transforme une matrice de taille $m \times n$ en un vecteur de taille mn , en concaténant ses n colonnes en une seule. \mathbf{I} est la matrice identité, $\mathbf{0}$ le vecteur (ou la matrice) de zéros avec la dimension appropriée et \mathbf{K} est la matrice de commutation qui transforme $\text{vec}(\mathbf{A})$ en $\text{vec}(\mathbf{A}^T)$. Enfin, i.i.d. signifie indépendant et identiquement distribué.

2 Contexte

2.1 Distributions CES

Soit \mathbf{z} un vecteur aléatoire complexe circulaire de taille m . \mathbf{z} suit une distribution CES, notée $\mathcal{CES}_m(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{M}, g_{\mathbf{z}})$, si sa densité de probabilité (DDP) peut s’écrire

$$h_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = |\mathbf{M}|^{-1} g_{\mathbf{z}}\left((\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})\right) \quad (1)$$

où $g_{\mathbf{z}} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction telle que (1) définisse une DDP, $\boldsymbol{\mu}$ est l’espérance de \mathbf{z} et \mathbf{M} sa matrice de dispersion. \mathbf{M} contient la structure de la matrice de covariance de \mathbf{z} , i.e., cette matrice de covariance (si elle existe) est égale à \mathbf{M} , à un facteur près. La loi gaussienne, notée $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}_m(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{M})$, est un cas particulier de distribution CES obtenu pour $g_{\mathbf{x}}(x) \propto e^{-x}$. Ici, on suppose $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$.

2.2 M-estimateurs

Soit $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N)$ un N -échantillon de vecteurs complexes indépendants de taille m avec $\mathbf{z}_k \sim \mathcal{CES}_m(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{M}, g_{\mathbf{z}})$. Un M -estimateur de \mathbf{M} , noté $\widehat{\mathbf{M}}$, est défini comme la solution de l’équation suivante

$$\widehat{\mathbf{M}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(\mathbf{z}_k^H \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{z}_k) \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^H \quad (2)$$

où φ est une fonction réelle de pondération définie sur $[0, \infty)$ qui n’est pas nécessairement reliée à la DDP de la distribution CES.

La matrice de dispersion théorique de l’échantillon est définie comme la solution de

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{z}^H \mathbf{M}_\sigma^{-1} \mathbf{z}) \mathbf{z} \mathbf{z}^H] = \mathbf{M}_\sigma = \sigma^{-1} \mathbf{M}, \quad (3)$$

où $\sigma > 0$ est solution de $\mathbb{E}[\psi(\sigma\tau)] = m$ avec $\psi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma\tau)\sigma\tau$ et $\tau = \mathbf{z}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}$. Si $\widehat{\mathbf{M}}$ est un M -estimateur respectant les conditions de [3], alors

$$\sqrt{N} \text{vec}(\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}_\sigma) \xrightarrow{d} \mathcal{CN}_{m^2}(\mathbf{0}_{m^2,1}, \boldsymbol{\Sigma}_M, \boldsymbol{\Omega}_M) \quad (4)$$

où les matrices de covariance et de pseudo-covariance asymptotiques sont

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_M = \vartheta_1 \mathbf{M}_\sigma^T \otimes \mathbf{M}_\sigma + \vartheta_2 \text{vec}(\mathbf{M}_\sigma) \text{vec}(\mathbf{M}_\sigma)^H, \\ \boldsymbol{\Omega}_M = \vartheta_1 (\mathbf{M}_\sigma^T \otimes \mathbf{M}_\sigma) \mathbf{K} + \vartheta_2 \text{vec}(\mathbf{M}_\sigma) \text{vec}(\mathbf{M}_\sigma)^T. \end{cases} \quad (5)$$

Les constantes $\vartheta_1 > 0$ et $\vartheta_2 > -\vartheta_1/m$ sont données dans [4].

2.3 Distribution de Wishart

La distribution de Wishart complexe, $CW(N, \mathbf{M})$, est la distribution de $\sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H$, les \mathbf{x}_k ’s sont i.i.d. et $\mathbf{x}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{M})$ (loi circulaire). Soit

$$\widehat{\mathbf{M}}_{MCE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H \quad (6)$$

la MCE qui suit une distribution de Wishart (au facteur $1/N$ près). Sa distribution asymptotique est donnée par

$$\sqrt{N} \text{vec}(\widehat{\mathbf{M}}_{MCE} - \mathbf{M}) \xrightarrow{d} \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{M}, (\mathbf{M}^T \otimes \mathbf{M}) \mathbf{K}).$$

Ce résultat peut être vu comme un cas particulier de (4) avec $\vartheta_1 = 1$ and $\vartheta_2 = 0$ [9].

2.4 Test ANMF

On considère le problème consistant à détecter un signal complexe \mathbf{p} dans les données reçues $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{p} + \mathbf{c}$, où \mathbf{c} est le bruit complexe (fouillis), $\alpha \in \mathbb{C}$ l’amplitude complexe inconnue et \mathbf{p} un vecteur directionnel (*steering vector*) connu. Ce problème peut se formaliser à l’aide d’un test d’hypothèses binaires :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{z} = \mathbf{c} & \mathbf{z}_k = \mathbf{c}_k, \quad k = 1, \dots, N \\ H_1 : \mathbf{z} = \alpha \mathbf{p} + \mathbf{c} & \mathbf{z}_k = \mathbf{c}_k, \quad k = 1, \dots, N \end{cases}$$

où $\mathbf{c}_k \sim \mathcal{CES}_m(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{M}, g_{\mathbf{c}})$ sont N observations indépendantes ne contenant pas de signal et utilisées pour estimer la matrice de covariance. Ici, nous nous intéressons aux propriétés du détecteur ANMF [1] :

$$H(\widehat{\mathbf{M}}) = \frac{|\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{z}|^2}{(\mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{p})(\mathbf{z}^H \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{z})} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lesseqgtr}} \lambda. \quad (7)$$

Remarque 2.1 $H(\widehat{\mathbf{M}})$ est homogène : multiplier $\widehat{\mathbf{M}}$, \mathbf{z} ou \mathbf{p} par une constante ne modifie pas $H(\widehat{\mathbf{M}})$.

Si $\widehat{\mathbf{M}}$ est la MCE construite avec des données \mathbf{z}_k gaussiennes et \mathbf{z} gaussienne, la DDP de $H(\widehat{\mathbf{M}}_{MCE})$ est donnée par $f_{H(\widehat{\mathbf{M}}_{MCE})}(u) = K(1-u)^{a-2} {}_2F_1(a, a; b; u) \mathbf{1}_{[0,u]}(u)$ avec $K = (a-1)(m-1)/(N+1)$, $a = N-m+2$, $b = N+2$ et ${}_2F_1(\cdot)$ est la fonction hypergéométrique [10]. La relation théorique entre le seuil de détection et la probabilité de fausse alarme (PFA) $P_{fa} = P(H(\widehat{\mathbf{M}}_{MCE}) > \lambda | H_0)$ est donnée par [11]

$$P_{fa} = (1-\lambda)^{a-1} {}_2F_1(a, a-1; b-1; \lambda). \quad (8)$$

La distribution de $H(\widehat{\mathbf{M}})$ dépend de la loi de \mathbf{z} . Ainsi, conditionnellement à la loi de \mathbf{z} (quelle qu’elle soit), on a le résultat suivant [8] pour toute matrice $\widehat{\mathbf{M}}$ vérifiant l’équation (2) :

$$\sqrt{N}(H(\widehat{\mathbf{M}}) - H(\mathbf{M}))_{\mathbf{z}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}_H) \quad (9)$$

où Σ_H est définie par

$$\Sigma_H = 2\vartheta_1 H(\mathbf{M})(H(\mathbf{M}) - 1)^2. \quad (10)$$

3 Contribution théorique

Soit $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N)$ un N -échantillon de vecteurs complexes indépendants de taille m avec $\mathbf{z}_k \sim \mathbb{C}ES_m(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{M}, g_z)$, $k = 1, \dots, N$. Ces échantillons admettent la représentation suivante : $\mathbf{z}_k = \sqrt{\tau_k} \mathbf{A} \mathbf{x}_k / \|\mathbf{x}_k\|$, où $\mathbf{x}_k \sim \mathbb{C}\mathcal{N}_m(\mathbf{0}, \mathbf{M})$, $\mathbf{M} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H$ est une factorisation de \mathbf{M} et τ_k est une variable aléatoire indépendante dont la DDP est liée à g_z [5]. Considérons maintenant la MCE $\widehat{\mathbf{M}}_{MCE}$ construite avec $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ et un M -estimateur $\widehat{\mathbf{M}}$ construit avec $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N)$. Le théorème suivant montre que le M -ANMF converge rapidement vers le régime de MCE-ANMF (lui dans un contexte gaussien à cause des x_k), même si les échantillons sont distribués selon une CES.

Théorème 3.1 Soit l'ANMF défini par (7) et $\widehat{\mathbf{M}}$ un M -estimateur défini par (2). Alors, conditionnellement à la loi de \mathbf{z} , la distribution asymptotique de $H(\widehat{\mathbf{M}}) - H(\widehat{\mathbf{M}}_{MCE})$ est

$$\sqrt{N}(H(\widehat{\mathbf{M}}) - H(\widehat{\mathbf{M}}_{MCE}))_{\mathbf{z}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

où Σ est donnée par

$$\Sigma = 2\sigma_1 H(\mathbf{M})(H(\mathbf{M}) - 1)^2 \quad (11)$$

avec $\sigma_1 = \frac{am(m+1)+c(c-2b)}{c^2}$, $a = E[\psi^2(\sigma\tau)]$, $b = E[\psi(\sigma\tau)t]$, $c = E[\psi'(\sigma\tau)\sigma\tau] + m^2$, σ est défini par (3) et $t \sim (1/2)\chi_{2m}^2$.

Preuve 3.1 La preuve est une généralisation aux M -estimateurs de la preuve du théorème 3.1 de [12]. Elle repose sur de nouvelles propriétés asymptotiques des M -estimateurs (similaires à celles présentées dans [13]) ainsi que sur l'utilisation de la méthode Delta.

Remarque 3.1

- La variance asymptotique dans (11) est plus petite que celle de (10) quand ϑ_1 est supérieur à 1, ce qui est le cas pour les estimateurs considérés. Ce résultat justifie théoriquement que le comportement de $H(\widehat{\mathbf{M}})$ est plus proche de $H(\widehat{\mathbf{M}}_{MCE})$ que de $H(\mathbf{M})$ ($\Sigma < \Sigma_H$). Une des conséquences importantes est la meilleure prédiction des performances de détection en utilisant $H(\widehat{\mathbf{M}}_{MCE})$ au lieu de $H(\mathbf{M})$.
- La variance asymptotique dans (11) tend vers 0 quand m grandit : pour des observations de grande dimension, cette approximation est plus précise puisque $\Sigma \ll \Sigma_H$. Bien que l'approche et les régimes asymptotiques soient différents, ceci est en parfaite adéquation avec les résultats obtenus avec la théorie des matrices aléatoires dans [14].
- Pour l'estimateur de Tyler, on a $\sigma_1 = 1/m$ [12, 13]. Ce résultat peut se retrouver à partir de (11), ce qui est met en évidence la généralité du résultat présenté dans cet article.

4 Simulations

Dans cette section, on considère un M -estimateur de type Student- t (détecteur t -ANMF) et le détecteur MCE-ANMF. Les simulations sont effectuées avec des données complexes centrées de matrice de dispersion \mathbf{M} d'éléments $M_{i,j} = \rho^{|i-j|}$, pour $i, j = 1, \dots, m$. Le coefficient de corrélation ρ est fixé à 0.5. L'opérateur $\bar{\mathbf{v}}$ est défini comme la moyenne empirique des $\mathbf{v}(i) = \text{var}(H(\widehat{\mathbf{M}}(i)))$ calculée à partir de I tirages Monte Carlo.

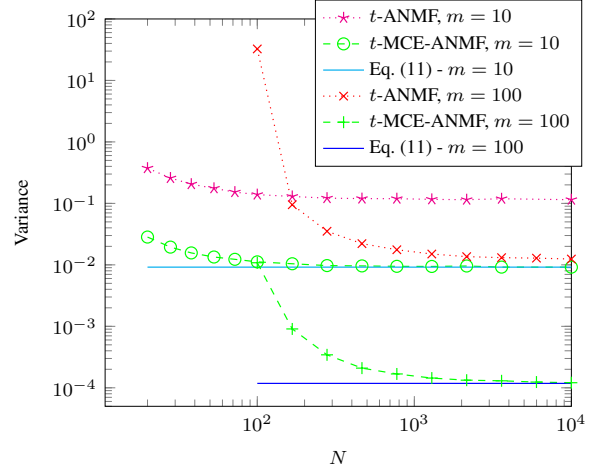


FIGURE 1 – Variance empirique du t -ANMF (Eq. (9)), de la différence entre le t -ANMF et le SCM-ANMF (t -SCM-ANMF) ainsi que le résultat théorique (Eq. (11)) - $m = 10, 100$.

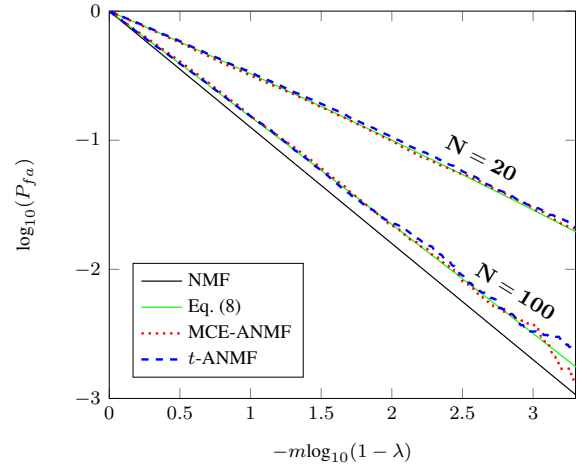


FIGURE 2 – Comparaison des relations “PFA-seuil” empiriques pour les détecteurs t -ANMF et MCE-ANMF avec les relations théoriques obtenues avec le détecteur MCE-ANMF (Eq. (8)) et avec le NMF. $m = 10$, \mathbf{z}_i vecteurs gaussiens

La figure 1 illustre le résultat théorique du théorème 3.1. La variance empirique de la différence entre les détecteurs t -ANMF et MCE-ANMF (courbes vertes) est comparée au résultat théorique donnée par l'équation (11) (courbes bleue et cyan). A titre de comparaison, la variance empirique de l'équation (9) est montrée pour le M -estimateur de Student (courbes rouge et magenta). Les observations sont simulées selon une loi de

Student- t , avec un degré de liberté $\nu = 3$ pour $m = 10$ et $m = 100$. On remarque tout d'abord qu'il y a une bonne adéquation entre les résultats empiriques et les résultats théoriques même pour de relativement faibles valeurs de N . De plus, on constate que l'approximation obtenue pour le détecteur MCE-ANMF est plus précise que celle obtenue classiquement à partir du NMF, ce qui montre l'intérêt de ce type de résultats. Enfin, lorsque m grandit, la variance diminue comme attendue (variance asymptotique en $1/m$).

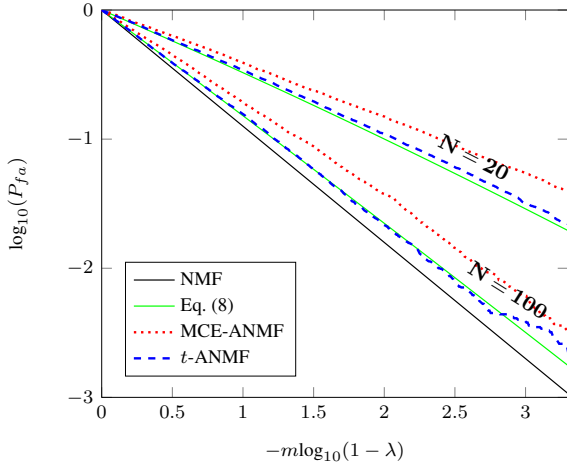


FIGURE 3 – Comparaison des relations “PFA-seuil” empiriques pour les détecteurs t -ANMF et MCE-ANMF avec les relations théoriques obtenues avec le détecteur MCE-ANMF (Eq. (8)) et avec le NMF. $m = 10$, \mathbf{z}_i de loi de Student- t , $\nu = 3$.

Les figures 2 et 3 présentent les courbes “PFA-seuil” pour les détecteurs t -ANMF et MCE-ANMF, la relation théorique pour le détecteur MCE-ANMF (Eq. (8)) et le NMF (théorique car \mathbf{M} est supposé connu), pour $m = 10$. Notons que pour le M -estimateur de Student, on a $\nu = 3$. Il est important de noter que selon la remarque 2.1, la relation PFA-seuil est la même pour le NMF dans les cas où \mathbf{z} est distribuée selon une loi gaussienne et une loi de Student¹. Elle est donnée par $P_{fa} = (1 - \lambda)^{-(1-m)}$.

La figure 2 est obtenue à partir de données gaussiennes pour $N = 20$ et $N = 100$. On constate la très bonne adéquation entre les PFA obtenues pour MCE-ANMF, t -ANMF et la relation théorique, comme attendu par le théorème 3.1 : le comportement du détecteur t -ANMF est mieux expliqué par celui du détecteur MCE-ANMF que par le NMF. Ceci est particulièrement flagrant pour N petit, puisque toutes les courbes se rapprochent lorsque N augmente.

La figure 3 est obtenue à partir de données distribuées selon une loi de Student- t , avec $\nu = 3$. Dans ce cas, il n’y a plus adéquation entre le détecteur MCE-ANMF et sa contrepartie théorique car les données ne sont plus gaussiennes. En revanche, les résultats obtenus avec le détecteur t -ANMF restent très proches de la relation théorique. Ceci confirme l’intérêt d’utiliser des M -estimateurs dans un contexte non-gaussien et d’approcher leur comportement par celui de la MCE, obtenu en contexte gaussien (relation (8)). Ces constats sont valables

1. Ceci est du au fait qu’un vecteur aléatoire de Student peut s’écrire comme le produit d’un vecteur gaussien et d’une variable aléatoire gamma

même pour N petit. Ceci illustre l’importante contribution du résultat du théorème 3.1.

5 Conclusion

Cet article analyse les propriétés asymptotiques du détecteur ANMF construit avec des M -estimateurs (M -ANMF) dans un contexte de bruit non gaussien. Il est notamment montré que le M -ANMF se comporte comme le MCE-ANMF en contexte gaussien. Ceci permet en pratique de régler théoriquement les paramètres (e.g., le seuil de détection). Ici, la matrice de covariance empirique (MCE) joue uniquement un rôle théorique car ses performances en contexte non gaussien sont très mauvaises. Ce résultat est en faveur de l’approximation du comportement statistique des M -estimateurs par la loi de Wishart.

Références

- [1] E. Conte, M. Lops, and G. Ricci, “Asymptotically optimum radar detection in compound-Gaussian clutter,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 31, no. 2, pp. 617–625, April 1995.
- [2] M. Bilodeau and D. Brenner, *Theory of Multivariate Statistics*, ser. New York, NY, USA :Springer-Verlag, 1999.
- [3] R. A. Maronna, “Robust M -estimators of multivariate location and scatter,” *Annals of Statistics*, vol. 4, no. 1, pp. 51–67, January 1976.
- [4] M. Mahot, F. Pascal, P. Forster, and J.-P. Ovarlez, “Asymptotic properties of robust complex covariance matrix estimates,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, no. 13, pp. 3348–3356, July 2013.
- [5] E. Ollila, D. Tyler, V. Koivunen, and H. Poor, “Complex elliptically symmetric distributions : Survey, new results and applications,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 11, pp. 5597–5625, November 2012.
- [6] D. Tyler, “A distribution-free M -estimator of multivariate scatter,” *The Annals of Statistics*, vol. 15, no. 1, pp. 234–251, March 1987.
- [7] F. Pascal, Y. Chitour, J.-P. Ovarlez, P. Forster, and P. Larzabal, “Covariance structure maximum-likelihood estimates in compound Gaussian noise : existence and algorithm analysis,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 1, pp. 34–48, January 2008.
- [8] F. Pascal and J.-P. Ovarlez, “Asymptotic properties of the robust ANMF,” in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-15*, Brisbane, Australia, April 2015.
- [9] T. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, ser. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2003. [Online]. Available : <https://books.google.fr/books?id=Cmm9QgAACAAJ>
- [10] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Corporation, 1964, vol. 55.
- [11] F. Pascal, J. P. Ovarlez, P. Forster, and P. Larzabal, “Constant false alarm rate detection in spherically invariant random processes,” in *Proc. 12th European Signal Processing Conference (EUSIPCO-12)*, Vienna, Austria, Sept 2004, pp. 2143–2146.
- [12] G. Drašković, F. Pascal, A. Breloy, and J.-Y. Tourneret, “New asymptotic properties for the robust ANMF,” in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-17*, New Orleans, USA, March 2017.
- [13] G. Drašković and F. Pascal, “New properties for Tyler’s covariance matrix estimator,” in *Proc. 50th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, CA, USA, Nov 2016, pp. 820–824.
- [14] R. Couillet, F. Pascal, and J. W. Silverstein, “The Random Matrix Regime of Maronna’s M -estimator with elliptically distributed samples,” *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 139, pp. 56–78, July 2015.