# Sensibilité de la Capacité Dans Les Canaux Continus


Malcolm EGAN[1,2], Samir M. PERLAZA[1,2], Vyacheslav KUNGURTSEV[3]

[1]Univ Lyon, INSA Lyon, INRIA, CITI,
F-69621 Villeurbanne, France.

[2]Department of Electrical Engineering
Princeton University, Princeton, NJ 08544 USA.

[3]Faculty of Electrical Engineering,
Czech Technical University in Prague, 12135 Prague 2, Czech Republic.

malcom.egan@inria.fr, samir.perlaza@inria.fr
vyacheslav.kungurtsev@fel.cvut.cz



**Résumé –** Dans cet article, un nouveau cadre basé sur la notion de sensibilité de la capacité est présenté afin d'étudier la capacité des canaux point-à-point continus sans mémoire. La sensibilité de la capacité reflète comment la capacité varie en fonction des petites perturbations de l'un des paramètres décrivant le canal, même si l'expression explicite de la capacité n'est pas connue. Cela inclut les perturbations des contraintes de coût sur la distribution en entrée du canal ainsi que sur la distribution du canal. Ce cadre est basé sur la continuité de la capacité, qui est démontrée pour une classe de perturbations de la distribution du canal. La continuité forme ainsi la base pour obtenir les bornes sur la sensibilité de la capacité. Pour illustrer celà, la borne sur la sensibilité de la capacité est appliquée afin d'obtenir des lois de mise à l'échelle quand le support du bruit additif $\alpha$-stable est tronqué.

**Abstract –** In this paper, a new framework based on the notion of *capacity sensitivity* is introduced to study the capacity of continuous memoryless point-to-point channels. The capacity sensitivity reflects how the capacity changes with small perturbations in any of the parameters describing the channel, even when the capacity is not available in closed-form. This includes perturbations of the cost constraints on the input distribution as well as on the channel distribution. The framework is based on continuity of the capacity, which is shown for a class of perturbations in the channel distribution. The continuity then forms the foundation for obtaining bounds on the capacity sensitivity. As an illustration, the capacity sensitivity bound is applied to obtain scaling laws when the support of additive $\alpha$-stable noise is truncated.


## 1 Introduction

Dans une large classe de systèmes de communication, la capacité du canal caractérise le taux de transmission critique au-delà duquel la probabilité d'erreur ne peut pas être arbitrairement proche de zéro. Pour la classe des canaux discrets sans mémoire, la capacité est maintenant bien comprise [1]. Cependant, la généralisation pour les canaux continus s'est révélée non triviale, avec l'exception notable du canal à bruit blanc Gaussien additif (AWGN), soumis à une contrainte de puissance [1, Theorem 18],[2].

En raison de la difficulté d'établir des expressions analytiques pour la capacité et la distribution d'entrée optimale des canaux continus, les travaux récents se sont concentrés sur la caractérisation des propriétés structurelles de la distribution d'entrée optimale, ainsi que sur l'obtention de bornes et de méthodes numériques pour calculer la capacité. Une large gamme de canaux continus a été étudiée en adoptant cette approche, incluant les canaux à relation entrées-sorties non linéaires ou non déterministes, les canaux avec des contraintes générales sur l'entrée, et les canaux à bruit non Gaussien. Les premiers travaux dans cette direction ont été initiés par Smith [3] et plus récemment, Fahs et Abou-Faycal [4] ont établi des conditions sous lesquelles la distribution d'entrée est discrète et compacte. Ces conditions s'appliquent à une large gamme de canaux continus et permettent le calcul numérique de la capacité sans recourir à l'algorithme Blahut-Arimoto.

Malgré les progrès réalisés pour caractériser de la distribution d'entrée optimale, le succès s'est révélé limité quant à l'obtention d'expressions analytiques générales de la capacité. Outre l'intérêt théorique de ces expressions analytiques, ce succès limité est problématique pour la conception de systèmes de communication en présence de bruit non-Gaussien ou avec des contraintes sur l'entrée différentes des contraintes de puissance classiques—un problème pour les systèmes sujets à un bruit impulsif [5] ou pour ceux qui encodent l'information en utilisant la position temporelle du signal [6].

Une approche alternative pour caractériser la capacité des canaux continus est de se concentrer sur la *sensibilité* de la capacité, c'est-à-dire sur la façon dont la capacité évolue lorsque l'un des paramètres décrivant le canal varie. Dans ce sens, l'influence du support de l'alphabet d'entrée a été étudié dans [7]. En particulier, il a été démontré que la capacité du canal Gaussien sans mémoire à entrée discrète et à variance unitaire converge de manière exponentielle vers la capacité du canal AWGN sans mémoire à entrée continue et à variance unitaire. Dans d'autres travaux [8], la diminution de la capacité due à une faible contamination non Gaussienne a été étudiée dans le contexte du canal de bruit Gaussien. La clé de ces approches est la continuité de la capacité en fonction de paramètres tels que le support de l'alphabét d'entrée ou la valeur de la contrainte de coût.

Dans cet article, nous introduisons un cadre général pour étudier la sensibilité de la capacité en exploitant la théorie de la stabilité et la sensibilité des problèmes d'optimisation [9]. Tout d'abord, nous identifions une large classe de canal à bruit additif sans mémoire où la capacité est continue par rapport aux paramètres de la distribution de canal.

Une implication importante de la continuité de la capacité est que si deux canaux sont «proches», dans un sens qui sera clarifié par la suite, un canal peut être utilisé pour approximer la capacité de l'autre. Dans cette optique, nous établissons de nouvelles bornes pour quantifier la sensibilité de la capacité dans une classe de perturbations clés : la perturbation de la distribution du bruit lorsqu'il est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous illustrons notre cadre en dérivant une loi d'échelle pour la sensibilité de la capacité dans le cas du bruit tronqué $\alpha$-stable.

Le reste de cet article est organisé comme suit. La section 2 décrit le problème de la sensibilité de la capacité. La section 3 se concentre respectivement sur la sensibilité de la capacité aux perturbations de la contrainte d'entrée et aux perturbations de la distribution du bruit. La section 4 applique nos principaux résultats pour caractériser la sensibilité de la capacité des canaux à bruit Gaussien tronqué et $\alpha$-stable. La section 5 discute les défis du problème général de sensibilité de la capacité et décrit les directions futures.

# 2 Le Problème de la Sensibilité de la Capacité

Nous nous intéressons aux canaux sans mémoire point-à-point à valeur réelle. Considérons le canal à bruit additif linéaire dont la sortie $Y$ est de la forme

$$Y = X + N, \tag{1}$$

où l'entrée $X$ a un alphabet $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ et le bruit $N$ a une distribution sur $\mathbb{R}$ notée $F_N$. Dans le cas où le bruit a une fonction de densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, elle est notée $p_N$. Notons que puisque le canal est linéaire et additif, lorsque le bruit a une fonction de densité de probabilité, la loi de canal peut être écrite

$$p_{Y|X}(y|x) = p_N(y - x). \tag{2}$$

D'après le théorème de codage de canal, lorsque la capacité de (1) existe, elle est obtenue en optimisant l'information mutuelle soumise à certaines contraintes sur l'entrée $X$. Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ un $\sigma$-algebre de Borel sur $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des mesures de probabilité de Borel sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la topologie de convergence faible, dans lequel les distances sont mesurées par la métrique de Lévy-Prokhorov [10]. La capacité de (1) est alors la solution du problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \quad & I(X;Y) \\ \text{tel que} \quad & \mu \in \Lambda, \end{aligned} \tag{3}$$

où $\Lambda$ est un sous-ensemble compact de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Dans le cas où $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, il est bien connu que lorsque $X$ est soumis à une contrainte de puissance moyenne $\bar{b}$, la capacité est donnée par [1, Theorem 18]

$$C = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{\bar{b}}{\sigma^2} \right). \tag{4}$$

Cependant, ce résultat est une anomalie : en général, il n'est pas possible d'obtenir une représentation simple et analytique de la capacité de (1) lorsque $X$ est soumis à des contraintes arbitraires. En effet, même la capacité des canaux AWGN n'est pas bien comprise avec les ensembles de contraintes $\Lambda_p$ pour $p \neq 2$.

L'objectif de cet article est de caractériser la *sensibilité de la capacité*. Dans la formulation la plus générale, nous pouvons nous représenter la capacité comme une application allant de l'alphabet d'entrée $\mathcal{X}$, l'alphabet de sortie $\mathcal{Y}$, la distribution de bruit $F_N$ et l'ensemble contraint $\Lambda$ vers $\mathbb{R}_+$. C'est-à-dire $C : (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, F_N, \Lambda) \mapsto \mathbb{R}_+$. Nous définissons la *sensibilité de la capacité* comme suit.

**Definition 1.** *Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, F_N, \Lambda)$ et $\hat{\mathcal{K}} = (\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Y}}, \hat{F}_N, \hat{\Lambda})$ deux tuples de paramètres de deux canaux. La sensibilité de la capacité due à une perturbation du canal $\mathcal{K}$ au canal $\hat{\mathcal{K}}$ est définie comme*

$$C_{\mathcal{K} \to \hat{\mathcal{K}}} \triangleq |C(\mathcal{K}) - C(\hat{\mathcal{K}})|. \tag{5}$$

Le problème de la sensibilité de la capacité est un cas particulier de l'analyse de la sensibilité des problèmes d'optimisation non linéaires, où nous identifions la capacité en tant que *fonction objectif*. De toute évidence, le problème du calcul de la sensibilité de la capacité est trivial lorsque la capacité est disponible sous forme analytique (comme le cas du bruit Gaussien avec une contrainte de puissance). Cependant, le problème est significativement plus difficile dans la situation classique dans laquelle la seule caractérisation explicite de la capacité est (3) et les perturbations de canal sont générales.

# 3 Perturbations de la Distribution du Bruit

Dans cette section, nous nous intéressons à la sensibilité de la capacité aux perturbations de la distribution du bruit $F_N$. Tout au long de cette section, nous supposons que $F_N$ correspond à une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Par conséquent, il existe une fonction de densité de probabilité de bruit $p_N$ et la sensibilité de la capacité aux perturbations de $p_N$ est désignée par $C_{p_N^0 \to p_N^1}$, donné par

$$C_{p_N^0 \to p_N^1} = |C(p_N^0) - C(p_N^1)|. \tag{6}$$

Considérons une séquence $\{p_N^i\}_{i=1}^{\infty}$ avec $\|p_N^i - p_N^0\|_{TV} \to 0$. Nous établissons d'abord les conditions sur la séquence $\{p_N^i\}_{i=1}^{\infty}$ telles que $\lim_{i\to\infty} C(p_N^i) = C(p_N^0)$. En utilisant ce résultat, on obtient alors une borne supérieure sur $C_{p_N^0 \to p_N^1}$ en fonction de $\|p_N^0 - p_N^1\|_{TV}$.

Notons que la fonction d'information mutuelle est complètement déterminée par la mesure de probabilité d'entrée $\mu$ et la fonction de densité de probabilité du bruit $p_N$. Ainsi, nous adoptons la notation $I(X;Y) = I(\mu, p_N)$ pour rendre explicite la dépendance de l'information mutuelle par rapport à ces paramètres.

### 3.1 Convergence de $C(p_N^i)$

Considérons une séquence convergente de fonctions de densité de probabilité $\{p^i\}_{i=1}^{\infty}$ dans un sens approprié (c'est-à-dire, convergence ponctuelle, en variation totale, en divergence de Kullback-Leibler ou convergence faible) avec $p^i \to p$. Il n'est pas vrai en général que l'entropie différentielle converge [11] ; c'est-à-dire $\lim_{i\to\infty} h(p^i) \neq h(p)$. Par conséquent, afin d'assurer la convergence de l'information mutuelle et de la capacité dans (3), il est nécessaire de placer des restrictions sur la séquence de fonctions de densité de probabilité $\{p^i\}_{i=1}^{\infty}$.

Afin de prouver la convergence de $C(p_N^i)$, il est donc également nécessaire de placer des restrictions sur la séquence de fonctions de densité de probabilité de bruit $\{p_N^i\}_{i=1}^{\infty}$. Le théorème de convergence suivant est obtenu en utilisant le fait que l'ensemble $\Lambda$ est indépendant du choix de $p_N$ et en utilisant une variante du théorème maximum de Berge [12].

**Theorem 1.** *Soit $\{p_N^i\}_{i=1}^{\infty}$ une séquence convergente ponctuelle dont la limite est $p_N^0$. Soit $\Lambda$ un ensemble compact de mesures de probabilité indépendant de $p_N$, et soit $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ une séquence de probabilités faiblement convergente dans $\Lambda$ dont la limite est $\mu_0$. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :*

***(C1)*** *L'information mutuelle $I(\mu, p_N)$ est faiblement continue sur $\Lambda$.*

***(C2)*** *Pour la séquence convergente $\{p_N^i\}_{i=1}^{\infty}$ et toutes les séquences faiblement convergentes $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ in $\Lambda$,*

$$\lim_{i\to\infty} I(\mu_i, p_N^i) = I(\mu_0, p_N^0). \tag{7}$$

***(C3)*** *Il existe une mesure de probabilité d'entrée optimale $\mu_i^*$ pour chaque densité de probabilité de bruit $p_N^i$.*

*Alors,* $\lim_{i\to\infty} C(p_N^i) = C(p_N^0)$.

*Démonstration.* Voir l'annexe D dans [13]. □

### 3.2 Caractérisation de $C_{p_N^0 \to p_N^1}$

Le théorème 1 fournit des conditions sur la séquence de fonctions de densité de probabilité $\{p_N^i\}_{i=1}^{\infty}$ pour guarantir que la capacité $C(p_N^i)$ converge ; cependant, il ne fournit pas une caractérisation explicite de la sensibilité de capacité $C_{p_N^0 \to p_N^1}$. Nous caractérisons la sensibilité de la capacité dans le théorème suivant.

**Theorem 2.** *Soit $\{p_N^i\}_{i=1}^{\infty}$ une séquence de fonctions de densité de probabilité de bruit convergente en variation totale dont la limite est $p_N^0$. Supposons que les conditions **(C1)**-**(C3)** dans le théorème 1 soient vérifiées. En outre, supposons la condition suivante :*

***(C4)*** *Soit $0 \le \theta \le 1$ et pour tout $p_N^i$, soit $q_N^i(\theta)$ définit par*

$$q_N^i(\theta) = (1-\theta)p_N^0 + \theta p_N^i. \tag{8}$$

*Pour chaque i, supposons qu'il existe $M_i < \infty$ et $N_i < \infty$ tel que*

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\theta\to 0^+} \frac{I(\mu_0^*, q_N^i) - I(\mu_0^*, p_N^0)}{\theta \|p_N^0 - p_N^i\|_{TV}} \right| &= M_i, \\ \left| \lim_{\theta\to 0^+} \frac{I(\mu_1^*, p_N^0) - I(\mu_1^*, q_N^i)}{\theta \|p_N^0 - p_N^i\|_{TV}} \right| &= N_i, \end{aligned} \tag{9}$$

*où $\|p_N^0 - p_N^i\|_{TV} = \int |p_N^0(x) - p_N^i(x)| dx$, $M = \sup_i M_i < \infty$ et $N = \sup_i N_i < \infty$.*

*Alors, pour tout $i \ge 1$,*

$$C_{p_N^0 \to q_N^i(\theta)} \le \max\{M, N\} \theta \|p_N^0 - p_N^i\|_{TV} + o(\theta). \tag{10}$$

*Démonstration.* Voir l'annexe E dans [13]. □

Dans la section suivante, nous appliquons le théorème 2 pour étudier l'effet de la troncature des fonctions de densité de probabilité du bruit $\alpha$-stables symétriques via la sensibilité de la capacité $C_{p_N^0 \to p_N^i}$.

## 4 Sensiblité de la Capacité : Cas du Bruit $\alpha$-Stable

Dans cette section, nous caractérisons la sensibilité de la capacité $C_{p_N^0 \to p_N^1}$ dans le cas du bruit $\alpha$-stable tronqué en utilisant les résultats de la section précédente. La classe de canaux à bruit $\alpha$-stable comprend les canaux à bruit Gaussien ($\alpha = 2$) et à bruit de Cauchy ($\alpha = 1$) comme cas particuliers. Plus généralement, le bruit $\alpha$-stable ($0 < \alpha < 2$) est souvent utilisé comme modèle pour le bruit impulsif et se manifeste dans les systèmes de communication sans fil [14]. Nous nous concentrons sur la sous-classe de bruit $\alpha$-stable symétrique avec $0 < \alpha < 2$, dont la fonction caractéristique est $\Phi(t) = e^{-\sigma^\alpha |t|^\alpha}$, où $\sigma > 0$ est le paramètre d'échelle. En général, le bruit $\alpha$-stable symétrique n'a pas de fonction de densité de probabilité sous forme analytique. Ainsi, la fonction caractéristique joue un rôle important.

Soit $p_N^0$ une fonction de densité de probabilité $\alpha$-stable symétrique et soit $p_N^T$ une troncature de niveau $T > 0$ de $p_N^0$, définie par

$$p_N^T(x) = \begin{cases} \frac{p_N^0(x)}{\kappa_T}, & |x| \le T \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \tag{11}$$

où la constante de normalisation est donnée par

$$\kappa_T = \int_{|y| \le T} p_N^0(y) \mathrm{d}y. \tag{12}$$

Nous supposons l'ensemble de probabilités $\Lambda = \{\mu : \mathbb{E}_\mu[|X|^r] \leq c\}$ avec $0 < r < \alpha$.

En utilisant le fait que les conditions (**C1**)-(**C4**) dans le théorème 2 sont verifiées (voir [13] pour plus de détails), nous évaluons maintenant la borne supérieure dans le théorème 2 pour le cas du bruit $\alpha$-stable symétrique tronqué. En général, la capacité des canaux à bruit $\alpha$-stable symétrique sujets à des contraintes de la forme $\mathbb{E}_\mu[|X|^r] \leq c$ n'est pas connue. Pour comprendre l'effet de la troncature sur la sensibilité de la capacité, nous étudions la loi d'échelle asymptotique $|C(p_N^0) - C(p_N^n)| = O(\|p_N^0 - p_N^n\|_{TV})$ qui est une conséquence du théorème 2.

Pour commencer, remarquons que $\|p_N^0 - p_N^n\|_{TV} = \frac{1}{2}(1 - \kappa_n)$ avec $\kappa_n$ défini par (12). En outre, l'expression asymptotique de la queue de la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $\alpha$-stable symétrique $N_0$ correspondant à $p_N^0$, donnée par [15, Eq. (1.2.10)], est $\mathbb{P}(N_0 > \lambda) = \sigma^\alpha C_\alpha \lambda^{-\alpha}$, où $C_\alpha$ est une constante dépendante de $\alpha$ uniquement. Ainsi, nous obtenons $1 - \kappa_n = O(n^{-\alpha})$. L'application de ce résultat au théorème 2 implique que la sensibilité de la capacité pour un niveau de troncature $T = n$ est donnée par

$$|C(p_N^0) - C(p_N^n)| = O(n^{-\alpha}). \tag{13}$$

# 5 Conclusions

À l'exception importante des canaux point-à-point Gaussiens soumis à une contrainte de puissance moyenne, la caractérisation de la capacité des canaux continus a rencontré un succès limité. Dans cet article, nous avons abordé ce problème en utilisant un cadre basé sur la nouvelle notion de sensibilité de la capacité. En particulier, nous avons fourni des conditions générales garantissant la continuité de la capacité par rapport aux paramètres décrivant le canal. La continuité de la capacité a alors formé les bases pour obtenir des bornes sur la sensibilité de la capacité. La borne de sensibilité a été appliquée pour obtenir des lois d'échelle pour la capacité lorsque le support est tronqué pour les distributions de bruit Gaussien et $\alpha$-stable.

D'un point de vue plus général, la sensibilité de la capacité offre un nouveau moyen de comprendre comment les paramètres du canal affectent la capacité. Au-delà des perturbations que nous avons considérées, il existe de nombreux autres paramètres du canal pour lesquels il est intéressant de connaître la sensibilité de la capacité face aux perturbations, y compris les perturbations de la fonction de contrainte. Ces dernières sont l'objet du travail actuellement en cours.

# 6 Remerciements

Ce travail a été soutenu en partie par le projet ANR ARburst.

# Références

[1] C. Shannon, "A mathematical theory of communication," *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379–423,623–656, Jul., Oct. 1948.

[2] O. Rioul and J. Magossi, "On Shannon's formula and Hartley's rule : Beyond the mathematical coincidence," *Entropy*, vol. 16, no. 9, pp. 4892–4910, 2014.

[3] J. Smith, "The information capacity of amplitude- and variance-constrained scalar Gaussian channels," *Information and Control*, vol. 18, no. 3, pp. 203–219, April 1971.

[4] J. Fahs and I. Abou-Faycal, "Input constraints and noise density functions : a simple relation for bounded-support and discrete-capacity achieving inputs," *arXiv :1602.00878*, 2016.

[5] M. Egan, M. de Freitas, L. Clavier, A. Goupil, G. Peters, and N. Azzaoui, "Achievable rates for additive isotropic alpha-stable noise channels," in *IEEE International Symposium on Information Theory*, Barcelona, Spain, Jul. 2016.

[6] K. Srinivas, A. Eckford, and R. Adve, "Molecular communication in fluid media : The additive inverse Gaussian noise channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 58, no. 7, pp. 4678–4692, Jul. 2012.

[7] Y. Wu and S. Verdú, "The impact of constellation cardinality on Gaussian channel capacity," in *Proc. of the 48th Annu. Allerton Conf. Commun., Control, Comput.*, Monticello, IL, Sept 2010.

[8] M. Pinsker, V. Prelov, and S. Verdú, "Sensitivity of channel capacity," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, no. 6, pp. 1877–1888, 1995.

[9] J. Bonnans and A. Shapiro, "Optimization problems with perturbations : A guided tour," *SIAM Rev.*, vol. 40, no. 2, pp. 228–264, Jun. 1998.

[10] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, 2nd ed. New York, NY : John Wiley and Sons, 1999.

[11] J. Fahs and I. Abou-Faycal, "On the finiteness of the capacity of continuous channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 54, no. 1, pp. 166–173, Jan. 2016.

[12] E. Ok, *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton, N.J. : Princeton University Press, 2007.

[13] M. Egan, S. M. Perlaza, and V. Kungurtsev, "Capacity sensitivity of continuous channels," INRIA, Lyon, France, Tech. Rep. 9012, Jan. 2017.

[14] P. Pinto and M. Win, "Communication in a Poisson field of interferers-part II : Channel capacity and interference spectrum," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 9, no. 7, pp. 2187–2195, Jul. 2010.

[15] G. Samorodnitsky and M. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*. New York, NY : Chapman and Hall, 1994.