

Persuasion Bayésienne pour la Coordination Stratégique d'Appareils Autonomes ayant des Objectifs Non-Alignés

Maël LE TREUST¹ and Tristan TOMALA²

¹ETIS UMR 8051, Université Paris Seine, Université Cergy-Pontoise, ENSEA, CNRS,
6 avenue du Ponceau, 95000 Cergy, France,

²HEC Paris, GREGHEC UMR 2959
1 rue de la Libération, 78351 Jouy-en-Josas CEDEX, France,
mael.le-treust@ensea.fr, tomala@hec.fr

Résumé – Cet article s'intéresse à la coordination stratégique que des appareils autonomes peuvent mettre en œuvre. Nous considérons le problème source-canal point-à-point lorsque l'encodeur et le décodeur sont munis de fonction d'utilité non-alignées. Ce problème fait appel aux outils de la Théorie des Jeux, notamment à la "Persuasion Bayésienne" étudiée dans [1]. L'objectif de l'encodeur n'est plus de transmettre de l'information mais de contrôler les croyances du décodeur afin de l'amener à choisir l'action la plus favorable. Ce travail a été présenté en partie, à la 54ème conférence d'Allerton en 2016 [2].

Abstract – This paper investigates the strategic coordination of autonomous devices endowed with non-aligned utility functions for a source-channel point-to-point scenario. This problem is related to Game Theory, more precisely to "Bayesian Persuasion" investigated in [1]. The objective of the encoder is not to transmit information, but to control the posterior beliefs of the decoder, in order it chooses the most favorable action. This work was presented in part at the 54th Allerton Conference 2016 [2].

1 Introduction

Cet article étudie le problème de la transmission point-à-point d'une source d'information $\mathcal{P}_u(u)$ sur un canal bruité $\mathcal{T}(y|x)$, lorsque les objectifs de l'encodeur P_1 et du décodeur P_2 ne sont pas alignés. Dans cette approche P_1 et P_2 sont des joueurs qui choisissent une stratégie d'encodage et de décodage afin de maximiser leurs fonctions d'utilité $\phi_1(u, v) \in \mathbb{R}$ et $\phi_2(u, v) \in \mathbb{R}$. Ces utilités dépendent seulement du symbole de source U observé par P_1 , et de l'action V de P_2 . L'asymétrie d'observation entre P_1 et P_2 pose le problème de la *transmission stratégique d'information*, étudié abondamment dans la littérature de Théorie des Jeux [4], [5].

Persuasion Bayésienne. Les auteurs de [1] considèrent que l'émetteur P_1 observe la source d'information et transmet un signal stratégique au récepteur P_2 de manière à modifier ses croyances postérieures. Sachant que P_2 choisira une meilleure réponse vis-à-vis de sa croyance, P_1 quantifie la source afin d'induire les croyances les plus avantageuses. Ce problème fait référence au "Lemme de Splitting" introduit dans [6], [7] et plusieurs études sont consacrées au cas dynamique [8], [9], [10], lorsque l'émetteur annonce sa stratégie à chaque étape. La transmission d'information stratégique est également étudiée en Théorie de l'Information pour les sources Gaussienne et les fonctions de coût quadratiques [11].

Coordination Empirique. La version répétée de ce problème fait appel aux outils de la coordination empirique développés

en Théorie des Jeux [12], [13], [14], [15], [16] et en Théorie de l'Information [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28]. L'objectif consiste à caractériser l'ensemble des distributions de probabilités réalisables en utilisant les possibilités offertes par le codage. La coordination empirique caractérise la connaissance d'un transmetteur au sujet des variables qu'il n'observe pas directement [29].

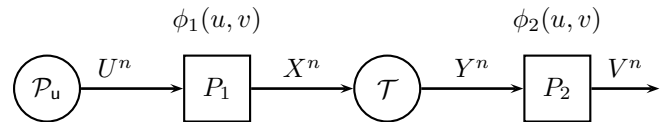


FIGURE 1 – Coordination Stratégique : La source est i.i.d. $\mathcal{P}_u(u)$ et le canal $\mathcal{T}(y|x)$ est sans-mémoire. Les fonctions d'utilité $\phi_1(u, v) \in \mathbb{R}$, $\phi_2(u, v) \in \mathbb{R}$ de P_1 et P_2 dépendent de la source U et de l'action V du récepteur P_2 .

Dans cet article, nous caractérisons les fonction d'encodage et de décodage qui forment un équilibre du jeu répété. Nous introduisons un jeu auxiliaire dans lequel les joueurs choisissent des distributions de probabilité conditionnelles qui maximisent l'espérance de leurs fonctions d'utilité. Le résultat principal est présenté Sec. 2. Sec. 3 s'intéresse au cas d'une source binaire et d'un canal binaire symétrique. Sec. 4 étudie des fonction d'utilité correspondant à un jeu d'allocation de puissance dans un canal à accès multiple.

2 Modèle

Le problème étudié est représenté par la figure 1. Les majuscules U désignent les variables aléatoires, les minuscules $u \in \mathcal{U}$ désignent leurs réalisations et \mathcal{U}^n désigne le produit cartésien n -fois. U^n, X^n, Y^n, V^n désignent les suites de variables aléatoires. Les ensembles $\mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{V}$ sont discrets. $\Delta(\mathcal{X})$ représente l'ensemble des distributions de probabilité $\mathcal{P}(X)$ sur l'ensemble \mathcal{X} . La distance de la variation totale entre deux distributions de probabilité à support discret \mathcal{Q} et \mathcal{P} s'écrit $\|\mathcal{Q} - \mathcal{P}\|_{\text{tv}} = 1/2 \cdot \sum_{x \in \mathcal{X}} |\mathcal{Q}(x) - \mathcal{P}(x)|$. La propriété de chaîne de Markov s'écrit $Y \dashv\!\!\dashv X \dashv\!\!\dashv U$ si pour tout (u, x, y) , nous avons $\mathcal{P}(y|x, u) = \mathcal{P}(y|x)$. La source d'information est distribuée de manière i.i.d. avec la loi $\mathcal{P}_u(u)$ et le canal $\mathcal{T}(y|x)$ est sans mémoire.

Définition 2.1 (Stratégies des joueurs)

• Le joueur P_1 choisit une stratégie σ et le joueur P_2 choisit une stratégie τ , définies par :

$$\sigma : \mathcal{U}^n \longrightarrow \Delta(\mathcal{X}^n), \quad (1)$$

$$\tau : \mathcal{Y}^n \longrightarrow \Delta(\mathcal{V}^n). \quad (2)$$

Ces stratégies (σ, τ) sont stochastiques.

• Une paire de stratégies (σ, τ) induit une distribution de probabilité $\mathcal{P}_{\sigma, \tau} \in \Delta(\mathcal{U}^n \times \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n \times \mathcal{V}^n)$, définie par :

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{P}(U_i) \times \mathcal{P}_{\sigma}(X^n | U^n) \times \prod_{i=1}^n \mathcal{T}(Y_i | X_i) \times \mathcal{P}_{\tau}(V^n | Y^n).$$

Définition 2.2 (Utilité espérée en n -étapes)

Les utilités du jeu en n -étapes Φ_1^n et Φ_2^n sont évaluées grâce à la distribution $\mathcal{P}_{\sigma, \tau}$ induite par (σ, τ) sur les suites (U^n, V^n) :

$$\begin{aligned} \Phi_1^n(\sigma, \tau) &= \mathbb{E}_{\sigma, \tau} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_1(U_i, V_i) \right] \\ &= \sum_{u^n, v^n} \mathcal{P}_{\sigma, \tau}(u^n, v^n) \cdot \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_1(u_i, v_i) \right], \\ \Phi_2^n(\sigma, \tau) &= \sum_{u^n, v^n} \mathcal{P}_{\sigma, \tau}(u^n, v^n) \cdot \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_2(u_i, v_i) \right]. \end{aligned}$$

Définition 2.3 Pour chaque stratégie σ de P_1 , on définit l'ensemble des n -meilleurs réponses de P_2 :

$$\text{BR}_2^n(\sigma) = \left\{ \tau, \text{ s.t. } \Phi_2^n(\sigma, \tau) \geq \Phi_2^n(\sigma, \tilde{\tau}), \forall \tilde{\tau} \neq \tau \right\}$$

Définition 2.4 On introduit la variable auxiliaire $W \in \mathcal{W}$ à support borné $|\mathcal{W}| = |\mathcal{U}| + 2$. Les ensembles de distributions de probabilités \mathcal{Q}_0 et $\mathcal{Q}_2(\mathcal{Q}(u, w))$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 &= \left\{ \mathcal{P}_u(u) \times \mathcal{Q}(w|u) \text{ s.t. } |\mathcal{W}| = |\mathcal{U}| + 2, \right. \\ &\quad \left. \max_{\mathcal{P}(x)} I(X; Y) - I(U; W) \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{Q}_2(\mathcal{Q}(u, w)) &= \operatorname{argmax}_{\mathcal{Q}(v|w)} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}(u, w) \times \mathcal{Q}(v|w)} \left[\phi_2(U, V) \right]. \end{aligned}$$

L'utilité espérée Φ_1^* de P_1 est donnée par :

$$\Phi_1^* = \sup_{\mathcal{Q}(u, w) \in \mathcal{Q}_0} \min_{\mathcal{Q}(v|w) \in \mathcal{Q}_2(\mathcal{Q}(u, w))} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}(u, w) \times \mathcal{Q}(v|w)} \left[\phi_1(U, V) \right]. \quad (3)$$

Remarque 2.5 Le supremum dans (3) n'est pas un maximum car la fonction : $\min_{\mathcal{Q}(v|w) \in \mathcal{Q}_2(\mathcal{Q}(u, w))} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}(u, w) \times \mathcal{Q}(v|w)} [\phi_1(U, V)]$ n'est pas continue.

Théorème 2.6 Nous caractérisons la limite de l'utilité de P_1 lorsque P_2 choisit la n -meilleure réponse $\tau \in \text{BR}_2^n(\sigma)$ qui minimise l'utilité de P_1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \sigma, \min_{\tau \in \text{BR}_2^n(\sigma)} \Phi_1^n(\sigma, \tau) \leq \Phi_1^*, \quad (4)$$

$$\forall \varepsilon, \exists \bar{n}, \forall n \geq \bar{n}, \exists \sigma, \min_{\tau \in \text{BR}_2^n(\sigma)} \Phi_1^n(\sigma, \tau) \geq \Phi_1^* - \varepsilon. \quad (5)$$

La démonstration est énoncée dans [2].

Lemme 1 Lorsque la capacité du canal est égale à zéro, nous avons :

$$\max_{\mathcal{P}(x)} I(X; Y) = 0 \implies \quad (6)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \sigma, \min_{\tau \in \text{BR}_2^n(\sigma)} \Phi_1^n(\sigma, \tau) = \Phi_1^*. \quad (7)$$

3 Contrôle des Croyances Postérieures

Nous considérons une source d'information $U \in \{u_1, u_2\}$ binaire de paramètre $p \in [0, 1]$, $\mathcal{P}_u(u_1) = p$ ainsi qu'une variable auxiliaire binaire $W \in \{w_1, w_2\}$. L'ensemble de distributions $\mathcal{Q}(w|u)$

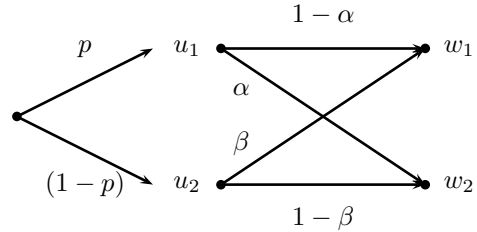


FIGURE 2 – $\mathcal{Q}(w|u)$ avec $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$.

est représenté par la figure 2 avec $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$. Les croyances postérieures sur U sachant w_1 et w_2 sont notées p_1 et p_2 :

$$\mathcal{Q}(u_1|w_1) = \frac{p \cdot (1 - \alpha)}{p \cdot (1 - \alpha) + (1 - p) \cdot \beta} = p_1, \quad (8)$$

$$\mathcal{Q}(u_1|w_2) = \frac{p \cdot \alpha}{p \cdot \alpha + (1 - p) \cdot (1 - \beta)} = p_2. \quad (9)$$

Les paramètres (α, β) qui induisent (p_1, p_2) sont donnés par :

$$\alpha = \frac{p_2 \cdot (p_1 - p)}{p \cdot (p_1 - p_2)}, \quad (10)$$

$$\beta = \frac{(1 - p_1) \cdot (p - p_2)}{(1 - p) \cdot (p_1 - p_2)}. \quad (11)$$

Lemme 2 Les paramètres $(\alpha, \beta, p_1, p_2)$ correspondent à des distributions de probabilité si et seulement si :

- 1) $p \notin \{0, 1\}$ et
- 2) $p_1 < p < p_2$ ou $p_2 < p < p_1$.

Pour toute paire de croyances postérieures $(p_1, p_2) \in [0, p[\times]p, 1]$, il existe une paire (α, β) telle que la distribution à priori p peut être scindée en $p_1 \in [0, p[$ et $p_2 \in]p, 1]$.

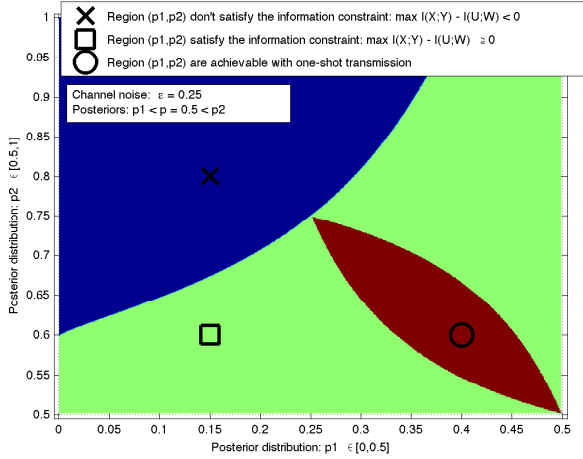


FIGURE 3 – Croyances postérieures (p_1, p_2) pour $\varepsilon = 0.25$.

3.1 Transmission en un coup sur un canal bruité

Nous considérons un canal binaire symétrique $\mathcal{T}(y|x)$ de paramètre $\varepsilon \in [0, 0.5]$, représenté par la figure 4.

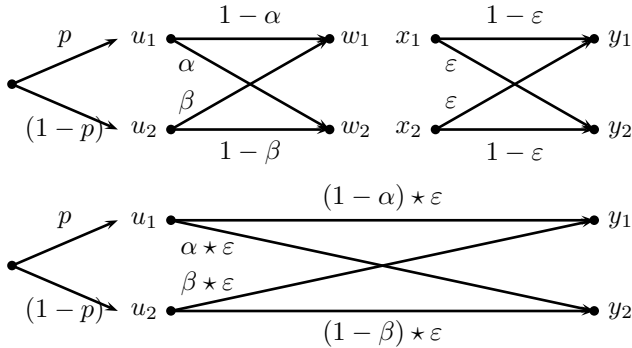


FIGURE 4 – Concaténation des distributions $\mathcal{Q}(w|u)$ et $\mathcal{T}(y|x)$ avec les paramètres $\alpha \star \varepsilon = (1 - \alpha) \cdot \varepsilon + \alpha \cdot (1 - \varepsilon)$ et $\beta \star \varepsilon$.

Proposition 3.1 Une paire de croyances postérieures (p_1, p_2) est atteignable à travers le canal $\mathcal{T}(y|x)$ si et seulement si il existe (α, β) tels que :

$$\alpha \star \varepsilon = \frac{p_2 \cdot (p_1 - p)}{p \cdot (p_1 - p_2)}, \quad (12)$$

$$\beta \star \varepsilon = \frac{(1 - p_1) \cdot (p - p_2)}{(1 - p) \cdot (p_1 - p_2)}. \quad (13)$$

Aucun paramètre α n'existe tel que $\alpha \star \varepsilon = \alpha \cdot (1 - 2\varepsilon) + \varepsilon > 1 - \varepsilon$ ou $\alpha \star \varepsilon < \varepsilon$. Cette contrainte impose une sévère

restriction à l'ensemble des croyances postérieures réalisables, représentée par le cercle sur la figure 3.

3.2 Transmission par block sur un canal bruité

Nous considérons le scénario représenté par la figure 1 lorsque les symboles sont encodés par block. D'après le Théorème 2.6, la distribution $\mathcal{Q}(w|u)$ définie par (α, β) est atteignable si et seulement si :

$$\max_{\mathcal{P}(x)} I(X; Y) - I(U; W) \geq 0, \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow 1 - H(\varepsilon) - H(\mathcal{P}(W_1)) + p \cdot H(\alpha) + (1 - p) \cdot H(\beta) \geq 0, \quad (15)$$

avec $\mathcal{P}(W_1) = p \cdot (1 - \alpha) + (1 - p) \cdot \beta$.

La figure 3 représente trois régions de croyances postérieures (p_1, p_2) . La région indiquée par le "carré" correspond aux paires (p_1, p_2) qui satisfont la contrainte d'information de l'ensemble \mathcal{Q}_0 . Cette région recouvre la région marquée par un "cercle" pour laquelle (p_1, p_2) sont atteignable en un coup. Les croyances (p_1, p_2) qui appartiennent à la région marquée d'une croix ne sont pas atteignables.

4 Exemple : Allocation de Puissance

Deux émetteurs communiquent avec une station de base en répartissant la puissance d'émission (puissance totale égale à 1) sur des canaux parallèles à évanouissement [30]. Les transmissions sont simultanées et causent de l'interférence, la variance du bruit est $\sigma^2 = 1$. Nous considérons deux configurations de canal $G \in \{g_A, g_B\}$, tirées avec probabilité $(p, 1 - p)$, $p = 0.5$. Les gains du canal sont notre source d'information $U = G$.

	g_A	g_B
g_{11}	1.1878	0.1811
g_{12}	1.1566	1.4475
g_{21}	0.8407	0.0717
g_{22}	0.6293	0.6858

La puissance du premier émetteur est fixée $(a_1, 1 - a_1) = (0.16, 0.84)$ alors que le second choisit une allocation $(v, 1 - v)$, $v \in \mathcal{V} = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$, afin de maximiser $\mathbb{E}[\phi_2(G, v)]$.

$$\mathbb{E}[\phi_2(G, v)] = p \cdot \phi_2(g_A, v) + (1 - p) \cdot \phi_2(g_B, v),$$

$$\phi_2(g, v) = \log_2 \left(1 + \frac{v \cdot g_{21}}{\sigma^2 + a_1 \cdot g_{11}} \right) + \log_2 \left(1 + \frac{(1 - v) \cdot g_{22}}{\sigma^2 + (1 - a_1) \cdot g_{12}} \right).$$

La station de base connaît la réalisation des gains du canal $G \in \{g_A, g_B\}$ et cherche à persuader P_2 de choisir une allocation $v \in \mathcal{V}$ favorable à l'émetteur P_1 . L'utilité de la station de base $\phi_1(G, v)$ est donnée par celle de P_1 :

$$\phi_1(g, v) = \log_2 \left(1 + \frac{a_1 \cdot g_{11}}{\sigma^2 + v \cdot g_{12}} \right) + \log_2 \left(1 + \frac{(1 - a_1) \cdot g_{12}}{\sigma^2 + (1 - v) \cdot g_{22}} \right). \quad (16)$$

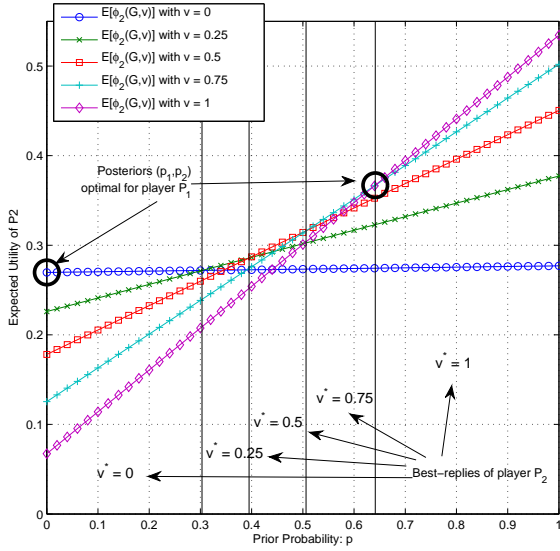


FIGURE 5 – Utilité espérée $\mathbb{E}[\phi_2(G, v)]$ de P_2 . La meilleure réponse de P_2 en fonction de sa croyance $p \in [0, 1]$ est notée $v^* \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$.

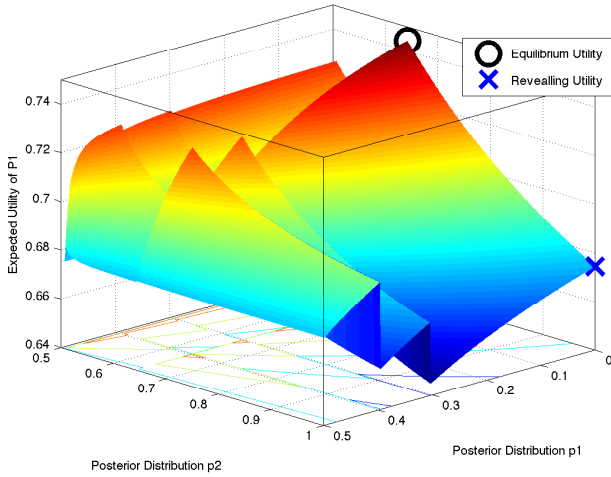


FIGURE 6 – Utilité espérée $\mathbb{E}[\phi_1(G, v)]$ de P_1 en fonction des croyances postérieures (p_1, p_2) . Les discontinuités sont dues aux changements de meilleur réponse v^* de P_2 données par la figure 5.

Sans bruit de canal $\varepsilon = 0$, l'utilité optimale $\mathbb{E}[\phi_1] \simeq 0.74$ de P_1 est représentée par un "cercle noir" sur les figures 6 et 5 avec $(p_1, p_2) = (0, 0.6415)$ et $(\alpha, \beta) = (1, 0.4424)$. Cette solution correspond à 9.1% d'amélioration comparée à la stratégie révélatrice ("croix bleue" $\mathbb{E}[\phi_1] \simeq 0.67$). Lorsque le canal $\mathcal{T}(y|x)$ est bruité $\varepsilon = 0.25$, l'ensemble des croyances postérieures est restreint. La solution optimale est représentée sur la figure 7 par le "carré rouge" pour la transmission en un coup, et le "plus vert" pour la transmission par block.

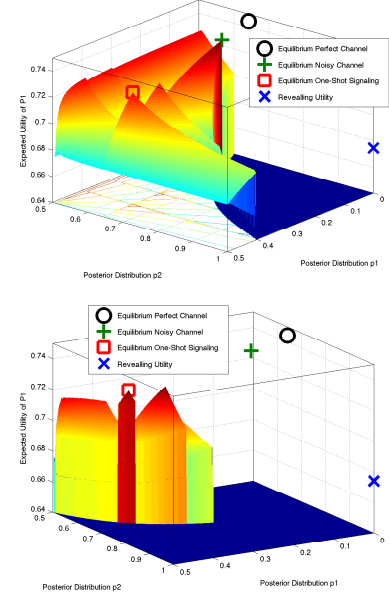


FIGURE 7 – Utilité espérée de P_1 de la figure 6, restreinte aux régions réalisables de la figure 3.

Références

- [1] E. Kamenica and M. Gentzkow, "Bayesian persuasion," *American Economic Review*, vol. 101, pp. 2590–2615, 2011.
- [2] M. Le Treust and T. Tomala, "Information design for strategic coordination of autonomous devices with non-aligned utilities," *IEEE Proc. of the 54th Allerton conference, Monticello, Illinois*, pp. 233–242, 2016.
- [3] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379–423, 1948.
- [4] V. P. Crawford and J. Sobel, "Strategic Information Transmission," *Econometrica*, vol. 50, no. 6, pp. 1431–1451, 1982.
- [5] F. Forges, "Non-zero-sum repeated games and information transmission," in: *N. Meggido, Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler, Springer-Verlag*, no. 6, pp. 65–95, 1994.
- [6] R. Aumann and M. Maschler, *Repeated Games with Incomplete Information*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
- [7] J. Mertens, S. Sorin, and S. Zamir, *Repeated Games*. Cambridge University Press, 2015.
- [8] R. Laraki, "The splitting game and applications," *International Journal of Game Theory*, vol. 30, pp. 359–376, 2001.
- [9] J. Renault, E. Solan, and N. Vieille, "Optimal dynamic information provision," <http://www.lse.ac.uk/statistics/events/2015-16-Seminar-Series/Optimal-Dynamic-Information-Provision.pdf>, February 2016.
- [10] J. Ely, "Beeps," *Manuscript, Department of Economics, Northwestern University*, 2015.
- [11] E. Akyol, C. Langbort, and T. Başar, "Strategic compression and transmission of information," in *Information Theory Workshop - Fall (ITW)*, 2015 IEEE, pp. 219–223, Oct 2015.
- [12] O. Gossner, P. Hernandez, and A. Neyman, "Optimal use of communication resources," *Econometrica*, vol. 74, pp. 1603–1636, Nov. 2006.
- [13] O. Gossner and T. Tomala, "Secret correlation in repeated games with imperfect monitoring," *Mathematics of Operation Research*, vol. 32, no. 2, pp. 413–424, 2007.
- [14] O. Gossner and T. Tomala, "Empirical distributions of beliefs under imperfect observation," *Mathematics of Operation Research*, vol. 31, no. 1, pp. 13–30, 2006.
- [15] O. Gossner, R. Laraki, and T. Tomala, "Informationally optimal correlation," *Mathematical Programming*, vol. 116, no. 1–2, pp. 147–172, 2009.
- [16] O. Gossner and N. Vieille, "How to play with a biased coin?," *Games and Economic Behavior*, vol. 41, no. 2, pp. 206–226, 2002.
- [17] G. Kramer and S. Savari, "Communicating probability distributions," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 2, pp. 518–525, 2007.
- [18] P. Cuff, H. Permuter, and T. Cover, "Coordination capacity," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 9, pp. 4181–4206, 2010.
- [19] P. Cuff and L. Zhao, "Coordination using implicit communication," *Information Theory Workshop (ITW)*, IEEE, pp. 467–471, 2011.
- [20] P. Cuff and C. Schieler, "Hybrid codes needed for coordination over the point-to-point channel," in *Communication, Control, and Computing (Allerton)*, 2011 49th Annual Allerton Conference on, pp. 235–239, Sept 2011.
- [21] M. Le Treust, A. Zaidi, and S. Lasaulce, "An achievable rate region for the broadcast wiretap channel with asymmetric side information," *IEEE Proc. of the 49th Allerton conference, Monticello, Illinois*, pp. 68–75.
- [22] M. Le Treust, "Empirical coordination for the joint source-channel coding problem," *submitted to IEEE Trans. on Information Theory*, <http://arxiv.org/abs/1406.4077>, 2014.
- [23] B. Laroousse, S. Lasaulce, and M. Bloch, "Coordination in distributed networks via coded actions with application to power control," *Submitted to IEEE Transactions on Information Theory*, <http://arxiv.org/abs/1501.03685>, 2014.
- [24] M. Le Treust, "Correlation between channel state and information source with empirical coordination constraint," in *IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, pp. 272–276, Nov 2014.
- [25] M. Le Treust, "Empirical coordination with two-sided state information and correlated source and state," in *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, 2015.
- [26] M. Le Treust, "Empirical coordination with channel feedback and strictly causal or causal encoding," in *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, 2015.
- [27] B. Laroousse, S. Lasaulce, and M. Wigger, "Coordinating partially-informed agents over state-dependent networks," *IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, 2015.
- [28] G. Cervia, L. Luzzi, M. R. Bloch, and M. L. Treust, "Polar coding for empirical coordination of signals and actions over noisy channels," in *Proc. IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, 2016.
- [29] M. Le Treust and M. Bloch, "Empirical coordination, state masking and state amplification : Core of the decoder's knowledge," *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, 2016.
- [30] E. V. Belmega, S. Lasaulce, and M. Debbah, "Power allocation games for mimo multiple access channels with coordination," *IEEE Trans. on Wireless Communications*, vol. 8, no. 6, pp. 3182–3192, 2009.