

# Des filtres anisotropes causaux pour une diffusion non contrôlée

Philippe MONTESINOS · Baptiste MAGNIER

LGI2P, Ecole des Mines d'Alès, Parc scientifique Georges Besse, 30000 Nîmes, France

{philippe.montesinos, baptiste.magnier}@mines-ales.fr

**Résumé** – Une nouvelle EDP de diffusion sans fonction de contrôle est proposée dans ce papier, préservant naturellement coins et jonctions dans les images. Ainsi, des filtres causaux anisotropes nous fournissent une description fine de la surface image autour de chaque pixel. En chaque pixel, deux directions sont calculées par les extrema locaux de la réponse aux filtres causaux directionnels. Ces directions permettent une diffusion asymétrique modulo 360 degrés pour tous les pixels. Cette nouvelle EDP est comparée aux principales méthodes existantes, les résultats obtenus montrent une meilleure préservation des structures ainsi qu'une plus grande robustesse au bruit pour tous les tests effectués.

**Abstract** – In this paper, we propose a new control-free diffusion PDE scheme, preserving naturally corners and junctions in images. Causal anisotropic smoothing in one direction and derivation along the perpendicular direction filters are used to obtain a precise description of the image surface around each pixel. We consider the curve crossing a pixel on which the two directions correspond to directional extrema of the filter responses. These directions enable an asymmetric diffusion modulo 360 degrees. This new PDE is compared to state of the art methods, results obtained have demonstrated a better preservation of structures and a better robustness to noise.

## 1 Introduction

La régularisation des images est un problème majeur en vision par ordinateur notamment pour la détection de contours, de points d'intérêt, etc., mais elle joue aussi un rôle central en restauration d'images. Dans ce cadre, un effort de recherche très important à été développé autour des équations aux dérivées partielles (EDP) [6][3]. En effet, les EDPs sont capables d'appliquer par exemple, un lissage sélectif aux images [13], permettant d'éliminer le bruit tout en conservant les principales structures telles que les contours ou les coins. L'idée fondatrice à été d'interpréter le lissage gaussien comme une la solution d'une équation de diffusion : l'équation de la chaleur. L'analogie qui est faite ici, est d'assimiler l'intensité lumineuse de l'image à une température ponctuelle dans le plan qui va diffuser. Nous avons alors un lien direct entre le paramètre de lissage de la gaussienne  $\sigma$  et le temps de diffusion  $t$ . Un modèle général d'évolution s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = g_1 \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial u^2} + g_2 \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial v^2} = g_1 \cdot I_{uu} + g_2 \cdot I_{vv}, \quad (1)$$

où  $I_{uu}$  et  $I_{vv}$  représentent deux dérivées secondes directionnelles selon deux directions  $u$  et  $v$  (généralement  $u \perp v$ ),  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions qui pondèrent la diffusion ; évidemment  $u$ ,  $v$ ,  $g_1$  et  $g_2$  peuvent dépendre du point considéré. Par exemple, une diffusion anisotrope dans la direction des contours permet de conserver ces derniers. Il existe de nombreuses méthodes de régularisation des images préservant les discontinuités. Le modèle de Perona-Malik (PM) [13] est l'un des travaux pionniers dans ce domaine. Ce modèle utilise une fonction contrôlant la diffusion, décroissante à valeurs entre 0 et 1, elle tend 0 lorsque la valeur du gradient augmente. Une des fonctions couramment utilisée est la gaussienne :  $g(|\nabla I|) = e^{-|\nabla I|^2/k^2}$ , où  $k$  est un seuil, ( $k \in \mathbb{R}_+^*$ ). Les valeurs des pixels sont diffusées en fonction de la magnitude du gradient local (gradient Nord, Sud, Est et Ouest). Selon l'amplitude du gradient, la dif-

fusion sera donc plus ou moins importante. Malheureusement, ce modèle ne présente pas d'interprétation géométrique simple. Il fait aussi intervenir implicitement un terme de réaction qui renforce les contours, ce qui fait souvent apparaître de faux contours dans des zones où l'intensité lumineuse est lentement variable. Enfin le choix du seuil dans la fonction de contrôle s'avère délicat dans le cas des images fortement bruitées.

La MCM (*Mean Curvature Motion*) représente un autre schéma important [4]. Pour chaque pixel, elle effectue une diffusion des valeurs des pixels dans la direction  $\xi$  des contours :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_\xi \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} = c_\xi \cdot I_{\xi\xi}, \quad \text{avec : } c_\xi = 1. \quad (2)$$

Ce schéma conserve les contours, cependant, le terme  $I_{\xi\xi}$  est le produit de la norme du gradient par la courbure des isophotes. Un point de contour avec une forte courbure va donc bouger plus rapidement qu'un point situé sur un contour rectiligne. En conséquence, une forme géométrique elliptique, rectangulaire, etc., évolue vers un cercle au cours des itérations [6]. Afin de limiter cet effet, on peut introduire un terme  $c_\xi \neq 1$  (Eq. 2) permettant de contrôler localement la diffusion ; il peut dépendre du gradient gaussien  $|\nabla I_\sigma|$ . On appelle cette méthode MCMC, contrôlé par  $g(|\nabla I|) = e^{-|\nabla I|^2/k^2}$ . Aussi, dans la méthode C-G [5], le contrôle s'effectue par la fonction  $g_1$  dans le Tab. 1.

Les EDP basées sur le tenseur de gradient permettent également de conserver les contours, par calcul des vecteurs et valeurs propres. Un tenseur de structure  $J_\rho$  est associé à un tenseur de gradient  $\nabla I_\sigma \cdot \nabla I_\sigma^T$  (estimé par convolution de l'image avec les dérivées premières de la gaussienne d'écart type  $\sigma$ ) dont les termes sont lissés avec une gaussienne  $G_\rho$  (d'écart type  $\rho$ ) :  $J_\rho = G_\rho * (\nabla I_\sigma \cdot \nabla I_\sigma^T)$ . Le paramètre  $\sigma$  vise à réduire l'impact du bruit. Alternativement,  $\rho$  prend des valeurs en fonction de la taille des structures que l'on souhaite conserver. Les valeurs propres (resp.  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ) permettent de contrôler

TABLE 1 – Fonctions pour le contrôle de la diffusion

Méthode	Fonction $g_1$	Fonction $g_2$	Paramètres
C-G [5]	$\frac{ \nabla I_\sigma ^2}{ \nabla I_\sigma ^2 + \sigma^2}$	0	Aucun
MCMT [15]	$\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}$	0	Aucun
DTS [18]	1	$e^{-\frac{\lambda_2^2}{2 \cdot k^2}}$	$k \in \mathbb{R}_+^*$
CED [19]	$\alpha$	$\begin{cases} \alpha & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \\ \alpha + (1 - \alpha) \cdot e^{\frac{-C}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}} & \text{sinon} \end{cases}$	$C > 0$ $\alpha \in [0, 1]$
BFlow [16]	$\sqrt{\frac{1+\lambda_2}{1+\lambda_1}}$	$\sqrt{\frac{1+\lambda_1}{1+\lambda_2}}$	Aucun
Trace [17]	$\frac{1}{(1+\lambda_1+\lambda_2)^{p1}}$	$\frac{1}{(1+\lambda_1+\lambda_2)^{p2}}$	$0 < p_1 < p_2$
PCC [7]	$e^{-\frac{\lambda_1}{k_u}}$	$e^{-\frac{\lambda_2}{k_v}}$	$0 < k_1 < k_2$

la diffusion qui se fera majoritairement dans les directions des vecteurs propres. Reprenant l'Eq. 1, les vecteurs propres sont représentés par  $u$  et  $v$ ; le Tab. 1 indique les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  contrôlant la diffusion dans ces deux directions. Ainsi, pour les méthodes DTS, CED et Trace, plus la valeur de  $\rho$  est élevée, plus la diffusion sera anisotrope : dans la direction des contours. Aussi, la MCMT est très similaire à la MCM, où les directions sont données ici par le vecteur propre associé à la valeur propre principale. Enfin, les deux approches BFlow et PCC permettent de conserver correctement les coins, mais lorsque le bruit ou les textures dans l'image sont trop forts, le processus de diffusion est inhibé ou trop faible et l'image n'est pas régularisée.

Le contrôle de la diffusion est un élément important dans une EDP de restauration. En effet, les coins ou les petites structures peuvent rapidement disparaître après quelques itérations. La méthode présentée ici diffuse dans les deux directions des contours, calculées par l'intermédiaire de demi-filtres gaussiens. Même sans contrôle du flux de diffusion, elle permet de préserver ou restaurer les objets ainsi que leurs coins.

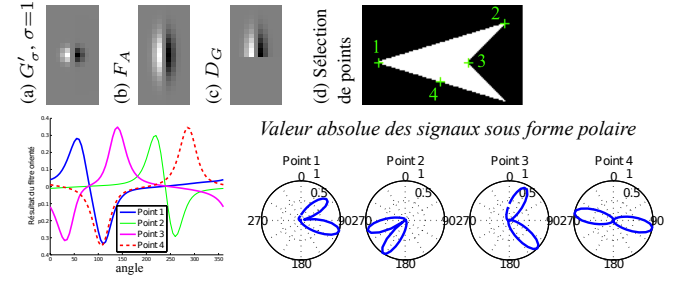
## 2 Les filtres asymétriques orientés

Les filtres orientés ont été conçus pour capturer des variations d'intensité de gris dans différentes directions. En effet, ces filtres permettent de trouver l'orientation où la dérivée de l'image correspond à la réponse maximale. Afin d'obtenir une meilleure sélectivité angulaire, Perona suggère de lisser davantage dans la direction du filtre à l'aide de filtres anisotropes [14], comme un noyau anisotrope gaussien ( $F_A$ ) :

$$F_A(x, y, \sigma_\xi, \sigma_\eta) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_\xi \cdot \sigma_\eta} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{y^2}{\sigma_\eta^2} \right)}, \quad (3)$$

où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  représente les coordonnées du pixel,  $\sigma_\eta$  et  $\sigma_\xi$  se réfèrent à l'échelle de la gaussienne et au facteur d'anisotropie respectivement (Fig. 1(b)). Le filtre  $F_A$  est orienté et dérivé pour extraire les contours [14]. Une MCM, notée  $MCM_{FA}$  ( $MCMC_{FA}$  si contrôle), peut être dirigée par les directions du  $F_A$ . Cependant, il est impossible d'extraire plusieurs orientations de contour co-existantes pour le même pixel directement avec  $F_A$  mais une seule comprise entre 0 et 180° [14][12].

Contrairement au filtre  $F_A$  décrit ci-dessus, les filtres orientés asymétriques [12] [10] demeurent mieux adaptés pour détecter les différentes directions émanant d'un même pixel. Trouver plusieurs directions de contours nécessite de déterminer les réponses maxima des filtres lorsque ces derniers sont successi-


 FIGURE 1 – Différents noyaux de gaussiennes dérivées 2D discrets et calcul des directions  $\xi_1$  et  $\xi_2$ . (b) et (c) avec  $\sigma_\eta = 1$  et  $\sigma_\xi = 3$ .

vement dirigés dans des directions différentes de 0 à 360°. Ce type de filtrage revient à l'utilisation de gaussiennes anisotropes causales orientées. L'équation du détecteur de contour anisotrope basé sur le demi-noyau gaussien ( $D_G$ ) est donc :

$$D_G(x, y, \sigma_\xi, \sigma_\eta) = -H(y) \cdot \frac{x}{\sigma_\eta^2} \cdot F_A(x, y, \sigma_\xi, \sigma_\eta), \quad (4)$$

où  $H$  correspond à la fonction échelon, voir la Fig. 1 (c). En tournant l'image, les extrema des réponses du filtre indiquent les directions des contours selon l'orientation  $\theta \in [0, 360^\circ[$  :

$$\xi_1(x, y) = \arg \max_{\theta \in [0, 360[} (D_G(x, y, \theta)) \text{ et } \xi_2(x, y) = \arg \min_{\theta \in [0, 360[} (D_G(x, y, \theta)).$$

Les réponses aux filtres asymétriques orientables caractérisent facilement les coins ou les contours courbes (Fig. 1). Ainsi une MCM dirigée selon les deux directions  $(\xi_1, \xi_2)$  semble convenir à la préservation des coins et petits objets dans les images. La Fig. 1(bas) présente les réponses angulaires aux filtres orientés au niveau des coins et des contours rectilignes.

## 3 MCM dans les directions $\xi_1$ et $\xi_2$

La MCM a un effet de sur-lissage pour les coins, afin de contrer cet effet, nous adaptons simplement ce schéma pour diffuser de manière curviligne avec l'EDP suivante :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial^2 I}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = I_{\xi_1 \xi_2}, \quad (5)$$

où,  $I_{\xi_1 \xi_2}$  représente la dérivée seconde de l'image dans les deux directions principales du  $D_G$  [9], voir Fig. 1 (bas).

Dans cette équation, le terme  $I_{\xi_1 \xi_2}$  représente une dérivée seconde de la fonction intensité de l'image le long d'une courbe. Comme pour un filtre de dérivée seconde classique en une dimension, il peut être obtenu par l'application successive de deux filtres de dérivées premières, soit une dérivée à droite ( $\xi_1$ ) puis une dérivée à gauche ( $\xi_2$ ). Cet opérateur est discrétisé de la manière suivante : dans une fenêtre  $3 \times 3$ , les orientations  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont reportées, une interpolation linéaire de la fonction lumineuse est effectuée de manière à estimer les valeurs de cette fonction ( $I_1$  et  $I_2$ ) à la distance 1 du pixel central dans les directions données par  $\xi_1$  et  $\xi_2$  (voir Fig. 2 (b)).

Cependant, utiliser directement les directions  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sans contrôle pour la diffusion crée un problème majeur. En effet, pour un pixel de contour, la diffusion est effectuée le long du contour passant par ce pixel, indépendamment de la géométrie du contour. Malheureusement, ceci n'est vrai que pour les pixels appartenant au contour, la Fig. 2(a) illustre les directions  $\xi_1$  et  $\xi_2$  pour un pixel appartenant ou non, à un contour. Ainsi, pour un pixel proche d'un contour (pixel  $P_2$ ), les directions  $\xi_1$  et  $\xi_2$

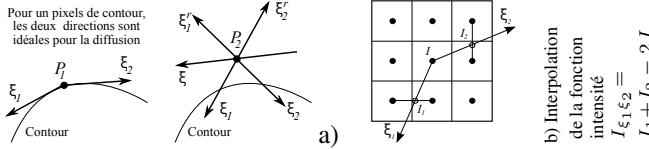


FIGURE 2 – a) Directions de diffusion obtenues avec les filtres de dérivation causaux ( $P_1$  : pixel de contour,  $P_2$  : pixel hors du contour).

sont influencées par le gradient de l’image, et ne correspondent plus aux directions de l’isophote. L’EDP proposée à l’Eq. 5 réalise donc une dilatation. En présence de bruit, ces directions deviennent moins bien définies [10], nous obtenons alors une dilatation irrégulière et bruitée, comme présenté dans la Fig. 3.

On notera encore que  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont estimées à l’aide de filtres anisotropes de paramètre  $\sigma_\xi$  important, ces directions ne correspondent donc généralement pas à un isophote dans un voisinage  $3 \times 3$ , par conséquent, même sur les pixels de contours, la diffusion n’est donc pas nulle. La solution proposée dans [10] est d’aligner les deux directions du  $D_G$  lorsque la valeur du gradient est faible. Cela ne permet pas de diffuser correctement l’information pour les pixels situés très proches des contours, et qui possèdent donc un fort gradient également. Dans [8], un schéma de diffusion similaire à l’Eq. 5 est proposé où les directions sont estimées à partir d’un filtre d’homogénéité le long des contours. Cependant, le contrôle de la diffusion ressemble à la méthode de PM (càd localement dans un masque  $3 \times 3$ ), afin d’éviter toute fuite d’information comme en Fig. 3(b). Pour obtenir un schéma de restauration, il nous faut définir des directions de diffusion indépendantes de l’influence du gradient.

Considérons maintenant un objet blanc sur fond noir, un pixel extérieur à cet objet doit subir une diffusion provenant de pixels de l’extérieur, de même que pour des pixels intérieurs. Il suffit donc de “retourner” les orientations de diffusion, par exemple en effectuant une réflexion miroir de  $\xi_1$  et  $\xi_2$  par rapport à l’axe  $\xi$  (perpendiculaire à la médiatrice  $\xi_1, \xi_2$ ), pour obtenir  $\xi_1^r$  et  $\xi_2^r$  (voir Fig. 2 b)). En pratique, il suffit de calculer  $I_{\xi_1, \xi_2}$ ,  $I_{\xi_1^r, \xi_2^r}$  et  $I_{\xi\xi}$  puis de choisir comme terme de diffusion celui correspondant au minimum en valeur absolue, soit le schéma de diffusion appelé Diffusion Anisotrope Asymétrique (DAA) :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \arg \min_{x \in \{I_{\xi_1, \xi_2}, I_{\xi_1^r, \xi_2^r}, I_{\xi\xi}\}} |x| \quad (6)$$

La Fig. 3(h) présente les orientations  $\xi_1, \xi_2, \xi_1^r$  et  $\xi_2^r$  en superposition à l’image du cercle de la Fig. 3 (a). On constatera la grande immunité au bruit des orientations estimées par les filtres causaux ( $\sigma_\eta = 1, \sigma_\xi = 10$ ) et la stabilité de la diffusion.

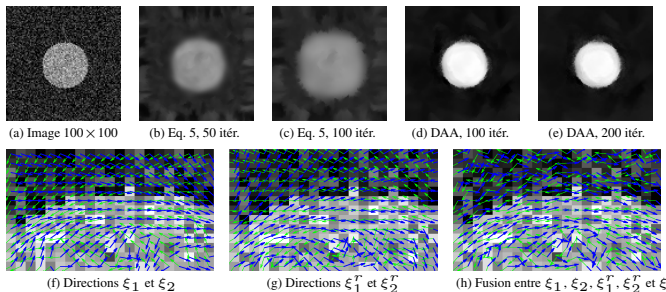


FIGURE 3 – Le schéma de diffusion en Eq. 6 plus stable que celui en Eq. 5.

## 4 Résultats expérimentaux

La Fig. 4 illustre les performances de la méthode DAA par rapport aux autres méthodes de restauration basées sur les EDP sur une image synthétique bruitée. Tout d’abord, visuellement, le bruit présent en Fig. 4(b<sub>i</sub>) disparaît alors que la plupart des contours deviennent plus nets, contrairement aux autres approches qui soient, ne diffusent pas les pixels de bruit, soient créent un flou important pour les contours des objets. Afin de valider la préservation des contours, nous appliquons deux méthodes d’évaluations sur les contours pour chaque itération de diffusion : 1-FoM [1] et  $KPI_\psi$  [2]. Le contour de référence  $C_r$  est présenté en Fig. 4(a<sub>i</sub>), les pixels de contours mal placés sont pénalisés en fonction de leur distance par rapport à leurs positions idéales dans  $C_r$ . Ainsi, plus le contour de l’image restaurée est éloigné de  $C_r$ , plus le résultat des mesures s’éloigne de 0. Les méthodes MCM et CED (Fig. 4(d<sub>i</sub>) et (j<sub>i</sub>)) éliminent le bruit, mais le score des mesures illustre une délocalisation des contours due au flou créé par la diffusion, flou qui n’est pas présent avec la DAA. D’un part, les scores de 1-FoM et  $KPI_\psi$  se rapprochent rapidement de 0 pour la DAA, illustrant ainsi que le bruit est éliminé avec peu d’itérations, d’autre part, les contours des objets deviennent de plus en plus apparents avec l’accroissement des itérations. La différence entre les courbes rouge et noire est que les directions de diffusions sont calculées à chaque itération de diffusion (courbe noire), illustrant ainsi l’intérêt de les recalculer régulièrement afin d’obtenir d’une meilleure préservation/restauration des bords des objets. Aussi en Fig. 4(q)-(v), la segmentation région devient efficace.

La Fig. 5 présente les résultats de la DAA obtenus sur une image réelle acquise en très basse lumière contenant donc un bruit d’acquisition ( $\sigma_\xi = 10$  et  $\sigma_\eta = 1$ ). Le double contour à gauche ainsi que, le coin en bas à gauche de la boîte sont reconstruits. A partir de 100 itérations, le bruit est considérablement filtré tandis qu’une portion de texte immergé : “M...so.t” (au-dessus du texte en gras sur la gauche). Cette information est cependant tellement ténue qu’elle finit par disparaître complètement au-delà de 200 itérations. Jusqu’à l’itération 1000, le texte en gras reste lisible alors que le bruit a quasiment disparu.

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons mis en évidence l’importance de l’estimation précise des directions de diffusion pour la restauration d’images. En effet certaines méthodes qui utilisent un voisinage  $3 \times 3$  pour le calcul des dérivées et de l’orientation du gradient ont des difficultés dès que le bruit augmente tandis que celles prenant en compte un voisinage plus important floute certaines parties du signal. Un schéma de diffusion libre est proposé n’utilisant aucune fonction de contrôle et dont les résultats obtenus sont supérieurs à toutes les méthodes testées.

## Références

- [1] I. E. Abdou et W. K. Pratt, *Quantitative design and evaluation of enhancement/thresholding edge detectors*, Proc. of the IEEE, vol. 67, pp. 753–763, 1979.



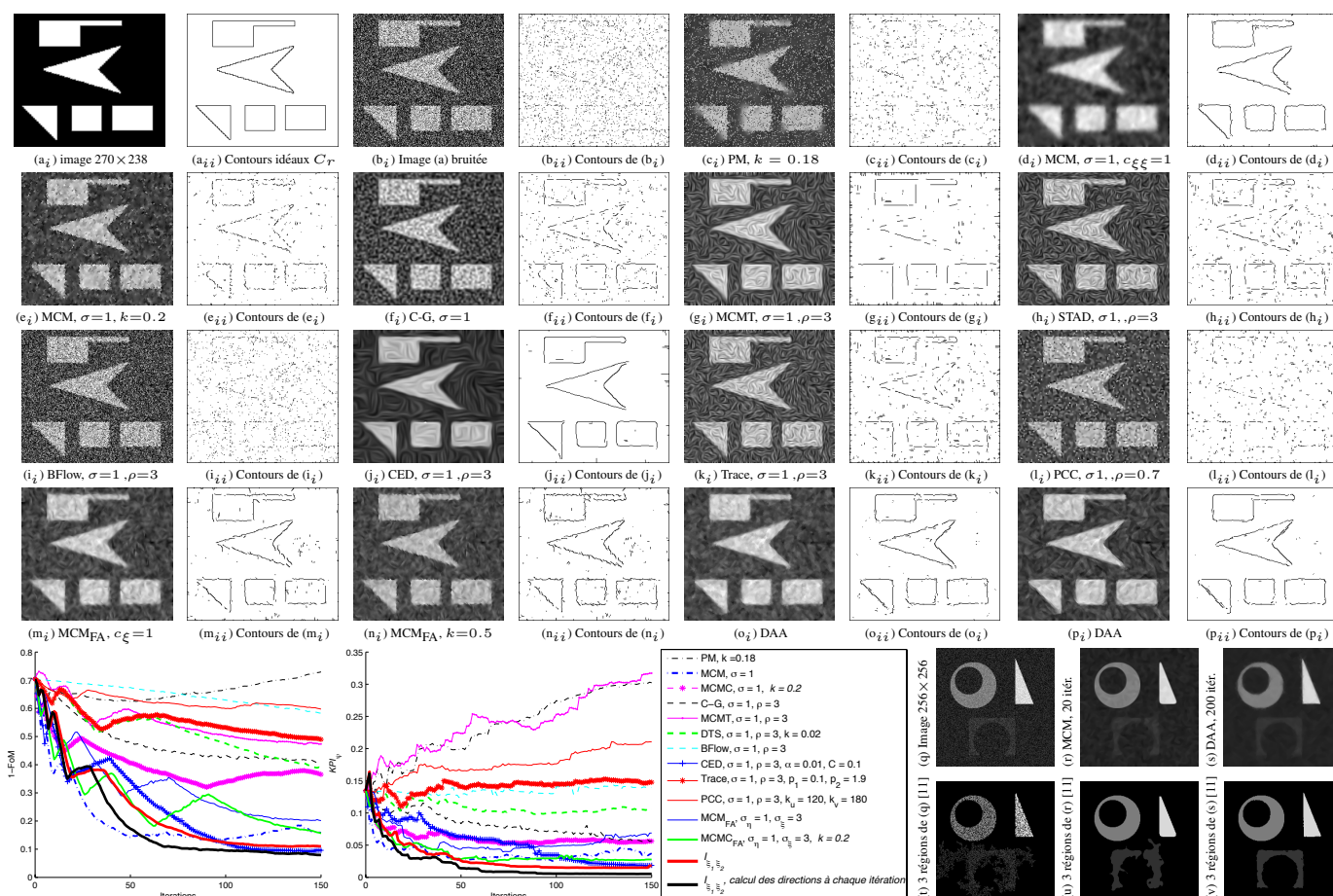


FIGURE 4 – Comparaison de différentes méthodes de diffusion sur une image bruitée ( $b_1$ ),  $SNR = 3.4dB$ , suivi d'une détection de contour avec un filtre de Sobel après 100 itérations. Les images de contours affichées correspondent aux contours idéaux pour la mesure FoM [1]. Les courbes représentent des scores en fonction du nombre d'itérations de diffusion pour deux méthodes d'évaluation de contours [1][2], le seuil retenu pour la segmentation correspond au meilleur score de la mesure. Pour  $MCM_{FA}$  :  $\sigma_\xi = 5$  et  $\sigma_\eta = 1$  et pour notre méthode DAA :  $\sigma_\xi = 10$  et  $\sigma_\eta = 1$ .

[2] H. Abdulrahman, B. Magnier, et P. Montesinos, *A new normalized supervised edge detection evaluation*, IbPRIA - à paraître-, 2017.

[3] G. Aubert et P. Kornprobst, *Mathematical problems in image processing : partial differential equations and the calculus of variations (second edition)*, vol. 147, Springer-Verlag, 2006.

[4] F. Catté, P.-L. Lion, J.-. Morel et T. Coll, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM J. of Num. Anal., vol. 29(1), 182–193, 1992.

[5] G. H. Cottet et L. Germain, *Image processing through reaction combined with nonlinear diffusion*, Math. of Comput., pp. 659–673, 1993.

[6] R. Deriche et O. Faugeras, *Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur*, TS, vol.13(6), pp. 551–577, 1996.

[7] F. Drira, F. Le Bourgeois et H. Emptoz, *A new PDE-based approach for singularity-preserving regularization : application to degraded characters restoration*, IJDAR, 15(3), 183-212, 2012.

[8] C. Germain, R., Terebes et O. Laviaille, *Diffusion anisotrope asymétrique et multi-orientée*, GRETSI, 2009

[9] B. Magnier et P. Montesinos, *Evolution of image regularization with PDEs toward a new anisotropic smoothing based on half kernels*, SPIE Electronic Imaging, pp. 86550M–86550M.

[10] B. Magnier et P. Montesinos, *Oriented half gaussian kernels and anisotropic diffusion*, in VISAPP, vol. 1, pp. 73–81, 2014.

[11] P. Montesinos, *Mise en œuvre d'une méthodologie en vue de l'interprétation automatique d'images aériennes en vision par ordinateur*, Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis, 1990.

[12] P. Montesinos et B. Magnier, *A new perceptual edge detector in color images*, ACIVS, pp. 209–220, 2010.

[13] P. Perona et J. Malik, *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*, IEEE TPAMI, vol. 12, 629–639, 1990.

[14] P. Perona, *Steerable-scalable kernels for edge detection and junction analysis*, IVC, vol. 10, pp. 663–672, 1992.

[15] G. Sapiro, D. Ringach, *Anisotropic diffusion of multivalued images with applications to color filtering*, IEEE TIP, vol.5(11), pp.1582–1586, 1996.

[16] N. Sochen, R. Kimmel, et R. Malladi, *A general framework for low level vision*, IEEE TIP, 7(3), pp. 310–318, 1998

[17] D. Tschumperlé et R. Deriche, *Vector-valued image regularization with PDEs : A common framework for different applications*, IEEE TPAMI, vol. 27(4), 506–517, 2005.

[18] J. Weickert, *Anisotropic diffusion in image processing*, ECMI Series, Teubner-Verlag, 1998.

[19] J. Weickert, *Coherence-enhancing diffusion filtering*, IJCV, vol. 31(2), pp. 111–127, 1999.

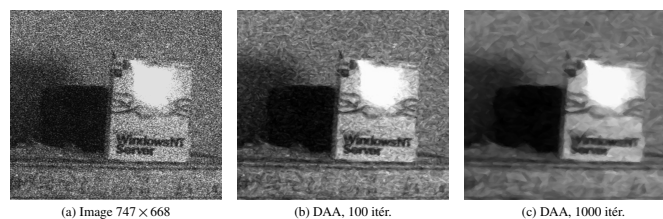


FIGURE 5 – Image réelle contenant un bruit très important d'acquisition.