

Estimation des paramètres d'un bruit gaussien généralisé basée sur le kurtosis des statistiques minimales

Fabien MILLIOZ¹, Irène GANNAZ²

¹Université de Lyon, CREATIS, CNRS UMR 5220, INSERM U1044, Université Claude Bernard Lyon 1, INSA-Lyon
7 Avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne Cedex, France

²Université de Lyon, CNRS UMR 5208, INSA de Lyon, Institut Camille Jordan, France
fabien.millioz@univ-lyon1.fr, irene.gannaz@insa-lyon.fr

Résumé – Nous présentons dans ce papier une méthode d'estimation des paramètres d'un bruit gaussien généralisé, à partir du kurtosis des valeurs minimales d'un signal bruité, composé d'un signal quelconque additionné du bruit à estimer, sous hypothèse de parcimonie du signal dans le plan temps-fréquence.

Abstract – We present in this paper an estimation method of the parameters of a generalized Gaussian noise. Under the hypothesis that a signal is sparse in the time-frequency domain, we use the kurtosis of the minimal values of the noisy signal, made of the unknown signal added to the noise to estimate.

1 Introduction

L'estimation des paramètres d'un bruit est souvent une question primordiale en traitement du signal : l'acquisition d'un signal est généralement perturbée par un bruit, dont l'estimation est nécessaire pour construire des méthodes de détection ou de filtrage du signal. Toutefois, cette estimation est souvent difficile, lorsque le signal est *a priori* inconnu.

Dans le cadre de l'analyse temps-fréquence, l'hypothèse implicite est que le signal analysé est parcimonieux dans ce domaine, c'est-à-dire qu'il est présent sur une zone restreinte du plan temps-fréquence. Par conséquent, les autres zones ne contiennent que du bruit, ce qui fournit des échantillons sur lesquels l'estimer. La difficulté est de séparer les échantillons ne contenant que du bruit de ceux qui contiennent du signal en plus du bruit.

Pour résoudre ce problème, deux principales techniques existent. La première repose sur des méthodes itératives, surestimant la puissance du bruit afin de détecter le signal de plus forte énergie, d'écartier ce dernier puis d'itérer l'estimation du bruit [1, 2]. Ces méthodes ont l'inconvénient d'être assez lentes, étant itératives jusqu'à convergence. Une seconde technique s'appuie sur les statistiques minimales du signal, c'est-à-dire les valeurs les plus faibles. On suppose qu'elles ne contiennent que du bruit [3, 4], et que le signal sera restreint sur la valeur de plus grande énergie. Cette famille de méthodes requiert des choix *ad hoc*, ou une estimation du nombre de points ne contenant que du bruit.

Une nouvelle méthode basée sur le kurtosis des statistiques minimales a été proposée en 2009 [5], puis étendue et caractérisée pour les bruits gaussiens [6], qui présente l'avantage de n'avoir qu'un paramètre qui représente un choix de compromis biais-variance.

Cet article se propose d'étendre cette dernière méthode à des bruits issus de gaussienne généralisée, une distribution à queue forte, motivé par le cas de signaux Doppler possédant dans le domaine temps-fréquence ce type de bruit de fond.

Dans un premier temps, la méthode d'estimation dans le cas gaussien est résumée. Une deuxième partie présente la loi gaussienne généralisée et ses caractéristiques lorsqu'elle est tronquée par un seuil donné, pour en déduire une méthode d'estimation de ses deux paramètres. Une dernière partie présente les résultats d'estimation sur un signal synthétique.

2 Estimation du bruit dans le cas d'une loi gaussienne

Sélectionner les valeurs de plus faible énergie d'une variable gaussienne revient à tronquer la loi gaussienne autour de 0. La variable aléatoire G_X issue d'une gaussienne centrée de variance σ^2 tronquée au seuil X suit la loi :

$$g_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{erf}(X/(\sigma\sqrt{2}))} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{si } |x| \leq X, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1)$$

avec $\operatorname{erf}(x)$ la fonction d'erreur. On peut alors montrer que le kurtosis s'écrit [5] :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(G_X) &= \mathbb{E}(G_X^4) / \mathbb{E}(G_X^2)^2 - 3 \\ &= \frac{A(X/\sigma) (3 - \frac{X^2}{\sigma^2}) - 3 A(X/\sigma)^2}{(1 - A(X/\sigma))^2} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{avec } A(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}(u/\sqrt{2})} e^{-\frac{1}{2}u^2} u.$$

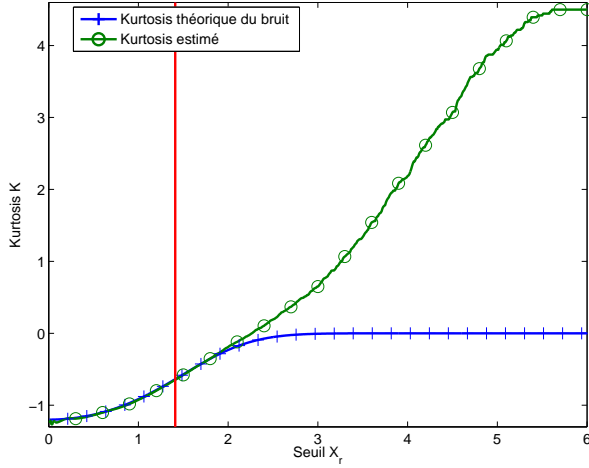


FIGURE 1 – Kurtosis de la partie réelle d'un signal bruité en fonction du seuil de troncature X .

Cette courbe ne dépend plus que d'un seul paramètre, le seuil normalisé X/σ . De plus, elle est monotone strictement croissante.

La figure 1 donne la courbe théorique du kurtosis d'une gaussienne tronquée, et celle de la partie réelle de la transformée de Fourier à court terme (TFCT) d'un signal composé de deux modulations de fréquence et d'un signal large bande, le tout additionné d'un bruit blanc gaussien. Pour un seuil de troncature suffisamment bas, la présence du signal ne modifie pas le kurtosis empirique du bruit.

Il n'existe pas de solution explicite à l'équation (2) permettant d'exprimer $\frac{X}{\sigma}$ à partir de $\mathcal{K}(G_X)$. Toutefois, pour une valeur de kurtosis κ donnée, cette équation permet de calculer à la précision voulue le seuil normalisé, noté $X_n(\kappa)$, tel que le kurtosis théorique pour ce seuil soit égal à κ .

Sur une réalisation d'un signal, on peut déterminer le seuil empirique $\hat{X}(\kappa)$ tel que le kurtosis estimé empiriquement à partir des observations de module inférieur à $\hat{X}(\kappa)$ soit égal à la valeur κ désirée.

On obtient alors un estimateur de l'écart-type du bruit, selon une valeur κ choisie :

$$\hat{\sigma}(\kappa) = \hat{X}(\kappa)/X_n(\kappa), \quad (3)$$

L'espérance de ce rapport est égal à σ , peu importe le choix de κ . En pratique, le choix de κ revient à un compromis biais-variance : s'il est faible, le seuil sélectionne peu de points, et l'estimateur du kurtosis aura une grande variance ; s'il est grand, il y a plus de chance de sélectionner des points contenant du signal, ce qui conduira à un biais [6].

3 Estimation dans le cas d'une loi gaussienne généralisée

En pratique, il arrive que le bruit ne soit pas gaussien et qu'il présente des propriétés de queue forte. Une bonne estimation

de la loi du bruit est alors une étape importante pour pouvoir débruiter le signal.

3.1 Loi gaussienne généralisée

Afin de modéliser la distribution à queue forte, nous considérons la variable aléatoire G_g issue d'une loi gaussienne généralisée centrée, dont la densité de probabilité est [7] :

$$g_g(x) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} e^{-\left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^\beta} \quad (4)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma, α un paramètre d'échelle et β un paramètre de forme. Lorsque $\beta = 2$, cette loi est une loi gaussienne de variance $\alpha^2/2$. La loi a une queue forte pour $\beta < 2$, qui est le cas qui nous intéresse dans cet article.

La variance et le kurtosis de G_g sont respectivement :

$$V_{G_g} = \frac{\alpha^2\Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)} \text{ et } \mathcal{K}_{G_g} = \frac{\Gamma(5/\beta)\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(3/\beta)^2} - 3.$$

3.2 Loi tronquée

Comme dans le cas gaussien, on s'intéresse à la loi gaussienne généralisée tronquée au seuil X , notée $G_{g,X}$. La densité de cette loi s'écrit :

$$g_{g,X}(x) = \begin{cases} \frac{1}{f_0(X)} g_g(x) & \text{si } |x| < X, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5)$$

où $f_N(X)$ est définie par :

$$f_N(X) = \int_{-X}^X x^N g_g(x) dx = \frac{\beta}{\alpha\Gamma(1/\beta)} \int_0^X x^N e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx. \quad (6)$$

Le moment d'ordre N est $m_N(X) = \frac{f_N(X)}{f_0(X)}$. Par un changement de variable, le kurtosis de la loi gaussienne généralisée tronquée au seuil X peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{K}(G_{g,X}) = \frac{m_4(X)}{m_2(X)^2} - 3 = \frac{\gamma\left(\frac{5}{\beta}, \left(\frac{X}{\alpha}\right)^\beta\right) \gamma\left(\frac{1}{\beta}, \left(\frac{X}{\alpha}\right)^\beta\right)}{\gamma\left(\frac{3}{\beta}, \left(\frac{X}{\alpha}\right)^\beta\right)^2} - 3 \quad (7)$$

avec $\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$ la fonction Gamma incomplète.

De la même manière que dans le cas gaussien, cette fonction de kurtosis peut être reparamétrée en fonction du seuil normalisé $X_{ng} = X/\alpha$. Pour β fixé, la courbe associée ne dépend alors que de X_{ng} . On obtient ainsi une collection de courbes paramétrées par le facteur de forme β , indépendantes du paramètre α . La figure 2 illustre ces courbes pour différentes valeurs de β .

3.3 Estimation des paramètres

Contrairement au cas gaussien, il y a deux paramètres à estimer : le paramètre α , qui joue un rôle similaire à l'écart-type dans le cas gaussien ; et le paramètre de forme β , qui est introduit par la généralisation de la loi gaussienne.

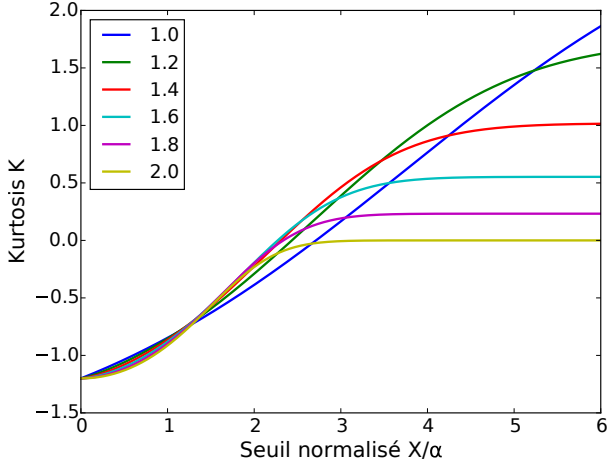


FIGURE 2 – Valeur du kurtosis de la loi tronquée $\mathcal{K}(X, \beta)$, Eq. (7), pour différentes valeurs du paramètre de forme β

Pour un β_r donné, on peut estimer α de manière similaire au cas gaussien :

$$\hat{\alpha}(\kappa, \beta_r) = \frac{\hat{X}(\kappa)}{X_{ng}(\beta_r, \kappa)}. \quad (8)$$

L'estimation de $\hat{\alpha}$ dépend alors de la valeur β_r .

L'estimateur (8) fournit une série de courbes, comme illustré sur la figure 3, selon les choix de β_r et κ . Dans le cas gaussien, l'espérance de l'estimateur (3) est indépendante de la valeur du seuil κ choisie. Dans le cas généralisé, selon le même principe, lorsque la valeur de β_r est égale à la vraie valeur β du paramètre, la fonction $\hat{\alpha}(\kappa, \beta_r)$ devient constante selon κ . Dans le cas contraire, elle sera dépendante de κ .

On peut ainsi estimer β en sélectionnant la courbe avec la plus faible variabilité. Soit $K = \{\kappa_i, i = 1, \dots, n\}$ la plage de κ discrétisée considérée pour l'estimation. On en déduit un estimateur de β :

$$\hat{\beta} = \underset{\beta_r}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n \left| \hat{\alpha}(\kappa_i, \beta_r) - \overline{\hat{\alpha}(K, \beta_r)} \right| \quad (9)$$

où $\overline{\hat{\alpha}(K, \beta_r)}$ est la moyenne des $\{\hat{\alpha}(\kappa_i, \beta_r), i = 1, \dots, n\}$.

Dans le cas gaussien, une seule valeur de κ était nécessaire pour estimer la variance de la gaussienne. Ici, une plage de valeurs est requise, qui doit être comprise entre -1.2 et 0. La valeur minimale de -1.2 correspond à la valeur minimale du kurtosis tronqué, obtenue lorsque le seuil tend vers 0, qui est indépendante de β . La valeur maximale, 0, est la plus petite valeur maximale du kurtosis du bruit lorsque le seuil tend vers l'infini : cela correspond au cas gaussien, les distributions à queue forte vont toutes dépasser cette valeur de 0.

D'un point de vue pratique, nous avons choisi de fixer la plage de κ pour l'estimation à l'intervalle $[-1, 0.2]$, pour limiter la grande variabilité de l'estimation du kurtosis des seuils faibles, et limiter la potentielle influence du signal des seuils forts.

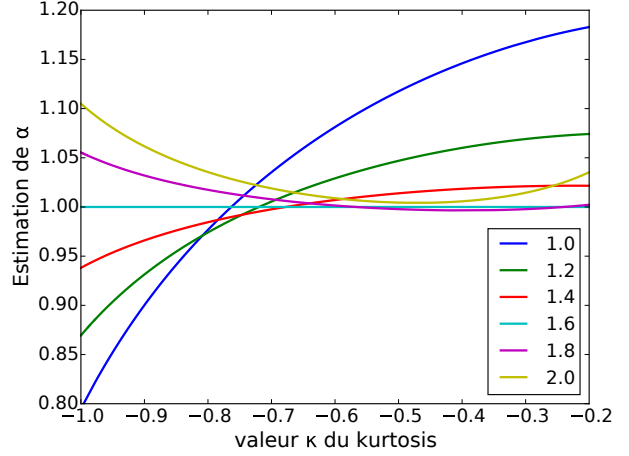


FIGURE 3 – Estimation de $\hat{\alpha}(\kappa, \beta_r)$, Eq. (8), pour différentes valeurs de β_r . Les valeurs à estimer sont $\alpha = 1$ et $\beta = 1.6$.

Une fois l'estimation de β faite, on en déduit une estimation de α :

$$\hat{\alpha} = \overline{\hat{\alpha}(\kappa, \hat{\beta})}. \quad (10)$$

Une autre méthode d'optimisation peut être conduite, qui estime conjointement les paramètres α et β . En notant $\mathcal{K}(\beta, X_{ng})$ la courbe du kurtosis de l'équation (7), et $\hat{\mathcal{K}}(X)$ la courbe estimée depuis la réalisation du signal, on cherche :

$$(\hat{\alpha}_o, \hat{\beta}_o) = \underset{(\alpha, \beta)}{\operatorname{argmin}} \sum_{j=1}^m \left| \mathcal{K}(\beta, X_j \alpha) - \hat{\mathcal{K}}(X_j) \right|^2 \quad (11)$$

pour un ensemble de valeurs $\{X_j, j = 1, \dots, m\}$ donné. En pratique les valeurs X_j sont prises telles que les valeurs de $\hat{\mathcal{K}}(X_j)$ sont comprises dans la plage K de valeurs de κ choisie. Les premières estimations servent alors à initialiser l'algorithme d'optimisation avec des valeurs proches du résultat final.

4 Estimation du bruit d'un mélange signal et bruit

L'estimateur proposé est testé sur un signal synthétique de 8000 points, composé de deux modulations de fréquences et d'un signal large bande. La transformée de Fourier de Court Terme est calculée avec une fenêtre de Hanning de 127 points, un recouvrement de 63 points entre les fenêtres successives, et 512 fréquences calculées.

Un bruit complexe de variance $\sigma^2 = 1$ est ajouté à chaque coefficient temps-fréquence de la TFCT du signal, en ajoutant deux réalisations indépendantes d'une gaussienne généralisée sur les parties réelle et imaginaire de la TFCT. Les paramètres de la gaussienne généralisée sont choisis tels que sa variance est égale à $\sigma^2/2$.

Trois valeurs de β sont considérées, 1.1, 1.5 et 1.9, conduisant à trois valeurs de α associées, $\alpha = \sqrt{\frac{\sigma^2 \Gamma(3/\beta)}{2 \Gamma(1/\beta)}}$. La figure

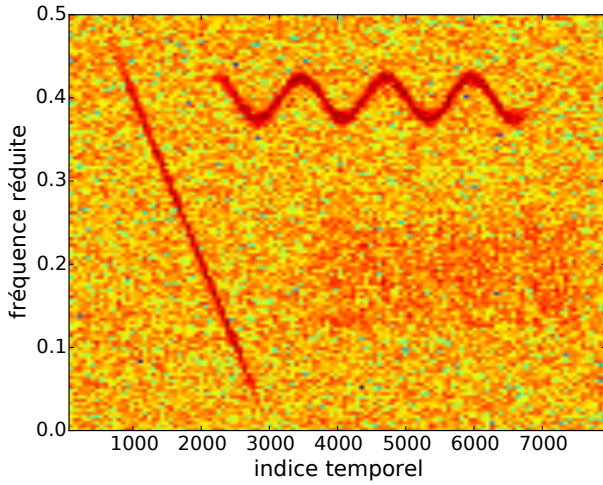


FIGURE 4 – Spectrogramme du signal de test, bruité avec du bruit gaussien généralisé de paramètre $\beta = 1.5$.

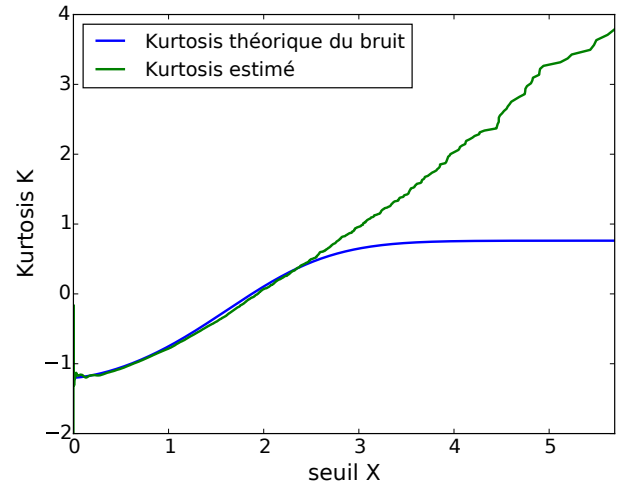


FIGURE 5 – Kurtosis de la partie réelle du signal bruité représenté en figure 4 en fonction du seuil de troncature X , pour un bruit additif de paramètre $\beta = 1.5$.

(β, α)	(1.1, 0.580)	(1.5, 0.823)	(1.9, 0.973)
$\hat{\beta}$	1.098 (0.063)	1.501 (0.107)	1.865 (0.093)
$\hat{\alpha}$	0.647 (0.020)	0.882 (0.018)	1.018 (0.018)
$\hat{\beta}_0$	1.097 (0.057)	1.502 (0.088)	1.825 (0.065)
$\hat{\alpha}_0$	0.648 (0.019)	0.884 (0.015)	1.020 (0.014)

TABLE 1 – Valeurs moyennes de $(\hat{\beta}, \hat{\alpha})$ et de $(\hat{\beta}_0, \hat{\alpha}_0)$ sur 10000 réalisations de bruit, sur la partie réelle. Entre parenthèses les écarts-types des estimations.

4 montre le spectrogramme du signal bruité par une gaussienne généralisée de paramètre $\beta = 1.5$.

La figure 5 illustre que pour des seuils suffisamment faibles, le kurtosis du mélange signal et bruit est proche du kurtosis théorique du bruit seul.

Le tableau 1 donne les valeurs estimées par les équations (9), (10) et (11) sur 10 000 réalisations de bruit, pour la partie réelle de la TFCT. L'estimation sur la partie imaginaire est similaire. Les deux procédures d'estimation donnent des résultats satisfaisants. Celle consistant à estimer conjointement les paramètres β et α , $(\hat{\beta}_0, \hat{\alpha}_0)$, présente une erreur moyenne quadratique plus faible et est donc préférable.

5 Conclusion et perspective

Ce papier a présenté des procédures d'estimation des paramètres d'un bruit gaussien généralisé à partir des valeurs minimales de ses réalisations, ce qui permet de l'estimer de manière robuste vis-à-vis de la présence d'un signal.

Plusieurs questions restent ouvertes : quelle est l'influence du choix de la plage des valeurs du kurtosis sur l'estimation ? Combien de points sont nécessaires pour obtenir une bonne estimation ?

Ce travail a été inspiré par le spectrogramme de signaux Doppler ; l'étape suivante sera de vérifier la qualité de cette

approche d'estimation pour le débruitage de signaux réels.

Enfin, plutôt que travailler séparément sur les parties réelles et imaginaires de la TFCT, il serait plus intéressant de travailler soit sur la valeur complexe du bruit, soit sur son module.

Références

- [1] Chungshin Yeh et Axel Röbel, "Adaptive noise level estimation," in *Proc. of the Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-06)*, Montreal, Quebec, Canada, Sept. 18–20, 2006, pp. 145–148.
- [2] Fabien Millioz et Nadine Martin, "Circularity of the STFT and spectral kurtosis for time-frequency segmentation in white Gaussian environment," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 1, pp. 515–524, 2011.
- [3] Rainer Martin, "Bias compensation methods for minimum statistics noise power spectral density estimation," *Signal Process.*, vol. 86, no. 6, pp. 1215–1229, 2006.
- [4] Nicholas W.D. Ewans et John S. Mason, "Time-Frequency Quantile-Based Noise," in *Proceedings of EUSIPCO*, Toulouse, France, Sept. 2002.
- [5] Fabien Millioz et Nadine Martin, "Estimation de la densité spectrale de puissance d'un bruit gaussien basée sur le kurtosis des statistiques minimales," in *22e colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*, Dijon, France, Sept. 2009.
- [6] Julien Huillery, Fabien Millioz, et Nadine Martin, "Gaussian Noise Time-Varying Power Spectrum Estimation with Minimal Statistics," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 22, pp. 5892–5906, Nov. 2014.
- [7] Saralees Nadarajah, "A Generalized Normal Distribution," *Journal of Applied Statistics*, vol. 32, no. 7, pp. 685–694, 2005.