

Méthode de Monte Carlo à dynamique hamiltonienne pour estimation d'un modèle thermique de bâtiment

Tahar NABIL^{1,2}, Éric MOULINES³, Jean-Marc JICQUEL², Alexandre GIRARD⁴, Christian LAJAUNIE⁵

¹LTCl, Télécom ParisTech, 46 rue Barrault, 75013 Paris, France

²EDF R&D - EnerBaT - EDF Lab Les Renardières, Ecuelles, 77818 Moret-sur-Loing, France

³Centre de Mathématiques Appliquées - UMR 7641 - Route de Saclay, 91128 Palaiseau, France

⁴EDF R&D - STEP - EDF Lab Chatou, 6 quai Watier, 78401 Chatou, France

⁵Mines ParisTech, Centre de Géosciences, 35 rue Saint Honoré, 77305 Fontainebleau, France

tahar.nabil@telecom-paristech.fr, moulines@polytechnique.edu, jean-marc.jicquel@edf.fr,
alexandre.girard@edf.fr, christian.lajaunie@mines-paristech.fr

Résumé – Cet article s'intéresse à l'inférence jointe des états cachés et des paramètres d'un système non-linéaire par la méthode de Monte Carlo hybride, à dynamique hamiltonienne (HMC). Nous étudions en particulier l'application à l'identification d'un modèle thermique de bâtiment avec saturation de la commande et température intérieure non mesurée. Les résultats numériques illustrent la capacité de la méthode à estimer les constantes physiques du modèle.

Abstract – We suggest here to estimate jointly the hidden states and unknown parameters of a nonlinear system by means of the hybrid Monte Carlo method. We apply this technique to the estimation of a thermal building model with saturated command and hidden indoor temperature. A numerical evaluation shows that we are able to correctly reproduce its physical constants.

1 Introduction

Les services d'efficacité énergétique, par exemple le diagnostic d'isolation ou l'effacement du pic de charge, reposent en premier lieu sur un modèle capable de reproduire le comportement thermique dynamique du bâtiment. Ce comportement thermique est caractérisé par l'évolution de la température intérieure, en réponse à des stimuli tels les conditions météorologiques et les apports internes au bâtiment comme le chauffage. C'est un problème d'identification, c'est-à-dire d'estimation paramétrique du modèle à partir des données observées.

Or, l'une des difficultés auxquelles cette démarche est confrontée en pratique est la non-disponibilité de la mesure de la température intérieure, qui est pourtant la sortie du modèle. Une solution proposée dans la thèse de C. Zayane [1] est d'adopter un modèle en boucle fermée dont la sortie observée est la commande de chauffage. Cependant, une limite du travail de [1] est de ne pas modéliser la saturation de la commande. Pour prendre en compte cette contrainte, nous proposons d'appliquer la méthode d'inversion bayésienne d'échantillonnage de Monte Carlo hybride, à dynamique hamiltonienne (HMC), qui convient aux distributions en grande dimension (voir [2]).

Ainsi, l'originalité de la démarche présentée dans cet article est double : modélisation boucle fermée du bâtiment

avec saturation de la commande de chauffage, sans observation de la température intérieure, et estimation jointe de cette température et des paramètres du modèle par l'algorithme HMC.

2 Modèle thermique de bâtiment

2.1 Modèle boucle ouverte

Le modèle simplifié du bâtiment est un circuit électrique équivalent R3C2, représenté en Figure 1. Ce choix se justifie car il s'agit d'un modèle dynamique d'ordre 2, ordre minimal suffisant pour reproduire la dynamique thermique d'un bâtiment (voir e.g. [3]).

D'après l'analogie électrique de la conduction thermique, les températures sont associées aux potentiels du circuit et les puissances aux courants. Les deux capacités prennent en compte les deux dynamiques du bâtiment, une lente liée à l'inertie de la structure (C_s) et une rapide liée à l'air intérieur (C_r). Le modèle contient trois températures, la température extérieure T_o , la température de structure T_s , représentative de l'ensemble de l'enveloppe du bâtiment, la température résultante au point d'air intérieur T_i . Il est en général difficile de définir une seule température intérieure pour un bâtiment entier à partir d'une mesure

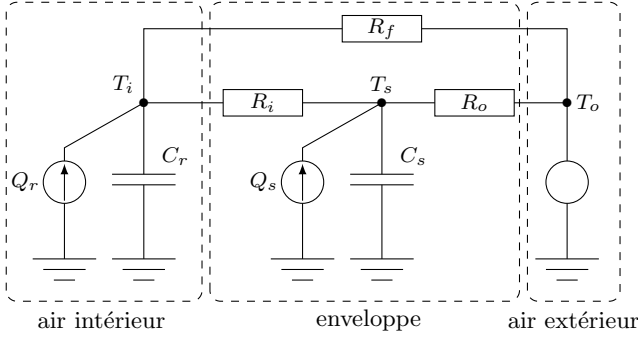


FIGURE 1 – Schéma électrique équivalent du modèle de bâtiment R3C2.

locale, néanmoins c'est une approximation courante pour travailler sur des modèles monozones.

La puissance résultante Q_r comprend la puissance de chauffage Q_{ch} ainsi que la puissance dégagée par les apports internes (matériels et personnes) Q_{ai} . La puissance Q_s représente les apports solaires, qui chauffent la structure du bâtiment au nœud T_s . Dans la suite, on suppose que la température T_o et les puissances Q_r (Q_{ch} et Q_{ai}) et Q_s sont mesurées localement par des capteurs adaptés. Les résistances thermiques R_i et R_o , analogues des résistances électriques, sont les résistances des matériaux lourds des parois du bâtiment. R_f rassemble les résistances des parois légères, ainsi que les pertes dues au renouvellement d'air et les pertes hors renouvellement d'air (cf. [1]).

Le modèle R3C2 est donc un modèle simplifié qui décrit la dynamique thermique d'un bâtiment monozone selon les équations différentielles linéaires en temps continu suivantes, obtenues d'après les lois de Kirchhoff :

$$Q_r = C_r \frac{dT_i}{dt} + \frac{1}{R_i}(T_i - T_s) + \frac{1}{R_f}(T_i - T_o), \quad (1a)$$

$$Q_s = C_s \frac{dT_s}{dt} + \frac{1}{R_i}(T_s - T_i) + \frac{1}{R_o}(T_s - T_o). \quad (1b)$$

Les équations (1a)-(1b) sont paramétrées par le vecteur θ formé des capacités et des conductances (avec $z_f := 1/R_f$, $z_o := 1/R_o$ et $z_i := 1/R_i$) : $\theta = (C_r \ C_s \ z_f \ z_o \ z_i)^T$.

L'avantage de ce modèle est l'interprétabilité physique des cinq paramètres du circuit : ils se combinent pour calculer le coefficient de déperditions statiques, noté GV, le coefficient de transmission solaire g , et deux constantes de temps (rapide et lente). Le GV se définit ici comme la conductance totale du circuit : $GV := \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_i + R_o}$ (voir [4]). La transmission solaire est définie par $g := \frac{R_o}{R_o + R_i}$.

2.2 Régulation

On suppose que la température de consigne T_r est mesurée, mais pas la température intérieure. Il faut donc introduire un modèle de régulation, le système fonctionne en boucle fermée (voir Figure 2). La puissance de chauffage Q_{ch} est en réalité saturée : $Q_{ch} \geq 0$ (pas de refroidisse-

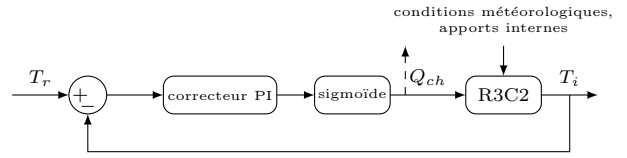


FIGURE 2 – Régulation boucle fermée de la température intérieure d'un bâtiment, avec saturation de la commande.

ment) et $Q_{ch} \leq Q_{ch}^{max}$, où Q_{ch}^{max} est la puissance limitante, supposée connue. Cette saturation est modélisée par la fonction sigmoïde, continue et différentiable, appliquée à la sortie d'un correcteur PI :

$$Q_{ch} = \Phi \left(K \left(T_r - T_i + \frac{1}{\tau} \int (T_r - T_i) \right) \right), \quad (2)$$

où le gain K et la constante de temps τ sont deux paramètres à estimer et, avec $\lambda = 4/Q_{ch}^{max}$,

$$\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto Q_{ch}^{max} / (1 + \exp(-\lambda(x - Q_{ch}^{max}/2))). \quad (3)$$

3 Méthode de Monte Carlo hybride

3.1 Dynamique hamiltonienne

La méthode de Monte Carlo hybride (HMC) est une méthode d'échantillonnage de type Markov Chain Monte Carlo (MCMC) reposant sur une analogie avec l'énergie potentielle d'un système mécanique. Nous décrivons succinctement son principe, et renvoyons à [5, 6] pour plus de précisions. Soit un système de position $q \in \mathbb{R}^{n_q}$ et d'impulsion $p \in \mathbb{R}^{n_q}$ dont l'énergie totale $H(q, p)$ est la somme d'une énergie cinétique $K(p)$ et d'une énergie potentielle $U(q)$. En notant ∇ l'opérateur gradient, les équations hamiltoniennes décrivant l'évolution du système sont

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \nabla K(p) \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\nabla U(q) \end{cases}. \quad (4)$$

La simulation numérique de la dynamique se fait par discrétisation temporelle du système (4). Le schéma de *leapfrog* (saute-mouton) de pas ε est classiquement utilisé :

$$\begin{cases} p(t + \varepsilon/2) = p(t) - \frac{\varepsilon}{2} \nabla U(q(t)) \\ q(t + \varepsilon) = q(t) + \varepsilon \nabla K(p(t + \varepsilon/2)) \\ p(t + \varepsilon) = p(t + \varepsilon/2) - \frac{\varepsilon}{2} \nabla U(q(t + \varepsilon)) \end{cases}. \quad (5)$$

Dans [6], on indique que l'erreur globale induite par ce schéma est en $O(\varepsilon^2)$. L'erreur sur H est du même ordre de grandeur. Ce schéma est facile à implémenter et difficile à surpasser en pratique, ce qui justifie son emploi ici.

3.2 Algorithme d'échantillonnage

Soit maintenant un vecteur aléatoire q à valeurs dans \mathbb{R}^{n_q} , de densité $\pi(q)$ que l'on souhaite échantillonner. Dans

Algorithme 1 Méthode de Monte Carlo hybride (HMC)

Entrées : M, ε, L , densité $\pi(q)$.

0. Initialiser $q^{(0)}$ et poser $k = 1$.
 1. *Gibbs* : tirer $p^{(k-1)} \sim \mathcal{N}(0, M)$.
 2. *Metropolis* :
 - a) tirer $\varepsilon^{(k)}$ uniformément dans $[\varepsilon - \delta, \varepsilon + \delta]$, $\delta > 0$ petit ;
 - b) Répéter L étapes *leapfrog* (5), avec un pas de temps $\varepsilon^{(k)}$. Nouvel état : (q^*, p^*) .
 - c) Poser $(q^{(k)}, p^{(k)}) = (q^*, p^*)$ avec probabilité r (7), ou $(q^{(k-1)}, p^{(k-1)})$ avec probabilité $1 - r$.
 3. Si convergence, terminer, sinon poser $k \leftarrow k + 1$, retourner à l'étape 1.
-

Sortie : échantillons $q^{(k)}$ de $\pi(q)$.

le cadre hamiltonien, q est un vecteur position, dont la distribution canonique associée est $\pi(q) \propto \exp(-U(q))$, soit $U(q) = -\log(\pi(q))$, en ignorant la constante de normalisation de $\pi(q)$ et en supposant le potentiel U différentiable et non partout nul. En poursuivant l'analogie mécanique, un vecteur impulsion p d'énergie cinétique $K(p) = \sum_{i=1}^{n_q} \frac{p_i^2}{2m_i}$ est artificiellement ajouté. p suit donc une loi normale centrée, de matrice de covariance diagonale formée par m_1, \dots, m_{n_q} . Par ailleurs, par construction, position et impulsion sont indépendantes, de distribution jointe

$$\pi(q, p) = \frac{1}{Z_H} \exp(-H(q, p)) = \pi(q)\pi(p). \quad (6)$$

Ainsi, un échantillon de q s'obtient par marginalisation de p dans un échantillon distribué selon $\pi(q, p)$. C'est l'idée de l'algorithme HMC (voir Algorithme 1), qui est hybride car il combine *i*) une étape de Gibbs : tirer p selon $\pi(p|q) = \pi(p)$; et *ii*) un test de Metropolis : à partir de l'état initial (q, p) , simuler L pas de taille ε de la dynamique hamiltonienne (5), noter (q^*, p^*) l'état obtenu et accepter ce couple avec probabilité

$$r = \min[1, \exp(H(q, p) - H(q^*, p^*))]. \quad (7)$$

[5] montre que la procédure est valide, dans le sens où elle laisse invariante la distribution jointe canonique de (q, p) . En outre, le tirage de ε_k autour de ε en étape 2.a) garantit l'ergodicité de l'algorithme [6].

Comparé à l'algorithme classique de Metropolis, l'algorithme HMC évite la marche aléatoire pour parcourir la distribution cible, la trajectoire de q étant guidée par le gradient de son énergie potentielle (voir (5)). Il est donc avantageusement employé pour des distributions de grande dimension. On peut aussi inclure des contraintes de la forme $q_i \leq u_i$ ou $q_i \geq l_i$, pour $i \in \{1, \dots, n_q\}$ (voir [6]). Cependant, la contrepartie est qu'il y a plus de paramètres à régler que pour Metropolis. En particulier, le choix de ε est crucial, puisqu'il est un compromis entre

le taux d'acceptation et l'efficacité de l'exploration de la distribution. En ajustant les éléments diagonaux de la matrice de masse M , on peut améliorer le réglage de ε : si q_i , $i = 1, \dots, n_q$ a pour échelle typique s_i , un bon choix consiste à poser $m_i = 1/s_i^2$. Enfin, [6] indique que L et ε peuvent être fixés par essai-erreur.

3.3 Application à l'inférence bayésienne du modèle de bâtiment

L'Algorithme 1 est utilisé pour résoudre le problème d'identification de bâtiment par inversion bayésienne. En l'absence d'observation de T_i , la sortie observée du système est $Y := Q_{ch}$, en réponse à Q_s, Q_{ai}, T_o et T_r . Ses états cachés sont $X := (T_i \ T_s \ d)^\top$, où $d := \frac{1}{\tau} \int (T_r - T_i)$ est l'intégrateur du correcteur. L'estimation de θ est traitée comme un problème d'inversion bayésienne. Soit $\pi(\theta) \sim \mathcal{N}(\mu_\theta, \Sigma_\theta)$ son prior Gaussien. En utilisant les propriétés Markoviennes du modèle, le potentiel U associé à la densité jointe *a posteriori* $p(x_{0:N}, \theta | y_{1:N})$, où N est le nombre total d'observations, est la somme de cinq termes :

$$U_1 = \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{k=0}^{N-1} \{\Phi[K(T_r^{k+1} - T_i^k + d^k)] + Q_{ai}^{k+1} - C_r(T_i^{k+1} - T_i^k) - z_i(T_i^k - T_s^k) - z_f(T_i^k - T_o^{k+1})\}^2, \quad (8)$$

$$U_2 = \frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{k=0}^{N-1} \{Q_s^{k+1} - C_s(T_s^{k+1} - T_s^k) - z_i(T_s^k - T_i^k) - z_o(T_s^k - T_o^{k+1})\}^2, \quad (9)$$

$$U_3 = \frac{1}{2\sigma_3^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ -(d^{k+1} - d^k) - \frac{1}{\tau}(T_i^k - T_r^{k+1}) \right\}^2, \quad (10)$$

$$U_4 = \frac{1}{2\sigma_4^2} \sum_{k=1}^N \{Q_{ch}^k - \Phi[K(T_r^k - T_i^k + d^k)]\}^2, \quad (11)$$

$$U_5 = \frac{1}{2}(\theta - \mu_\theta)^\top \Sigma_\theta^{-1}(\theta - \mu_\theta) + \frac{1}{2} \log \det(\Sigma_\theta), \quad (12)$$

où U_1 et U_2 sont obtenus par discétisation des équations (1) avec un schéma d'ordre 1 pour les dérivées temporelles, puis en ajoutant des bruits Gaussiens indépendants, de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2 . Les potentiels U_3 et U_4 sont respectivement liés à l'équation d'état en d et à l'équation d'observation de la puissance de chauffage, avec σ_3^2 et σ_4^2 les variances des bruits indépendants Gaussiens.

Nous proposons d'estimer simultanément les paramètres θ et les états non-observés, en considérant que le potentiel U est une fonction de θ et des N valeurs respectives des états cachés T_i, T_s et d . Ainsi, le gradient ∇U est de dimension $3(N + 1) + 7$. U est donc augmenté des priors sur les trajectoires des états. Pour T_s et d , ces priors sont Gaussiens, i.e. quadratiques. Le prior T_i est plus précis en pénalisant les écarts à la consigne : c'est la somme $\Sigma_k(T_r^k - T_i^k)^4$. En effet, on peut considérer que la consigne est une bonne approximation *a priori* de la trajectoire.

TABLE 1 – Paramètres physiques du modèle R3C2 estimés en moyenne sur 100 simulations, et écart-types.

Paramètre	Valeur nominale	HMC
GV	0,36	$0,34 \pm 0,004$
τ_1	33,7	$36,8 \pm 9,6$
τ_2	3,6	$3,4 \pm 0,7$
g	0,38	$0,28 \pm 0,07$

4 Résultats numériques

T_i et Q_{ch} sont obtenues par simulation en boucle fermée du modèle R3C2 avec un correcteur PI, un saturateur et un anti-windup [1], à partir des chroniques mesurées pendant 7 jours au pas de temps 10 minutes de T_o , T_r , Q_{ai} , Q_s et des paramètres de référence $C_r = 10$, $C_s = 100$, $z_f = 0,2$, $z_o = 0,4$, $z_i = 0,25$. 100 jeux de données sont créés, avec des niveaux de bruit faibles ($\sigma_i = 0,055$, $i = 1, \dots, 4$). Les paramètres sont initialisés aléatoirement, avec une erreur comprise entre -100% et +25% de la valeur nominale, de même pour la moyenne du prior μ_θ . Σ_θ est diagonale, les écarts-types correspondant à 35% des valeurs nominales. Le prior de T_s a pour moyenne la moyenne entre la température extérieure T_o et la consigne T_r . Les variances des potentiels ne sont pas apprises, et fixées à 10^{-2} . Les simulations hamiltoniennes sont effectuées avec $L = 150$ pas de taille $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$. Ces paramètres ont été choisis manuellement. Il y a $N_{iter} = 1000$ itérations, les estimations sont les moyennes sur les 100 dernières simulations.

La Table 1 résume les estimations des paramètres physiques du modèle. Malgré un taux d'acceptation moyen de 48%, qui suggère que le pas ε pourrait être diminué pour améliorer la précision du schéma *leapfrog*, les performances sont encourageantes, le GV et la constante de temps rapide étant estimés avec précision. L'imprécision est plus grande pour la constante lente et g , mais l'ordre de grandeur reste satisfaisant. La Figure 3 représente la moyenne des puissances de chauffage simulées à partir des 100 jeux de paramètres estimés, qui est conforme à la donnée réelle. L'erreur quadratique moyenne sur cette trajectoire est de 7%, rapportée à la puissance moyenne observée, tandis que l'estimation de la consommation en énergie est supérieure de 1,2% à la consommation réelle. De même, la température intérieure estimée est proche de la mesure, avec une erreur quadratique moyenne de la trajectoire moyenne inférieure à 4% (par rapport à la température moyenne observée).

Enfin, en simulant la dynamique du bâtiment sur des données test d'une semaine, on obtient une sous-estimation de 6% de la consommation en énergie, tandis que l'erreur quadratique moyenne sur la température intérieure est de 0,35°C, soit moins de 2%. Cela confirme la bonne estimation du bâtiment et du régulateur. Le modèle peut donc servir de support à la création de services énergétiques.

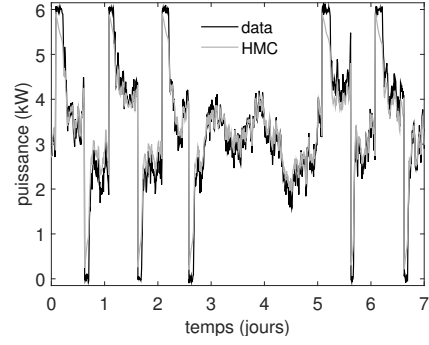


FIGURE 3 – Estimation de la puissance de chauffage Q_{ch} .

5 Conclusion

La méthode de Monte Carlo à dynamique hamiltonienne permet une prise en compte efficace des contraintes pratiques de l'identification de bâtiment, à savoir le fait que la température intérieure n'est pas observée et que la commande du système est saturée, ce qui induit une non-linéarité. En particulier, en mettant à profit la connaissance du signal de consigne, on peut estimer conjointement les états du système ainsi que ses paramètres. Une première analyse numérique du modèle met en évidence le potentiel de la méthode, capable de reproduire à la fois les constantes physiques du modèle ainsi que la température intérieure et la puissance de chauffage lorsque les données sont générées par le modèle avec un faible niveau de bruit.

Références

- [1] C. Zayane, *Identification d'un modèle de comportement thermique de bâtiment à partir de sa courbe de charge*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011.
- [2] C. Lajaunie, "Simulation stochastique par trajectoires hamiltoniennes," tech. rep., Mines ParisTech, 2011.
- [3] I. Hazyuk, C. Ghiaus, and D. Penhouet, "Optimal temperature control of intermittently heated buildings using model predictive control : Part I - building modeling," *Building and Environment*, vol. 51, pp. 379–387, 2012.
- [4] T. Nabil, É. Moulines, F. Roueff, J.-M. Jicquel, and A. Girard, "Maximum likelihood estimation of a low-order building model," in *24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pp. 702–707, 2016.
- [5] J. S. Liu, *Monte Carlo strategies in scientific computing*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [6] R. M. Neal, "MCMC using hamiltonian dynamics," in *Handbook of Markov Chain Monte Carlo* (S. Brooks, A. Gelman, G. Jones, and X.-L. Meng, eds.), CRC Press, 2011.