

Distances entre lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+

Jean-Marie NICOLAS¹, Florence TUPIN¹, Hélène SPORTOUCHE²,

¹LTCl, Télécom ParisTech, Université Paris-Saclay, 75013, Paris, France,

²Altersis, Aix en Provence, France

jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr

Résumé – Les lois statistiques rencontrées en imagerie cohérente (échographie, sonar, Radar à Synthèse d’Ouverture,...) se modélisent assez simplement dans le formalisme des statistiques de Mellin. Il est alors possible, dans certains cas, d’exprimer la distance de Kullback-Leibler entre ces lois. Une autre conséquence de l’utilisation des statistiques de Mellin est que ces lois s’expriment sous une forme mathématique implicite particulière appelée fonction de Meijer. Ce formalisme permet alors d’avoir l’expression analytique de la distance de Kolmogorov-Smirnov entre la presque totalité des lois rencontrées en imagerie cohérente. L’objectif de cet article est de comparer ces deux distances dans deux cas particuliers

Abstract – Statistical distributions devoted to coherent imaging (echography, sonar, SAR, ...) can be well modelled with the help of Mellin statistics. By this way, some analytical expression of Kullback-Leibler distance can be exhibited. More, Mellin’s statistics allow specific analytical expressions of these statistical distributions with the help of Meijer’s function. By this way, analytical expressions of Kolmogorov-Smirnov distance can be obtained. This article is devoted to a comparison of these two distances for two specific cases.

1 Les lois sur \mathbb{R}^+

1.1 Imagerie cohérente et chatoisement

Le chatoisement est intrinsèquement lié à tout système d’imagerie cohérente : radar, sonar, échographie médicale, imagerie laser. Sous certaines hypothèses le plus souvent vérifiées, il se modélise par le modèle de Goodman [5] sous le nom de chatoisement pleinement développé. Dans ce cas, l’intensité d’un pixel correspondant à un point d’une zone homogène est affecté de chatoisement et s’exprime comme une loi exponentielle décroissante, qui est le cas “monovue” de la loi Gamma à deux paramètres (un facteur d’échelle μ et un facteur de forme L) $\mathcal{G}[\mu, L](x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lx}{\mu}\right)^{L-1} e^{-\frac{Lx}{\mu}} \quad L > 0 \quad (1)$$

Goodman modélise aussi le *Compound Speckle* qui correspond à un modèle de texture sur lequel opère le chatoisement de manière multiplicative. Par exemple, si la texture suit une loi Gamma Inverse, on obtient la loi de Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M](x)$:

$$\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \frac{\left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{L-1}}{\left(1 + \frac{Lx}{M\mu}\right)^{L+M}} \quad (2)$$

avec $L > 0$, $M > 0$. Il existe d’autres lois utilisées en imagerie cohérente, certaines découlant du modèle de *compound speckle*, d’autres introduites de manière beaucoup plus pragmatique (loi log-normale, loi de Weibull, loi Gamma Généralisée, ...) [8] : même si cet article ne traite que d’un jeu limité de lois, la démarche se généralise sans problème à ces autres lois.

1.2 Le formalisme des statistiques de Mellin

Une caractéristique essentielle de ces données d’imagerie cohérente est le fait qu’amplitude et intensité sont définies uniquement sur \mathbb{R}^+ . Aussi on peut quitter le cadre des statistiques traditionnelles –qui définissent la fonction caractéristique comme une transformée de Fourier définie sur \mathbb{R} –, et choisir l’approche des “statistiques de Mellin” (appelées aussi log-statistiques) [7] (2002) et qui définissent la fonction caractéristique dite de seconde espèce comme une transformée de Mellin (définie sur \mathbb{R}^+).

Pour une densité de probabilité $p(x)$ on a ainsi sa fonction caractéristique de deuxième espèce :

$$\phi_p(s) = \mathcal{M}[p(x)](s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} p(x) dx, \quad (3)$$

par dérivation de cette dernière, ses “log-moments” \tilde{m}_n qui, grâce aux propriétés de la transformée de Mellin, s’expriment comme :

$$\tilde{m}_n = \left. \frac{d^n \phi_p(s)}{ds^n} \right|_{s=1} = \int_0^{+\infty} (\log x)^n p(x) dx. \quad (4)$$

et enfin, par dérivation logarithmique de cette dernière, ses “log-cumulants” :

$$\tilde{\kappa}_n = \left. \frac{d^n \log(\phi_p(s))}{ds^n} \right|_{s=1} \quad (5)$$

Comme pour les statistiques traditionnelles, on peut écrire les log-cumulants à partir des log-moments. On a par exemple :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_2 &= \tilde{M}_2 = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2 \\ \tilde{\kappa}_3 &= \tilde{M}_3 = \tilde{m}_3 - 3\tilde{m}_2\tilde{m}_1 + 2\tilde{m}_1^3 \end{aligned}$$

Une curiosité analytique fait que l'expression de ces grandeurs pour la loi Gamma s'avère assez simple. Par exemple, la fonction caractéristique de deuxième espèce de la loi Gamma s'exprime comme :

$$\phi_{\mathcal{G}}(s)\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \quad (6)$$

Or, si on regarde bien la définition de la fonction caractéristique de deuxième espèce, équation (3), on note que pour $s = r + 1$ son expression correspond au moment d'ordre p , ce qui donne directement le moment d'ordre r de la loi Gamma :

$$m_r = \phi_{\mathcal{G}}(s)|_{s=r+1} = \mu^r \frac{\Gamma(L+r)}{L^r \Gamma(L)} \quad (7)$$

Il est aussi facile d'exprimer les log-cumulants de la loi Gamma :

$$\tilde{\kappa}_1 = \log \mu + \Psi(L) - \log L \quad (8)$$

$$\tilde{\kappa}_r = \Psi(r-1, L) \quad r > 1 \quad (9)$$

avec $\Psi(x)$ la fonction Digamma et $\Psi(n, x)$ la fonction Polygamma d'ordre n .

Un autre point important est que le *compound speckle* s'exprime par une convolution de Mellin [3], ce qui se traduit par un simple produit des fonctions caractéristiques de deuxième espèce. On a ainsi directement la fonction caractéristique de deuxième espèce de Fisher :

$$\mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1}\Gamma(L)} \frac{\Gamma(M+1-s)}{M^{1-s}\Gamma(M)} \quad (10)$$

Une autre propriété essentielle de la convolution de Mellin est qu'elle se traduit par une propriété d'additivité des log-cumulants.

1.3 Expression des lois sous forme de fonctions de Meijer

A partir de l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce, on obtient la loi de probabilité en utilisant la transformée de Mellin inverse, c'est à dire par la relation :

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \phi(s) ds \quad (11)$$

avec $c = 1$ dans le cas des lois de probabilité définies sur \mathbb{R}^+ (il faut pour cela que la valeur $c = 1$ appartienne à la "bande de définition" de $\phi(s)$, ce qui est en pratique toujours le cas pour une densité de probabilité). Ainsi, la loi Gamma $\mathcal{G}[\mu, L](x)$ peut s'écrire :

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{L}{\Gamma(L)\mu} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{Lx}{\mu}\right)^{-s} \Gamma(L+s-1) ds \quad (12)$$

et la loi de Fisher comme :

$$\sim \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{Lx}{M\mu}\right)^{-s} \Gamma(L+s-1) \Gamma(M+1-s) ds \quad (13)$$

le côté technique de ces expressions reposant dans l'intégrale dans le plan complexe de produits de fonctions Gamma.

Or Meijer [2] a défini certaines des fonctions qui portent son nom justement sous forme de transformée de Mellin inverse

$$\bar{G}_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n & ; & a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m & ; & b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j+s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j-s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j+s)} x^{-s} ds \quad (14)$$

On reconnaît dans les expressions (12) et (13) des fonctions de Meijer et on montre que cette forme générique est intrinsèquement liée à la construction de ces lois par convolution de Mellin. De ce fait, on montre que la quasi totalité des lois définies dans le contexte de *compound speckle* s'écrivent sous forme de fonctions de Meijer.

1.4 Quelques propriétés des fonctions de Meijer

Les fonctions de Meijer définies par la relation 14 possèdent deux propriétés assez surprenantes : leurs dérivées sont des fonctions de Meijer et surtout leurs primitives sont des fonctions de Meijer. Cette dernière propriété a un rôle essentiel pour l'étude des lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+ puisqu'elle permet de connaître la forme analytique de la fonction de répartition. Grâce à cette expression analytique, il est aisé de faire des simulations de ces lois par la méthode de la fonction de répartition inverse. Nous verrons aussi que la connaissance de cette fonction de répartition permet des expressions analytiques de la distance de Kolmogorov-Smirnov.

Enfin, notons que les fonctions de Meijer sont implémentées dans des logiciels comme Maple© ou Python[4], ce qui en permet une utilisation intensive en traitement d'images radar.

1.5 Cas des lois Gamma et des lois de Fisher

La loi Gamma, $\mathcal{G}[\mu, L]$, relation (1), s'exprime sous forme de fonction de Meijer :

$$\frac{L}{\mu} \frac{1}{\Gamma(L)} \bar{G}_{0,1}^{1,0} \left(\frac{Lx}{\mu} \left| \begin{matrix} \cdot & ; & \cdot \\ L-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right. \right) \quad (15)$$

et sa fonction de répartition s'écrit :

$$\frac{1}{\Gamma(L)} \bar{G}_{1,2}^{1,1} \left(\frac{Lx}{\mu} \left| \begin{matrix} 1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right. \right) \quad (16)$$

La loi de Fisher, $\mathcal{F}[\mu, L, M]$, relation (2), s'exprime sous forme de fonction de Meijer :

$$\frac{L}{M\mu} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{1,1}^{1,1} \left(\frac{Lx}{M\mu} \left| \begin{matrix} -M & ; & \cdot \\ L-1 & ; & \cdot \end{matrix} \right. \right) \quad (17)$$

et sa fonction de répartition s'écrit :

$$\frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \bar{G}_{2,2}^{1,2} \left(\frac{Lx}{M\mu} \left| \begin{matrix} 1, -M+1 & ; & \cdot \\ L & ; & 0 \end{matrix} \right. \right) \quad (18)$$

2 La distance de Kullback-Leibler

2.1 Cas de la famille exponentielle

La distance de Kullback-Leibler entre deux lois de probabilité $p(x)$ et $q(x)$ est donnée par la relation :

$$DKL(p, q) = \int p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) dx \quad (19)$$

Elle possède d'intéressantes propriétés statistiques puisque elle est caractéristique de la vitesse de décroissance de l'exponentielle [9].

Dans la mesure où l'on étudie deux lois $p(x)$ et $q(x)$ de la famille exponentielle (comme la loi Gamma), les expressions de $\log(p(x))$ et de $\log(q(x))$ s'expriment comme des sommes faisant intervenir des sommes des puissances des variables $\log x$ et x : ceci conduit alors à des expressions s'exprimant en fonction des moments et des log-moments de $p(x)$ [10].

Par exemple, si $q(x) = \mathcal{G}[\mu', L']$, on a :

$$\log(q(x)) = L' \log \left(\frac{L'}{\mu'} \right) - \log \Gamma(L') + (L' - 1) \log x - \frac{L'}{\mu'} x \quad (20)$$

ce qui permet de réécrire un des termes de l'expression (19) :

$$\int p(x) \log(\mathcal{G}[\mu', L'](x)) dx = L \log \left(\frac{L}{\mu} \right) - \log \Gamma(L) + (L - 1) \tilde{\kappa}_{p,1} - \frac{L}{\mu} \tilde{m}_{p,1} \quad (21)$$

dans laquelle $\tilde{\kappa}_{p,1}$ est le premier log-cumulant de la loi $p(x)$ et $\tilde{m}_{p,1}$ est le premier moment de la loi $p(x)$. Ces deux grandeurs étant connues pour les lois Gamma, relations (7) et (8), on obtient ainsi la distance entre deux lois Gamma $p(x) = \mathcal{G}[\mu, L]$ et $q(x) = \mathcal{G}[\mu', L']$:

$$\log \left(\left(\frac{L}{\mu} \right)^L \left(\frac{\mu'}{L'} \right)^{L'} \frac{\Gamma(L')}{\Gamma(L)} \right) + L' \left(\frac{\mu}{\mu'} \right) - L + (L - L') (\log(\mu) + \Psi(L) - \log(L)) \quad (22)$$

Un exemple de résultats est donné figure 1 où plusieurs distances de Kullback-Leibler entre lois Gamma sont calculées avec la loi Gamma $\mathcal{G}[1, 1]$ comme référence. Dans cette figure, les lois sont positionnées dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$ ($\tilde{\kappa}_3$ selon les abscisses, $\tilde{\kappa}_2$ selon les ordonnées, le demi-espace droit correspondant aux familles de lois à queues lourdes).

2.2 Cas de la loi de Fisher

Grâce à une relation du Gradshteyn ([6], p558 formule 14), on déduit :

$$\int_0^\infty \mathcal{F}[\mu, L, M](x) \log \left(1 + \frac{Lx}{M\mu} \right)^{L+M} dx = (L+M) (\Psi(L+M) - \Psi(M)) \quad (23)$$

et connaissant aussi la relation (21), on obtient une expression analytique originale de la distance de Kullback entre une loi de

Fisher $\mathcal{F}[\mu, L, M]$ et une loi Gamma :

$$DKL(\mathcal{F}[\mu, L, M], \mathcal{G}[\mu', L']) = \log \left(\frac{L}{M\mu} \frac{\Gamma(L+M)}{\Gamma(L)\Gamma(M)} \right) + (L-1)\Psi(L) + (M+1)\Psi(M) - (L+M)\Psi(L+M) - L' \log \left(\frac{L'}{\mu'} \right) + \log \Gamma(L') + \frac{L'}{\mu'} \frac{M}{M-1} \mu - (L'-1) \left(\log \left(\frac{M\mu}{L} \right) + \Psi(L) - \Psi(M) \right) \quad (24)$$

3 La distance de Kolmogorov-Smirnov

3.1 Lois de Meijer

Soient deux lois de probabilité $p(x)$ et $q(x)$ définies sur \mathbb{R}^+ et soient \mathcal{FR}_p et \mathcal{FR}_q leurs fonctions de répartition. Alors, dans la mesure où l'intégrale est définie, la distance de Kolmogorov-Smirnov s'écrit :

$$DKS(p, q) = \int p(x) (\mathcal{FR}_p(x) - \mathcal{FR}_q(x))^2 dx \quad (25)$$

Cette expression pose très souvent des problèmes dans le cas général. Or, si les deux lois sont des lois de Meijer, c'est à dire qu'elles s'expriment sous forme de fonction de Meijer, le calcul débouche sur une expression analytique grâce à la relation [1] page 422 qui exprime l'intégrale de 0 à l'infini du produit de deux fonctions de Meijer. Cette relation est à manipuler avec beaucoup de précautions à cause des bandes de définition des transformées de Mellin correspondantes.

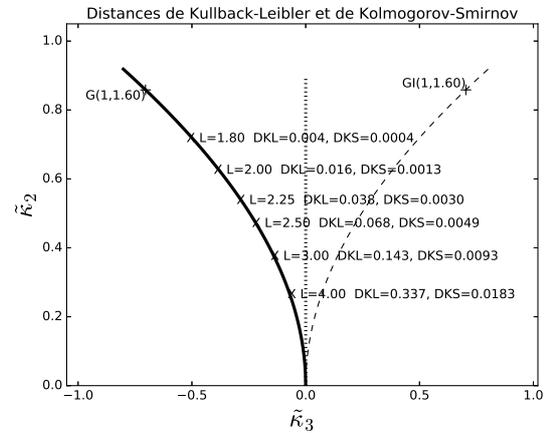


Figure 1: Comparaison, dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, des distances de Kolmogorov-Smirnov et de Kullback-Leibler entre la loi Gamma $\mathcal{G}[1, 1.6]$ et les lois $\mathcal{G}[1, 1.8]$, $\mathcal{G}[1, 2.]$, $\mathcal{G}[1, 2.25]$, $\mathcal{G}[1, 2.50]$, $\mathcal{G}[1, 3.0]$ et $\mathcal{G}[1, 4]$.

3.2 Cas des lois Gamma et des lois de Fisher

Il est alors possible d'exprimer analytiquement la distance de Kolmogorov-Smirnov entre deux lois Gamma $\mathcal{G}[\mu_1, L_1]$ et $\mathcal{G}[\mu_2, L_2]$.

Cette nouvelle relation s'exprime comme :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(L_1)} \frac{\mu_1}{L_1} \tilde{G}_{3,3}^{2,2} \left(\frac{\mu_1}{L_1} \middle| \begin{array}{l} -L_1, 1 \\ -1, L_1 \end{array} ; 0 \right) \\
& + \frac{1}{\Gamma(L_2)\Gamma(L_2)} \frac{\mu_2}{L_2} \tilde{G}_{3,3}^{2,2} \left(\frac{\mu_2}{L_2} \middle| \begin{array}{l} -L_2, 1 \\ -1, L_2 \end{array} ; 0 \right) \\
& - \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(L_2)} \frac{\mu_1}{L_1} \tilde{G}_{3,3}^{2,2} \left(\frac{\mu_1 L_2}{\mu_2 L_1} \middle| \begin{array}{l} -L_1, 1 \\ -1, L_2 \end{array} ; 0 \right) \\
& - \frac{1}{\Gamma(L_1)\Gamma(L_2)} \frac{\mu_2}{L_2} \tilde{G}_{3,3}^{2,2} \left(\frac{\mu_2 L_1}{\mu_1 L_2} \middle| \begin{array}{l} -L_2, 1 \\ -1, L_1 \end{array} ; 0 \right)
\end{aligned} \quad (26)$$

Un exemple de résultats est donné figure 1 où plusieurs distances de Kolmogorov-Smirnov entre lois Gamma sont calculées avec la loi Gamma $\mathcal{G}[1, 1.6]$ comme référence.

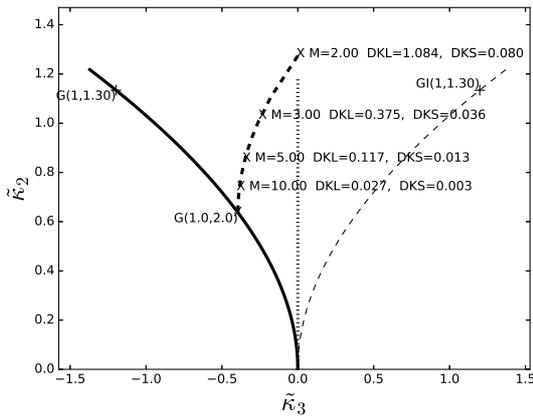


Figure 2: Comparaison, dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, des distances de Kolmogorov-Smirnov et de Kullback-Leibler entre la loi Gamma $\mathcal{G}[1, 2]$ et les lois $\mathcal{F}[1, 2, 10]$, $\mathcal{F}[1, 2, 5]$, $\mathcal{F}[1, 2, 3]$, et $\mathcal{F}[1, 2, 2]$.

Ce résultat s'étend à la loi de Fisher : il est alors possible d'avoir une expression analytique de la distance de Kolmogorov-Smirnov entre une loi Gamma et une loi de Fisher. Ces résultats sont illustrés figure 2.

3.3 Comparaison entre distances

Si les valeurs des distances de Kolmogorov-Smirnov et de Kullback-Leibler ne peuvent être comparées en terme de valeurs, leur rapport montre une tendance très instructive. La figure 3 montre qu'il existe une relation linéaire entre ces distances et que ces deux distances ont tout en pratique pour être des distances équivalentes pour les lois définies sur \mathbb{R}^+ .

4 Conclusion

Malgré une certaine lourdeur de notation, exprimer les lois de l'imagerie cohérente sous forme de fonctions de Meijer présente d'étonnantes perspectives puisqu'elle permet d'avoir des expressions analytiques des distances de Kolmogorov-Smirnov. Il est alors possible de définir une métrique dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\kappa}_3$, ce qui permet d'avoir une approche plus quantitative pour la comparaison de lois, tant empiriques que théoriques.

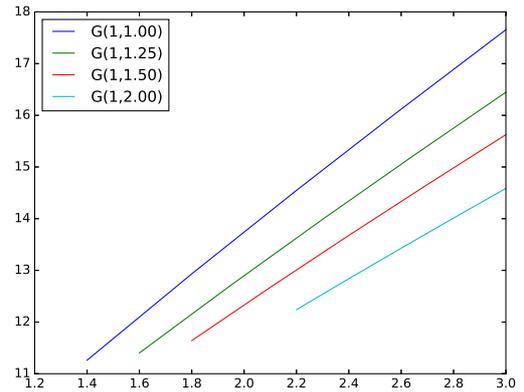


Figure 3: Rapport entre distances de Kullback-Leibler et de Kolmogorov-Smirnov entre lois Gamma selon la valeur du paramètre L . Les différentes courbes correspondent au ratio de ces distances entre une loi Gamma de référence ($\mathcal{G}[1, 1.00]$, $\mathcal{G}[1, 1.25]$, $\mathcal{G}[1, 1.50]$ et $\mathcal{G}[1, 2.00]$) et d'autres lois Gamma.

References

- [1] H. Bateman. *Table of integral transforms, vol. II*, McGraw-Hill, 1954
- [2] H. Bateman. *Higher transcendental functions : volume I*. McGraw-Hill, 1953
- [3] B. Epstein. *Some applications of the Mellin transform in statistics*. Annals of Mathematical Statistics, 19 (1948), pp 370-379.
- [4] Fredrik Johansson and others. *mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 0.18)*. <http://mpmath.org>, 2013
- [5] J.W. Goodman. *Speckle phenomena in optics : Theory and applications*. Roberts & Company, 2007.
- [6] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. *Table of integrals, series and product*. Academic Press, 1980
- [7] J-M Nicolas. *Introduction aux statistiques de deuxième espèce : applications des logs-moments et des logs-cumulants à l'analyse des lois d'images radar*, Traitement du signal, vol 19, No 3, pp 139-167, 2002.
- [8] J-M Nicolas. *Les distributions de Meijer et leurs propriétés en statistiques de Mellin*. Rapport Télécom Paris-Tech 2011D002, 2011.
- [9] P. Réfrégier. *Théorie du bruit et applications en physique*. Hermès, 2002.
- [10] H. Sportouche, J.-M. Nicolas, F. Tupin, *Mimick Capacity Of Fisher And Generalized Gamma Distributions For High Resolution SAR Image Statistical Modeling*, JSTARS, 2017 (to be published)