

# Restauration d'image par une approche bayésienne semi non supervisée et le mélange de gaussienne

François ORIEUX, Raphael CHINCHILLA

Laboratoire des Signaux et Systèmes – Univ. Paris-Sud, CNRS, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay  
3 rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France  
orieux@l2s.centralesupelec.fr, raphael@chinchillas.net

**Résumé** – La restauration convexe d'image est un champ majeur en problèmes inverses, le problème étant majoritairement résolu à hyperparamètres fixés. Nous proposons une contribution sur une approche bayésienne où le champ est construit par un mélange de gaussienne et l'estimateur de la moyenne *a posteriori* calculée par MCMC. Les contributions principales sont l'utilisation de plusieurs opérateurs de régularisation, évitant les artefacts sur les bords, ainsi que l'utilisation d'un nouvel algorithme pour la simulation des moyennes *a priori* pour une meilleure stabilité numérique. Les résultats, en comparaison avec les approches supervisées standards montrent une qualité équivalente avec une approche quasiment non supervisée et fournissant en outre une quantification des incertitudes.

**Abstract** – Convex image restoration is a major field in inverse problems, and problem is often addressed by hand-tuning hyper-parameters. We propose a contribution about a Bayesian approach where a convex field is constructed via Location Mixture of Gaussian and the estimator computed with a fast MCMC algorithm. Main contributions are the use of several operator avoiding crosslike artifacts and a new algorithm to simulate prior mean. Results, in comparison to standard supervised results, have equivalent quality in a quasi-unsupervised approach and go with uncertainty quantification.

## 1 Introduction

La restauration d'image, ou la déconvolution est un problème majeur avec une littérature abondante sur le sujet. Ce problème trouve de nombreuses applications en optique, radio astronomie ou encore la microscopie [1]–[4].

Les résolutions par optimisation, basées sur la minimisation de critères composites, sont communes [5] et populaires dans le cas des grandes dimensions grâce à des algorithmes efficaces, en particulier dans le cas convexe [6]. Cependant, les hyperparamètres qui déterminent le compromis entre les données et les *a priori* sont habituellement réglés à la main (supervisé) et la quantification de l'incertitude sur l'estimation sont plus modestement étudiés (UQ ou *Uncertainty Quantification*).

Les méthodes bayésiennes, à l'inverse, proposent une démarche naturelle en considérant les hyperparamètres comme des paramètres de nuisance inconnus qui doivent être marginalisés [7]. De plus, l'analyse de la loi *a posteriori* permet la définition claire d'intervalle de confiance permettant la quantification de l'incertitude.

Dans le cadre bayésien, les approches variationnelles ont suscité l'intérêt en offrant des algorithmes présentés comme rapides [8], [9]. Cependant, ces approches passent par la construction d'une loi approchante et l'incertitude est connue pour être sous-estimée, probablement due à l'approximation d'indépendance entre variables.

L'approche de ce travail est la mise en œuvre d'un algorithme MCMC pour permettre une meilleure exploration de la

loi *a posteriori*, le calcul d'espérance, pour l'estimation ponctuelle (EAP) ou d'intervalle de confiance. Cependant, les résultats des MCMC sur des méthodes non supervisées sont plus parcimonieux avec des travaux basés sur la vraisemblance marginale [10], les *a priori* quadratiques [11], la simulation par Metropolis-Hastings de chaque variable [12] ou encore l'approximation de Moreau [13].

Dans [14], les auteurs présentent un algorithme MCMC rapide de déconvolution non supervisée pour un *a priori* gaussien (quadratique). Le travail de J.-F. Giovannelli [15] présente lui un algorithme de déconvolution convexe non supervisée. Malheureusement, l'utilisation de plusieurs opérateurs, comme les gradients verticaux et horizontaux, ne sont apparemment pas permis. De plus, des instabilités numériques dues à la présence de fonctions spéciales sont présentes. Finalement, des divergences des chaînes MCMC peuvent être observées en pratique lorsque le jeu complet d'hyperparamètres est estimé.

Nous proposons une contribution basée sur [15]. On montre que plusieurs opérateurs peuvent en réalité être utilisés, permettant de meilleurs résultats et l'absence d'effet de croix sur les bords [16]. Pour éviter les instabilités numériques, nous proposons une méthode basée sur l'algorithme du rejet. Finalement, en considérant que le niveau de bruit est connu ou pré-estimé, la méthode devient robuste et permet d'estimer la précision *a priori* ainsi que sa forme. L'algorithme proposé ne prétend pas atteindre les meilleures performances possible, mais plutôt de compléter les travaux menés sur la restauration convexe non supervisée.

## 2 Notations et problème

On considère une image  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  de  $N$  pixels. Le modèle de donnée est  $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$  où  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$  représente les mesures,  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  la matrice de convolution et  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^N$  un bruit inconnu. Les convolutions sont circulantes et calculées par transformation de Fourier discrète  $\mathbf{F}$ , correspondant à une matrice diagonalisable  $\mathbf{H} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{\Lambda}_H \mathbf{F}$ , où  $\mathbf{\Lambda}_H = \text{diag}(\hat{h}_0, \dots, \hat{h}_{N-1})$ . Cette hypothèse permet le calcul rapide d'une image à hyper-parameters fixés.

La loi *a priori* pour le bruit est supposée gaussienne blanche avec un niveau de bruit connu  $\sigma_n = \gamma_n^{-1/2} > 0$  amenant à la vraisemblance

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}; \gamma_n) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \gamma_n^{\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{\gamma_n}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2\right). \quad (1)$$

On considère également un champ de Markov *a priori* sur  $\mathbf{x}$

$$p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}) = K(\boldsymbol{\theta})^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} E_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})\right) \quad (2)$$

où  $K(\boldsymbol{\theta}) = \int \exp(-E_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})/2) d\mathbf{x}$  est la fonction de partition. Dans le cas général,  $K$  dépend de  $\boldsymbol{\theta}$ , ce qui est la difficulté majeure pour leurs estimations [10], [15].

Pour le caractère bien posé du problème inverse on considère l'énergie  $E_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = \gamma_x \sum_{c \in \mathcal{C}} \phi(\mathbf{d}_c^t \mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$  avec l'ensemble  $\mathcal{C}$  de cliques  $c$ , le voisinage  $\mathbf{d}_c$  [7] et  $\gamma_x > 0$ . Pour la préservation des contours et l'unicité de la solution supervisée, le potentiel  $\phi$  est choisi fortement convexe.

## 3 Approche bayésienne et algorithmes

### 3.1 Potentiel LogErf et mélange de gaussienne

Le potentiel LogErf  $\phi$  [15], [17] est la fonction convexe  $\phi(x) = -2 \ln(\chi(x) + \chi(-x))$  avec

$$\chi(x) = \exp\left(\frac{\gamma_b}{2} x\right) \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma_x}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{2\gamma_x} + x\right)\right) \quad (3)$$

et  $\gamma_x > 0$ ,  $\gamma_b > 0$ . Ce potentiel, assimilable au potentiel de Huber, possède plusieurs avantages dans un champ de Gibbs :

1.  $\phi$  est convexe et, par conséquent,  $E_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$  est convexe.
2. La distribution  $p(x)$  est un mélange de Gaussienne (MG) sur la moyenne (*Location Mixture of Gaussian* - LMG)

$$p(x) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \phi(x)\right) \propto \int_{\mathbb{R}} p(x | b) p(b) db \quad (4)$$

$$= P^{-1} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\gamma_x}{2} (x - b)^2 - \frac{\gamma_b}{2} |b|\right) db \quad (5)$$

où  $p(b)$  est une Laplace sur les moyennes de  $p(u | b)$ .

3. La fonction de partition est calculable et ne dépend pas de  $b$ . Pour le LogErf on a  $P = \sqrt{2\pi} \gamma_x^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{4}\right)^{-1}$ .

Un champ de Gibbs sur l'image  $\mathbf{x}$  peut être construit comme

$$p(\mathbf{x} | \gamma_x, \gamma_b) = K^{-1} \int \exp\left(-\frac{\gamma_x}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2\right) \prod_{c \in \mathcal{C}} \exp\left(\frac{\gamma_b}{2} |b_c|\right) d\mathbf{b} \quad (6)$$

soit, un MG pour chaque clique  $\mathbf{d}_c^t \mathbf{x}$  associée à une variable auxiliaire  $b_c$ . Le travail initial de J.-F. Giovannelli [15] impose la nécessité d'avoir autant de cliques que de pixels. L'opérateur de régularisation est alors le laplacien circulant. Cette approche permet d'avoir un *a priori* indépendant pour chaque clique

$$p(\mathbf{x}) \propto \prod_{c=1}^N \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\gamma_x |\bar{x}_c - b_c|^2\right) \exp\left(\frac{\gamma_b}{2} |b_c|\right) db_c \quad (7)$$

où  $\bar{x} = \mathbf{D}\mathbf{x}$ , et  $\bar{x}_c$  l'élément  $c$  de  $\bar{x}$ . Cependant, ce modèle a tendance à introduire des artefacts en croix au niveau des bords [16]. De plus, cette contrainte n'est pas nécessaire.

Pour les images, on considère le gradient horizontal et vertical  $\mathbf{D}_h$  et  $\mathbf{D}_v$ , avec des moyennes  $\mathbf{b}_h \in \mathbb{R}^N$  et  $\mathbf{b}_v \in \mathbb{R}^N$

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{b}) \propto \exp\left(-\frac{\gamma_x}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2\right) \quad (8)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\mathbf{Q}|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{2}\right) \quad (9)$$

avec  $\mathbf{D}^t = [\mathbf{D}_h^t, \mathbf{D}_v^t]$ ,  $\mathbf{b}^t = [\mathbf{b}_h^t, \mathbf{b}_v^t]$ ,  $\mathbf{Q} = \gamma_x (\mathbf{D}_h^t \mathbf{D}_h + \mathbf{D}_v^t \mathbf{D}_v)$  et  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{D}^t \mathbf{b}$ , si  $\mathbf{Q}$  n'est pas singulière. Contrairement à [15], la distribution sur  $\mathbf{x}$  n'est plus un produit de distribution indépendante sur chaque clique [16]. La moyenne *a priori*  $\boldsymbol{\mu}$  est alors un mélange des variables auxiliaires. L'équation (9) correspond à la statistique suffisante, mais l'équation (8) est plus naturelle, où chaque clique a une moyenne inconnue et, par conséquent, chaque clique suit un MG. La marginale s'écrit  $p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x} | \mathbf{b}) \prod_{c=1}^{2N} p(b_c) d\mathbf{b}$ , et reste un MG. En choisissant une loi de Laplace pour  $b_c$ , la fonction de partition s'exprime comme  $K(\gamma_x, \gamma_b) \propto \gamma_x^{-\frac{N}{2}} \gamma_b^{-2N}$ . En conclusion, les conditions d'existence ne reposent pas sur le nombre de cliques, mais sur la non singularité de  $\mathbf{Q}$ .

### 3.2 Loi *a posteriori* et estimateurs

La loi *a posteriori* jointe des inconnues s'écrit

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \gamma_x, \gamma_b | \mathbf{y}; \gamma_n) \propto p(\mathbf{y} | \mathbf{x}; \gamma_n) p(\mathbf{x} | \mathbf{b}, \gamma_x) p(\mathbf{b} | \gamma_b) p(\gamma_x) p(\gamma_b). \quad (10)$$

La loi *a priori* pour  $\mathbf{x}$  est gaussienne corrélée, laplacienne pour  $\mathbf{b}$  et Jeffrey [18] pour  $\gamma_x$  et  $\gamma_b$ , soit

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \gamma_x, \gamma_b | \mathbf{y}) \propto \gamma_x^{-\frac{N}{2}} \gamma_b^{-2N} \exp\left(-\frac{\gamma_n}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2\right) \exp\left(-\frac{\gamma_x}{2} \|\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2\right) \exp\left(-\frac{\gamma_b}{2} \|\mathbf{b}\|_1\right). \quad (11)$$

Plusieurs estimateurs sont étudiés :

1. L'espérance *a posteriori* supervisée (SEAP)

$$\mathbf{x}_{\text{SEAP}} = \iint \mathbf{x} p(\mathbf{x}, \mathbf{b} | \gamma_x, \gamma_b, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{b}. \quad (12)$$

Cet estimateur est la principale référence pour comparaison avec l'estimateur proposé (EAP) non supervisé. Il permet de déterminer de bonne valeur pour les hyper paramètres  $\gamma_x^*$  et  $\gamma_b^*$  avec la connaissance du vrai signal  $\mathbf{x}^*$ . L'image  $\mathbf{x}_{\text{SEAP}}^* = \int \mathbf{x} p(\mathbf{x} | \gamma_x^*, \gamma_b^*, \mathbf{y}) d\mathbf{x}$  est donc la référence, étant la meilleure image possible avec ce modèle.

2. Le maximum *a posteriori* supervisé (MAP)

$$\mathbf{x}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{x}} - \ln \int \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{b} \mid \gamma_{\mathbf{x}}, \gamma_{\mathbf{b}}, \mathbf{y}) d\mathbf{b}. \quad (13)$$

Champagnat et coll. ont montré dans [17] que cet estimateur peut être calculé par un algorithme EM équivalent à un algorithme semi-quadratique dans le schéma Geman & Yang. Le MAP permet de quantifier et qualifier les différences, si présentes, avec le SEAP.

3. L'espérance *a posteriori* non supervisée (EAP)

$$\mathbf{x}_{\text{EAP}} = \iint \mathbf{x} \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \gamma_{\mathbf{x}}, \gamma_{\mathbf{b}} \mid \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{b} d\gamma_{\mathbf{x}} d\gamma_{\mathbf{b}}. \quad (14)$$

Cet estimateur est l'objectif de ce travail et est comparé aux reconstructions supervisées. L'algorithme, présenté partie 3.3 permet également d'estimer  $\gamma_{\mathbf{x}}$  et  $\gamma_{\mathbf{b}}$ .

4. L'espérance *a posteriori* non supervisée avec un *a priori* quadratique (QUAD), soit avec le modèle *a priori*

$$\mathbf{p}(\mathbf{x} \mid \gamma_{\mathbf{x}}) \propto \exp(-\gamma_{\mathbf{x}} \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|^2/2). \quad (15)$$

Cet estimateur  $\mathbf{x}_{\text{QUAD}}$  produit des résultats quasiment optimaux avec estimation des hyper paramètres [14] dans le cas gaussien.

### 3.3 Algorithme MCMC pour EAP et SEAP

Le calcul de l'estimateur EAP est basé sur un échantillonneur de Gibbs qui simule successivement, avec  $k = 0$ ,  $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{0}$  et  $\gamma_{\mathbf{x}}^{(0)} = \gamma_{\mathbf{b}}^{(0)} = 1$ , les lois *a posteriori* conditionnelles

1.  $\mathbf{x}^{(k+1)} \sim \mathbf{p}(\mathbf{x} \mid \mathbf{b}^{(k)}, \gamma_{\mathbf{x}}^{(k)}, \mathbf{y})$ ,
2.  $\mathbf{b}^{(k+1)} \sim \mathbf{p}(\mathbf{b} \mid \mathbf{x}^{(k+1)}, \gamma_{\mathbf{x}}^{(k)}, \gamma_{\mathbf{b}}^{(k)})$ ,
3.  $\gamma_{\mathbf{x}}^{(k+1)} \sim \mathbf{p}(\gamma_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{b}^{(k+1)})$ ,
4.  $\gamma_{\mathbf{b}}^{(k+1)} \sim \mathbf{p}(\gamma_{\mathbf{b}} \mid \mathbf{b}^{(k+1)})$ ,
5.  $k \leftarrow k + 1$ .

Pour l'estimateur SEAP, les étapes 3 et 4 ne sont pas appliquées puisque  $\gamma_{\mathbf{x}}$  et  $\gamma_{\mathbf{b}}$  sont fixés, éventuellement à  $\gamma_{\mathbf{x}}^*$  et  $\gamma_{\mathbf{b}}^*$ .

La loi *a posteriori* conditionnelle pour  $\mathbf{x}$  est gaussienne. Tous les opérateurs étant circulants, cette loi peut être simulée efficacement dans l'espace de Fourier

$$\mathbf{p}(\hat{\mathbf{x}} \mid \hat{\mathbf{b}}, \gamma_{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \propto \exp\left(-\frac{\gamma_{\mathbf{n}}}{2} \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{\Lambda}_H \hat{\mathbf{x}}\|^2 - \frac{\gamma_{\mathbf{x}}}{2} \|\mathbf{\Lambda}_h \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{b}}_h\|^2 - \frac{\gamma_{\mathbf{b}}}{2} \|\mathbf{\Lambda}_v \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{b}}_v\|^2\right). \quad (16)$$

Un échantillon est alors  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{F}^\dagger \hat{\mathbf{x}}^{(k+1)}$  où  $\hat{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Lambda}_H^\dagger \mathbf{F} \mathbf{y} + \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F} \boldsymbol{\epsilon}$  avec  $\mathbf{\Sigma}^{-1} = \gamma_{\mathbf{n}} |\mathbf{\Lambda}_H|^2 + \gamma_{\mathbf{x}} (|\mathbf{\Lambda}_h|^2 + |\mathbf{\Lambda}_v|^2)$  et  $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ .

La simulation des variables auxiliaires  $\mathbf{b}$  est plus délicate, notamment par la présence d'erreurs numériques dans l'algorithme basé sur l'inversion de cdf [15], mais elles sont conditionnellement indépendantes

$$\mathbf{p}(\mathbf{b} \mid \mathbf{x}, \gamma_{\mathbf{x}}, \gamma_{\mathbf{b}}) \propto \prod_{c=1}^{2N} \exp\left(-\frac{\gamma_{\mathbf{x}}}{2} |\bar{x}_c - b_c|^2 - \gamma_{\mathbf{b}} |b_c|\right) \quad (17)$$

où  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\mathbf{x}$ . Cette loi de Gauss-Laplace peut être simulée efficacement par un algorithme de rejet [19] avec une gaussienne comme loi instrumentale.

Pour finir, les *a posteriori* conditionnelles des hyper paramètres sont des lois Gamma

$$\mathbf{p}(\gamma_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x}, \mathbf{b}) \propto \gamma_{\mathbf{x}}^{-\frac{(N-1)}{2}} \exp(-\gamma_{\mathbf{x}} \|\mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2/2) \quad (18)$$

et

$$\mathbf{p}(\gamma_{\mathbf{b}} \mid \mathbf{b}) \propto \gamma_{\mathbf{b}}^{-2N} \exp\left(-\gamma_{\mathbf{b}} \sum_{c=1}^{2N} |b_c|/2\right). \quad (19)$$

Ces lois scalaires sont simulées par des algorithmes standards disponibles dans les boites à outils de Matlab ou Numpy par exemple.

Les estimateurs SEAP et EAP sont calculés comme la moyenne empirique de  $K$  échantillons, après temps de chauffe,  $\boldsymbol{\theta}_{\text{EAP}} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\theta}^{(k)}$ . La variance de chaque pixel, soit la diagonale de la covariance *a posteriori*, est également calculée par

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{EAP}}^2 = \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}, \text{EAP}}) \approx \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_{\text{EAP}})^2. \quad (20)$$

## 4 Résultats

La méthode proposée a été testée sur le "cameraman", une image de  $N = 256 \times 256$  pixels avec de fortes discontinuités. La réponse impulsionnelle est carrée de taille  $5 \times 5$ . La convolution est calculée par filtrage  $\mathbf{y} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{\Lambda}_H \mathbf{F} \mathbf{x}^* + \mathbf{n}$ , où  $\mathbf{x}^*$  est la vraie image. Le niveau de bruit testé est  $\gamma_{\mathbf{n}} = 1$  (d'autres tests ont été menés sans résultats inattendus). Les gradients horizontaux et verticaux sont circulants également.

L'algorithme produit 1000 échantillons  $[\mathbf{x}, \mathbf{b}, \gamma_{\mathbf{x}}, \gamma_{\mathbf{b}}]$ , avec une période de chauffe de 500. Ces valeurs ont été choisies pour avoir, visuellement, une bonne exploration de loi. L'algorithme, mise en œuvre en Python, exécuté sur un processeur à 1,9 GHz, met 80 secondes environ pour produire 1000 échantillons.

La figure 1 montre la vraie image  $\mathbf{x}^*$  et les données  $\mathbf{y}$ . La meilleure estimation  $\mathbf{x}_{\text{SEAP}}$  est illustrée figure 1d, où les hyper paramètres  $\gamma_{\mathbf{x}}^*$ ,  $\gamma_{\mathbf{b}}^*$  ont été déterminés par minimisation de l'erreur  $\|\mathbf{x}_{\text{SEAP}}(\gamma_{\mathbf{x}}, \gamma_{\mathbf{b}}) - \mathbf{x}^*\|_1$ . La figure 1c montre notre proposition où les hyper paramètres sont automatiquement estimés à partir des données et sans connaissance de  $\mathbf{x}^*$ .

Pour comparaison, la solution non supervisée quadratique,  $\mathbf{x}_{\text{QUAD}}$  figure 1e, montre un niveau de bruit résiduel important visible dans les régions homogènes, ainsi que du phénomène de Gibbs près des bords. Ces défauts sont moins visibles ou absents de la solution proposée  $\mathbf{x}_{\text{EAP}}$ . Pour vérifier les bons résultats de la proposition  $\mathbf{x}_{\text{EAP}}$ , la figure 1f montre le meilleur MAP convexe supervisé  $\mathbf{x}_{\text{MAP}}^*$ , connu pour ses bons résultats [20]. En définitive, presque aucune différence n'est visible entre la proposition non supervisée et les supervisées connaissant  $\mathbf{x}^*$ .

Grâce à l'algorithme MCMC, l'estimateur EAP fournit également une quantification des incertitudes pour chaque quantité, notamment l'image  $\mathbf{x}$  illustrée figure 2a, où l'incertitude est concentrée dans les régions de fort gradient. La figure 2b

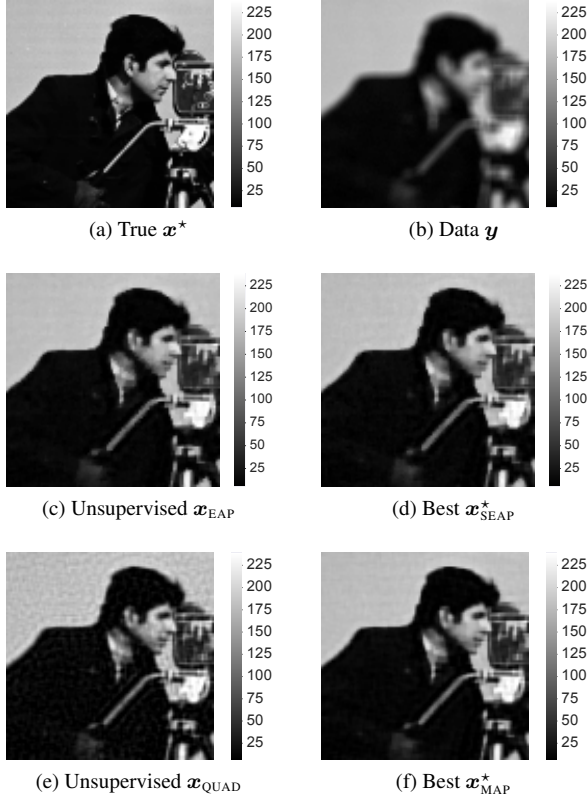


FIGURE 1 – La vraie image  $x^*$  et les données  $y$  sont présentées figure 1a et 1b. La figure 1d est la meilleure solution supervisée SEAP et la figure 1c est la proposition non supervisée. Pour comparaison, la figure 1e montre la solution non supervisée quadratique et la figure 1f le meilleur MAP supervisé.

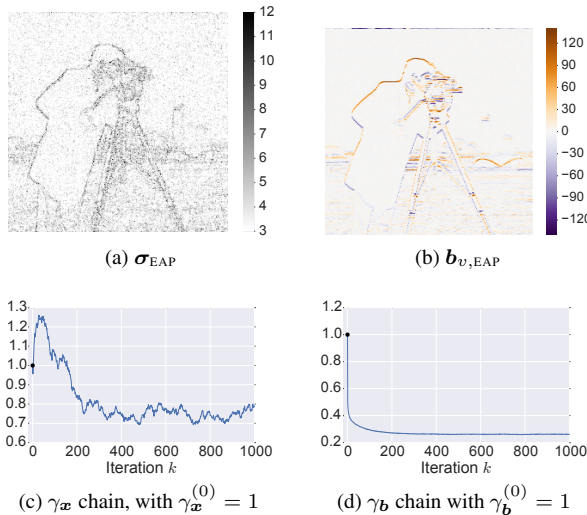


FIGURE 2 – La figure 2a montre l'estimation de l'écart-type pour chaque pixel. La figure 2b présente l'estimation de variables auxiliaires pour le gradient vertical. La figure 2c montre la chaîne pour  $\gamma_x$  et la figure 2d pour  $\gamma_b$ . Le point noir est l'initialisation.

montre également les espérances *a posteriori* pour  $b_v$ . Les valeurs sont naturellement autour de zéro et détectent les contours.

Les chaînes des hyper paramètres sont illustrées figure 2. La chaîne pour  $\gamma_b$  converge en un temps court avec une faible dispersion. Au contraire, la chaîne de  $\gamma_x$  présente un temps de convergence plus long avec plus d'intra corrélation. Elle reste convergente avec environ 200 itérations.

## 5 Conclusion

Nous présentons ici une contribution à la restauration d'image convexe non supervisée, basée sur une approche bayésienne et construite à partir de [15]. Nous permettons l'utilisation de plusieurs opérateurs, réduisant les artéfacts et permettant une meilleure qualité d'image. De plus, nous utilisons un algorithme nouveau pour la simulation des variables auxiliaires basé sur un algorithme de rejet. Le niveau de bruit est par contre supposé connu et son estimation est la principale perspective.

## Références

- [1] N. CHAKROVA et al., "Deconvolution methods for structured illumination microscopy", *EN, Journal of the Optical Society of America A*, t. 33, n° 7, B12, 2016.
- [2] S. BONGARD et al., "3D deconvolution of hyper-spectral astronomical data", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, t. 418, n° 1, p. 258–270, 2011.
- [3] F. ORIEUX et al., "Bayesian estimation for optimized structured illumination microscopy", *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 21, n° 2, p. 601–614, 2012.
- [4] J.-F. GIOVANNELLI et al., "Positive deconvolution for superimposed extended source and point sources", *Astronomy & Astrophysics*, t. 412, p. 401–412, 2005.
- [5] N. KOMODAKIS et al., "Playing with Duality : An Overview of Recent Primal-Dual Approaches for Solving Large-Scale Optimization Problems", *arXiv.org*, t. cs.NA, 2014.
- [6] S. BOYD et al., *Convex Optimization*, 3. Cambridge University Press, 2010, t. 25, chap. 1,10,11, p. 487–487.
- [7] J. IDIER, éd., *Bayesian Approach to Inverse Problems*. ISTE Ltd et John Wiley & Sons Inc., 2008.
- [8] Y. ZHENG et al., "Efficient Variational Bayesian Approximation Method Based on Subspace optimization", *IEEE Trans. on Image Processing*, t. 24, n° 2, p. 681–693, 2015.
- [9] S. D. BABACAN et al., "Variational Bayesian Super Resolution", *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 20, n° 4, p. 984–999, 2011.
- [10] X. DESCOMBES et al., "Estimation of Markov Random Field prior parameters using Markov Chain Monte Carlo Maximum Likelihood", *IEEE Trans. Image Processing*, t. 8, n° 7, p. 954–963, 1999.
- [11] C. GILAVERT et al., "Efficient Gaussian Sampling for Solving Large-Scale Inverse Problems Using MCMC", *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 63, n° 1, p. 70–80, 2015.
- [12] L. CHAARI et al., "A Hierarchical Bayesian Model for Frame Representation", *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 58, n° 11, p. 5560–5571, 2010.
- [13] M. PEREYRA, *Maximum-a-posteriori estimation with Bayesian confidence regions*, 2016.
- [14] F. ORIEUX et al., "Bayesian estimation of regularization and psf parameters for wiener-hunt deconvolution", *Journal of the Optical Society of America A*, t. 27, n° 7, p. 1593–1607, 2010.
- [15] J.-F. GIOVANNELLI, "Unsupervised Bayesian Convex Deconvolution Based on a Field With an Explicit Partition Function", *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 17, n° 1, p. 16–26, 2008.
- [16] R. G. CHINCHILLA, "Efficiently Sampling from High-Dimensional Mixture of Gaussians Distributions and Applications to Inverse Problems", Master Thesis, Université Paris-Saclay, 2016.
- [17] F. CHAMPAGNAT et al., "A connection between half-quadratic criteria and EM algorithms", *IEEE Signal Processing Letters*, t. 11, n° 9, p. 709–712, 2004.
- [18] M. WEST, "Outlier Models and Prior Distributions in Bayesian Linear Regression", *Journal of the Royal Statistical Society Series B Methodological*, t. 46, n° 3, p. 431–439, 1984.
- [19] F. ORIEUX, "A Reject Method for Efficient Gauss-Laplace Law Simulation", In preparation.
- [20] J. IDIER, "Convex Half-Quadratic Criteria and Interacting Auxiliary Variables for Image Restoration", *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 10, n° 7, p. 1001–1009, 2001.