

Rééchantillonnage indépendant et semi-indépendant pour le filtrage particulaire

Roland LAMBERTI¹, Yohan PETETIN¹, François SEPTIER², François DESBOUVRIES¹

¹Samovar, Telecom Sudparis, CNRS, Université Paris-Saclay, 9 rue Charles Fourier, 91011 Evry, France

²IMT Lille Douai, Univ. Lille, CNRS, UMR 9189 - CRIStAL, F-59000 Lille, France.

roland.lamberti@telecom-sudparis.eu, yohan.petetin@telecom-sudparis.eu
francois.desbouvries@telecom-sudparis.eu, francois.septier@telecom-lille.fr

Résumé – Le filtrage particulaire est un ensemble d’algorithmes populaires de type Monte Carlo pour l’estimation récursive d’états cachés dans des modèles de Markov cachés. Le filtrage particulaire repose sur un mécanisme de tirage et pondération de particules, puis de rééchantillonnage permettant de dupliquer les particules de poids élevés et d’éliminer les particules de poids faibles. Néanmoins, ces méthodes peuvent se révéler inefficaces dans des modèles informatifs ou de grande dimension, aussi sophistiquées soient les techniques de rééchantillonnage utilisées. Dans cette communication, plutôt que de se focaliser sur la seule étape de rééchantillonnage qui introduit de la dépendance entre les particules et une diminution de la taille du support, nous revisitons les trois étapes du mécanisme dans leur ensemble et nous montrons qu’il est possible d’obtenir des tirages conditionnellement indépendants de manière à garantir un support de taille fixe. Cette méthode de tirage nécessitant un coût de calcul supplémentaire, nous introduisons un algorithme intermédiaire entre le filtrage particulaire classique et notre technique de rééchantillonnage indépendante.

Abstract – Particle filtering techniques, also known as sequential Monte Carlo methods, are popular algorithms for recursively estimating the hidden states in hidden Markov models. These methods are based on a mechanism of drawing and weighting particles, then resampling them in order to duplicate particles with high weights and eliminate those with low weights. However, this mechanism tends to be insufficient when applied to informative or high-dimensional models whichever the resampling technique used. In this paper, rather than focusing on the resampling step which introduces mutual dependency between the particles produced and diminishes the size of the final support, we revisit all three steps of the mechanism and show that it is possible to obtain conditionally independent draws so as to prevent degeneration of the final support. Since this sampling method requires an additional computational cost, we introduce an algorithm which is a trade-off between classical particle filtering and our independent resampling method.

1 Introduction

Considérons un ensemble de variables aléatoires cachées $x_{0:t} = \{x_0, \dots, x_t\}$ ($x_t \in \mathbb{R}^x$) et un ensemble de variables aléatoires observées $y_{0:t} = \{y_0, \dots, y_t\}$ ($y_t \in \mathbb{R}^y$). Nous supposons que le processus $\{(x_t, y_t)\}_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov cachée, c’est à dire que la densité jointe de $(x_{0:t}, y_{0:t})$ s’écrit

$$p(x_{0:t}, y_{0:t}) = p(x_0) \prod_{s=1}^t f_s(x_s | x_{s-1}) \prod_{s=0}^t g_s(y_s | x_s). \quad (1)$$

Nous nous intéressons au problème de l’estimation récursive de

$$\Theta_t = \int \varphi(x_t) p(x_t | y_{0:t}) \quad (2)$$

qui intervient dans de nombreuses applications en traitement statistique du signal grâce à l’utilisation des méthodes de Monte Carlo séquentielles appelées également filtrage particulaire [1].

Le principe des méthodes de filtrage particulaire consiste à propager dans le temps une approximation discrète de $p(x_t | y_{0:t})$ caractérisée par un ensemble de N tirages pondérés, $\{(w_t^i, x_t^i)\}_{i=1}^N$; Bien que de nombreuses améliorations aient été proposées en d’autres termes, une approximation de $p(x_t | y_{0:t})$ est donnée

par $\hat{p}(x_t | y_{0:t}) = \sum_{i=1}^N w_t^i \delta_{x_t^i}$, avec $\sum_{i=1}^N w_t^i = 1$. La propagation dans le temps de cet ensemble de tirages pondérés repose sur le mécanisme d’échantillonnage d’importance avec rééchantillonnage de Rubin [2], composé de trois étapes fondamentales. Partant de $\{(w_{t-1}^i, x_{t-1}^i)\}_{i=1}^N$, la première étape consiste à étendre chaque trajectoire en réalisant des tirages ($S.$ = sampling) à partir d’une loi d’importance $q(x_t | x_{0:t-1}^i)$ dépendant éventuellement de y_t ; la deuxième étape consiste à pondérer ($W.$ = weighting) chaque nouveau tirage de manière à prendre en compte l’écart entre la loi cible et la loi d’importance; enfin la troisième étape consiste à introduire une étape de rééchantillonnage ($R.$ = resampling) visant à éliminer les particules de poids faibles et dupliquer les particules de poids élevés. L’intérêt principal de cette dernière étape est de lutter contre le phénomène de dégénérescence des poids dont l’échantillonnage d’importance séquentiel souffre, en recréant de la diversité pour les étapes temporelles ultérieures. Une étape complète de l’algorithme de filtrage particulaire avec rééchantillonnage multinomial est présentée à l’Algorithme 1.

Algorithme 1 Filtrage Particulaire

Entrées : $q(x_t|x_{0:t-1})$, y_t , $\{w_{t-1}^i, x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$
Sorties : $\{w_t^i, x_{0:t}^i\}_{i=1}^N$
pour $1 \leq i \leq N$ **faire**
S. $\tilde{x}_t^i \sim q(x_t|x_{0:t-1}^i)$;
W. $w_t^i \propto w_{t-1}^i \frac{f_t(\tilde{x}_t^i|x_{t-1}^i)g_t(y_t|\tilde{x}_t^i)}{q(\tilde{x}_t^i|x_{t-1}^i)}$, $\sum_{i=1}^N w_t^i = 1$;
fin pour
si Rééchantillonnage **alors**
pour $1 \leq i \leq N$ **faire**
R. $l^i \sim \Pr(L = l | \{x_{0:t-1}^j, \tilde{x}_t^j\}_{j=1}^N) = w_t^l$
 Poser $x_{0:t}^i = (x_{0:t-1}^i, \tilde{x}_t^i)$, $w_t^i = \frac{1}{N}$;
fin pour
sinon
 Poser $\{x_t^i\}_{i=1}^N = \{\tilde{x}_t^i\}_{i=1}^N$.
fin si

(choix de la loi d'importance, Rao-Blackwellisation, techniques alternatives de rééchantillonnage), l'utilisation de ce mécanisme reste encore inefficace pour des modèles informatiques pour lesquels la vraisemblance est très concentrée (c'est-à-dire $g_t(y_t|x_t)$ est très petite pour la plupart des valeurs de x_t).

Commençons par expliciter brièvement l'idée du rééchantillonnage multinomial classique (étape R. de l'Algorithme 1). Cette étape consiste à tirer, avec remise, N points parmi les N particules obtenues à l'étape S. En d'autres termes, le mécanisme de Rubin produit conditionnellement aux trajectoires de l'instant $t-1$, $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$, un jeu de particules *dépendantes* x_t^i identiquement distribuées suivant une loi de densité $\tilde{q}_t^N(x)$. Un moyen d'introduire une diversité plus grande consisterait à introduire dans chacune de ces étapes de rééchantillonnage une étape de tirage partielle, de façon à modifier progressivement le support de départ utilisé pour l'étape R., sans pour autant changer la loi conditionnelle à $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$ de chaque tirage final; le degré de diversité introduit serait alors fonction du nombre de retirages supplémentaires.

Dans cette contribution, nous rappelons qu'un jeu de points tirés indépendamment suivant la loi $\tilde{q}_t^N(x)$ assure que les particules finales (après R.) sont toutes différentes, contrairement au mécanisme actuel, puis nous proposons une méthode de tirage pour obtenir des points indépendants tirés suivant $\tilde{q}_t^N(x)$. Cette méthode de tirage reposant sur le tirage intermédiaire de N^2 particules, nous proposons une solution intermédiaire appelée rééchantillonnage semi-indépendant qui introduit un paramètre k variant entre 0 (auquel cas notre algorithme coïncide avec le filtrage particulaire classique) et N (auquel cas notre algorithme coïncide avec le rééchantillonnage indépendant).

2 Rééchantillonnage indépendant et semi-indépendant

2.1 Rééchantillonnage indépendant

L'algorithme 1 permet de déduire deux estimateurs de Θ_t en (2), un avant rééchantillonnage ($\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$) et l'autre après ré-

échantillonnage ($\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$) :

$$\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N} = \sum_{i=1}^N w_t^i \varphi(\tilde{x}_t^i) \text{ et } \hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_t^i). \quad (3)$$

Il est bien connu que l'estimateur $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$ (SIS = Sequential Importance Sampling) est préférable à $\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$ (SIR = Sampling Importance Resampling) par Rao-Blackwellisation : conditionnellement à $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$, la variance de $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$ est plus faible que celle de $\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$ [3].

Par ailleurs, nous pouvons montrer que l'Algorithme 1 produit, conditionnellement à $\{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$, un jeu de particules identiquement distribuées suivant \tilde{q}_t^N où

$$\tilde{q}_t^N(x) = \sum_{i=1}^N h_t^i(x) q_t^i(x), \quad (4)$$

$$h_t^i(x) = \int \int \frac{\frac{p_t^i(x)}{q_t^i(x)}}{\frac{p_t^i(x)}{q_t^i(x)} + \sum_{l \neq i} \frac{p_t^l(x^l)}{q_t^l(x^l)}} \prod_{l \neq i} q_t^l(x^l) dx^l, \quad (5)$$

avec $p_t^i(x) = w_{t-1}^i f_t(x|x_{t-1}^i) g_t(y_t|x)$ et $q_t^i(x) = q(x|x_{t-1}^i)$. Supposons maintenant qu'il soit possible d'obtenir des tirages indépendants suivant la loi continue $\tilde{q}_t^N(x)$. Cela signifierait que la loi marginale de chaque particule resterait inchangée par rapport au rééchantillonnage classique mais que le support final ne serait pas dégénéré. Par ailleurs, considérons l'estimateur issu de tirages indépendants $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(x_t^i)$ (I-SIR = Independent Sampling Importance Resampling). On montre alors que les trois estimateurs $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$, $\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$ et $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$ ont la même espérance conditionnelle mais que

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N} | \{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N) &= \text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N} | \{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N) \\ &+ \frac{N-1}{N} \text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N} | \{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N); \end{aligned} \quad (6)$$

l'estimateur $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$ est donc préférable à l'estimateur $\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}$. La comparaison entre l'estimateur $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$ et l'estimateur $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$ n'est pas abordée dans cet article pour des raisons de place. Nous précisons cependant que dans le cas statique (une seule itération du mécanisme de Rubin), la variance asymptotique de l'estimateur $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}$ est indépendante de la loi d'importance q utilisée, contrairement à l'estimateur $\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N}$.

Il reste à obtenir des tirages indépendants et identiquement distribués suivant $\tilde{q}_t^N(x)$; l'Algorithme 2 permet d'obtenir ces N tirages et est basé sur N^2 tirages intermédiaires permettant de contourner la difficulté de tirer directement suivant $\tilde{q}_t^N(x)$.

Notons enfin que dans ce cas, il est possible de voir les trois étapes (S., W., R.) comme une unique étape de tirage i.i.d. suivant $\tilde{q}_t^N(x)$ qui peut également être vu comme un mélange d'importance $\tilde{q}_t^N(x) = \sum_{i=1}^N \int h_t^i(x) q_t^i(x) \times \frac{h_t^i(x) q_t^i(x)}{\int h_t^i(x) q_t^i(x)}$. Dès lors, en nous plaçant dans le contexte du filtrage particulaire auxiliaire [4, 5], il est possible de repondérer les tirages finaux $\{x_t^i\}_{i=1}^N$ et nous obtenons alors un nouvel estimateur $\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR-w},N} = \sum_{i=1}^N w_t^i \varphi(x_t^i)$ (I-SIR-w = I-SIR weighted), avec

$$w_t^i \propto \frac{w_{t-1}^i f_t(x_t^i|x_{t-1}^i) g_t(y_t|x_t^i)}{h_t^i(x_t^i) q_t^i(x_t^i)}, \quad \sum_{i=1}^N w_t^i = 1.$$

Algorithme 2 Filtrage particulière avec rééchantillonnage indépendant

Entrées : $q(x_t|x_{0:t-1})$, y_t , $\{w_{t-1}^i, x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$
Sorties : $\{w_t^i, x_{0:t}^i\}_{i=1}^N$
pour $1 \leq i \leq N$ **faire**
 pour $1 \leq j \leq N$ **faire**
 S. $\tilde{x}_t^{i,j} \sim q(x_t|x_{0:t-1}^j)$;
 W. $w_t^{i,j} \propto \frac{w_{t-1}^{i,j} f_t(\tilde{x}_t^{i,j}|x_{0:t-1}^j) g_t(y_t|\tilde{x}_t^{i,j})}{q(\tilde{x}_t^{i,j}|x_{0:t-1}^j)}$, $\sum_{j=1}^N w_t^{i,j} = 1$;
 fin pour
 R. $l^i \sim \Pr(L = l | \{x_{0:t-1}^j, \tilde{x}_t^{i,j}\}_{j=1}^N) = w_t^{i,l}$;
 Poser $x_{0:t}^i = (x_{0:t-1}^i, \tilde{x}_t^{i,l^i})$, $w_t^i = \frac{1}{N}$.
fin pour

Bien que $h_t^l(x)$ ne soit pas calculable, cette quantité peut être approchée à partir des N^2 tirages générés dans l'Algorithme 2 par l'estimateur Monte Carlo suivant :

$$\hat{h}_t^l(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\frac{p_t^l(x)}{q_t^l(x)}}{\frac{p_t^l(x)}{q_t^l(x)} + \sum_{j \neq l} \frac{p_t^j(\tilde{x}_t^{i,j})}{q_t^j(\tilde{x}_t^{i,j})}}. \quad (7)$$

2.2 Rééchantillonnage semi-indépendant

Repardons de l'équation (6) dans laquelle le terme $\text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{SIS},N} | \{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N)$ coïncide avec le terme de covariance $\text{cov}(\varphi(x_t^i), \varphi(x_t^j) | \{x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N)$. Dès lors que les tirages finaux sont indépendants, ce terme de covariance est nul au prix d'un coût de calcul plus important lorsque la taille du support final est fixée. En effet, nous avons vu au paragraphe précédent que pour obtenir un nouveau tirage suivant \tilde{q}_t^N , indépendant des précédents, nous avons besoin de tirer N nouvelles particules intermédiaires suivant $q(x_t|x_{0:t-1}^j)$, $1 \leq j \leq N$. L'idée du rééchantillonnage semi-indépendant est de proposer un compromis entre performance (caractérisé par la valeur du terme de covariance $\text{cov}(\varphi(x_t^i), \varphi(x_t^j))$) et coût de calcul (nombre de tirages supplémentaires par rapport au filtrage particulière classique).

Pour cela, considérons un instant t donné puis fixons-nous un paramètre $k \in \{0 \dots N\}$; plutôt que de retirer N nouvelles particules intermédiaires pour obtenir un nouveau tirage suivant \tilde{q}_t^N (comme cela est fait pour le rééchantillonnage indépendant), nous ne retirons que k particules dont la loi d'importance conditionnelle est choisie aléatoirement via un tirage uniforme sans remise parmi les N lois d'importance conditionnelles disponibles; les $N - k$ particules restantes (c'est-à-dire celles correspondant aux indices qui ne sont pas choisis durant le tirage sans remise) sont dupliquées pour compléter les k nouvelles particules. Nous obtenons alors un nouveau jeu de N particules, composé de k nouvelles particules par rapport au jeu précédent, nous permettant d'obtenir un nouveau tirage suivant \tilde{q}_t^N . L'algorithme 3 présente une itération de cette procédure de rééchantillonnage semi-indépendant pour un t donné. Notons que le cas $k = 0$ coïncide avec l'Algorithme 1 tandis que le cas $k = N$ coïncide avec l'Algorithme 2.

Algorithme 3 Etape de rééchantillonnage semi-indépendant

Entrées : $q(x_t|x_{0:t-1})$, y_t , $\{w_{t-1}^i, x_{0:t-1}^i\}_{i=1}^N$, k et $\{w_t^i, \tilde{x}_t^i\}_{i=1}^N$ le résultat des étapes S. et W. d'un filtre particulière classique
Sorties : $\{w_t^i, x_{0:t}^i\}_{i=1}^N$
pour $1 \leq i \leq N$ **faire**
 R. $l^i \sim \Pr(L = l | \{x_{0:t-1}^j, \tilde{x}_t^j\}_{j=1}^N) = w_t^l$; $x_t^i = \tilde{x}_t^{l^i}$.
Retirage et pondération :
 si ($i < N$) **alors**
 pour $1 \leq j \leq k$ **faire**
 $m^j \sim \Pr(M = n | n \in 1:N \setminus \{m^{1:j-1}\}) = \frac{1}{N-j+1}$;
 Remplacer $\tilde{x}_t^{m^j} \sim q(x_t|x_{0:t-1}^{m^j})$;
 $\bar{w}_t^{m^j} = w_{t-1}^{m^j} \frac{f_t(\tilde{x}_t^{m^j}|x_{0:t-1}^{m^j}) g_t(y_t|\tilde{x}_t^{m^j})}{q(\tilde{x}_t^{m^j}|x_{0:t-1}^{m^j})}$;
 fin pour
 $w_t^{1:N} \propto \bar{w}_t^{1:N}$, $\sum_{j=1}^N w_t^j = 1$;
 fin si
fin pour
 Poser $x_{0:t}^i = (x_{0:t-1}^i, x_t^i)$, $w_t^i = \frac{1}{N}$.

L'estimateur $\hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_t^i)$ (SR = semi-resampling) déduit de l'Algorithme 3 vérifie les propriétés suivantes qui ne sont pas démontrées pour des raisons d'espace (les espérances et variances sont conditionnelles au jeu de points précédent), $\forall k \in \{1 \dots N\}$:

$$\mathbb{E}(\hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}) = \mathbb{E}(\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}) = \mathbb{E}(\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}), \quad (8)$$

$$\text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N}) \leq \text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}) \leq \text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N}), \quad (9)$$

$$\text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k}) \leq \text{var}(\hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,k-1}). \quad (10)$$

Ce résultat exprime le fait que l'estimateur obtenu après semi-rééchantillonnage indépendant est d'autant plus performant que le nombre de tirages intermédiaires k augmente et que cet estimateur est un intermédiaire entre l'estimateur issu du rééchantillonnage indépendant ($\hat{\Theta}_t^{\text{I-SIR},N} = \hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,N}$) et celui issu du rééchantillonnage classique ($\hat{\Theta}_t^{\text{SIR},N} = \hat{\Theta}_t^{\text{SR},N,0}$) en termes de performances et de coût de calcul.

3 Simulations

Nous considérons un problème de suivi d'objet à partir de mesures en coordonnées polaires (distance et angle). Le vecteur d'état caché contient les positions et vitesses de l'objet en coordonnées cartésiennes, $x_t = [c_{x,t}, \dot{c}_{x,t}, c_{y,t}, \dot{c}_{y,t}]^T$. Les lois du modèle (1) s'écrivent $f_t(x_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t; \mathbf{F}x_{t-1}; \mathbf{Q})$,

$$g_t(y_t|x_t) = \mathcal{N}(y_t; \left(\begin{array}{c} \sqrt{c_{x,t}^2 + c_{y,t}^2} \\ \arctan \frac{c_{y,t}}{c_{x,t}} \end{array} \right); \mathbf{R}), \text{ avec}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \sigma_Q^2 \begin{pmatrix} \frac{\tau^3}{3} & \frac{\tau^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\tau^2}{2} & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau^3}{3} & \frac{\tau^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\tau^2}{2} & \tau \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_\rho^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{pmatrix}, \tau = 1.$$

La loi d'importance utilisée est $q(x_t|x_{0:t-1}) = f_t(x_t|x_{t-1})$ et le critère de performance utilisé pour comparer les différents algorithmes est la racine carrée de l'erreur quadratique moyennée sur le temps et sur 1000 réalisations.

Plusieurs algorithmes sont comparés. L'algorithme de filtrage particulière avec rééchantillonnage indépendant (Algorithme 2) avec un support final de taille $N = 100$; l'algorithme de semi-rééchantillonnage (Algorithme 3) avec un support final de taille $N = 100$ et un nombre de tirages intermédiaires $k = N/2$ (une étude qui n'apparaît pas ici pour des raisons d'espace nous montre que des valeurs supérieures de k n'améliorent que très peu les performances de l'estimateur associé); un algorithme de filtrage particulière basique (Algorithme 1) avec $N + \frac{(N-1)k}{2}$ particules de manière à assurer un coût de calcul égal à l'algorithme précédent; un algorithme de filtrage particulière avec resample-move qui rajoute une étape MCMC après l'étape de rééchantillonnage [6] avec N tirages et k itérations MCMC pour chaque tirage, de manière à avoir un coût global de $(2N + Nk)$ tirages comme les autres algorithmes.

Les résultats sont présentés sur la Fig. 1. Nous constatons que les algorithmes présentés dans ce papier sont les plus performants dans le cas des modèles informatifs, modèles pour lesquels les algorithmes basiques sont inefficaces. Lorsque le bruit d'observation augmente, les différents algorithmes donnent des performances similaires. Notons que l'écart entre l'algorithme avec rééchantillonnage semi-indépendant et celui avec rééchantillonnage indépendant reste faible malgré une différence non-négligeable de coût en tirages intermédiaires (étant donné que l'on a choisi le paramètre $k = \frac{N}{2}$, le rééchantillonnage semi-indépendant utilise $\frac{N^2-N}{2}$ tirages intermédiaires de moins que l'indépendant). D'autre part, l'algorithme indépendant avec pondération finale a une meilleure performance que l'algorithme indépendant sans pondération lorsque le modèle n'est pas trop informatif; lorsque le modèle est très informatif les poids approchés en (7) ont tendance à dégénérer. L'algorithme de rééchantillonnage indépendant sans pondération devient alors la meilleure solution en pratique.

4 Conclusion

Dans cette communication nous avons revisité le mécanisme de Rubin, au coeur des techniques de filtrage particulière, pour le rendre plus robuste dans des modèles dans lesquels il est insuffisant. Nous avons dans un premier temps introduit une technique de rééchantillonnage indépendant qui permet d'obtenir des tirages indépendants suivant une densité de probabilité identique à celle obtenue par le mécanisme d'échantillonnage d'importance avec rééchantillonnage multinomial; il est possible d'interpréter cette densité comme un mélange d'importance, ce qui permet alors de repondérer les particules finales. Afin de réduire le coût de calcul induit par les tirages Monte Carlo, nous avons également proposé une solution intermédiaire appelée filtrage particulière avec rééchantillonnage semi-indépendant, laquelle fait intervenir un paramètre k mo-

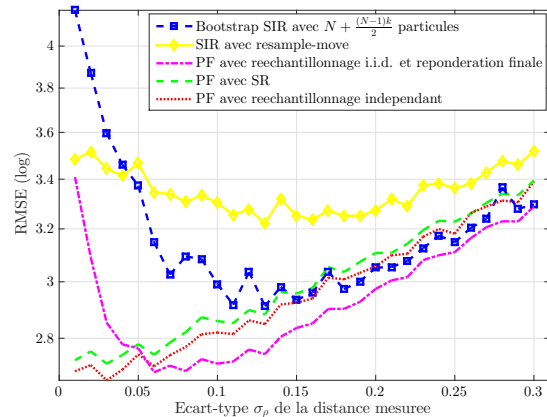


FIGURE 1 – Modèle de poursuite, $\sigma_Q = \sqrt{10}$, $\sigma_\rho \in [0.01, 0.3]$, $\sigma_\theta \in [\frac{\pi}{18000}, \frac{\pi}{600}]$ respectivement, $N = 100$ particules finales pour tous les algorithmes (sauf le SIR à coût variable, qui est à $N + \frac{(N-1)k}{2}$ particules finales). Le RMSE est en fonction de l'écart-type de la distance mesurée, σ_ρ (l'écart-type de l'angle mesuré varie alors également, de manière proportionnelle).

délisant le nombre de tirages intermédiaires effectués avant d'obtenir une nouvelle particule rééchantillonnée. La variance de l'estimateur obtenu à partir de ces tirages semi-indépendants (au sens où nous réduisons le terme de covariance entre deux tirages) diminue lorsque k augmente. Nos simulations ont enfin montré l'utilité de ces algorithmes dans des modèles informatifs dans lesquels les techniques de filtrage particulière souffrent de dégénérescence du support.

Références

- [1] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Statistics for Engineering and Information Science, Springer-Verlag, 2001.
- [2] D. B. Rubin, "Using the SIR algorithm to simulate posterior distributions," in *Bayesian Statistics III*, Oxford University Press, 1988.
- [3] O. Cappé, É. Moulines, and T. Rydén, *Inference in Hidden Markov Models*. Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 2005.
- [4] M. K. Pitt and N. Shephard, "Filtering via simulation : Auxiliary particle filter," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 94, pp. 590–99, 1999.
- [5] N. Whiteley and A. M. Johansen, "Recent developments in Auxiliary Particle Filtering," in *Inference and Learning in Dynamic Models*, Cambridge University Press, 2010.
- [6] A. Doucet and A. M. Johansen, "A tutorial on Particle Filtering and Smoothing : fifteen years later," in *The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering*, Oxford University Press, 2011.