

Reconstruction tomographique 2D : une nouvelle méthode de rétro-projection filtrée

Aymeric RESHEF^{1,2}, Cyril RIDDELL¹, Yves TROUSSET¹, Saïd LADJAL², Isabelle BLOCH²

¹GE Healthcare

283 rue de la Minière, 78530 Buc, France

²LTCI, Télécom ParisTech

46 rue Barrault, 75013 Paris, France

aymeric.reshef@{ge.com, telecom-paristech.fr},

cyril.riddell@ge.com, yves.trousset@ge.com,

said.ladjal@telecom-paristech.fr, isabelle.bloch@telecom-paristech.fr

Résumé – En reconstruction tomographique 2D, le terme de « rétro-projection filtrée » est ambigu, car les projections sont d’abord filtrées puis rétro-projetées dans le plan image. Si l’inversion des opérations est possible mathématiquement, elle n’est jamais appliquée en pratique. Cet article présente un moyen de calculer la rétro-projection filtrée avec la même précision numérique quel que soit l’ordre des opérations. Une illustration dans le cadre de la reconstruction de régions d’intérêt démontre la versatilité de la méthode.

Abstract – In 2D tomographic reconstruction, filtered backprojection is an ambiguous denomination, as the standard scheme consists in filtering the projections then backprojecting them in the image space. Although it is mathematically equivalent to swap the steps, it is never applied in the other way in practice. This article proposes an implementation of the filtered backprojection method such that any ordering of those steps leads to the exact numerical reconstruction. An example in the context of region-of-interest reconstruction demonstrates the versatility of the method.

1 Introduction

Le problème classique de tomographie bidimensionnelle possède une solution analytique appelée *rétro-projection filtrée*. Ce terme est toutefois ambigu, en ce sens qu’il correspond au filtrage des projections, suivi d’une opération de rétro-projection. Si l’inversion des opérations est correcte mathématiquement, le résultat n’est plus équivalent au précédent cas lorsqu’on discrétise le problème.

On propose dans cet article une méthode de résolution de la rétro-projection filtrée, permettant d’obtenir la même précision numérique quel que soit l’ordre des opérations.

Le problème est remis en évidence dans la partie 2. La nouvelle méthode est présentée dans la partie 3 où les liens avec certains concepts de la littérature sont explicités. En particulier, la méthode est adaptée à l’approche par rétro-projection différenciée. La méthode est illustrée par deux exemples dans la partie 4, avec un cas de reconstruction de données tronquées.

2 Position du problème

On considère un objet bidimensionnel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ observé à travers ses projections p_θ dans une direction $\theta = (\cos \theta, \sin \theta)^\top$. Autrement dit, p_θ est la transformée de Radon de f dans la di-

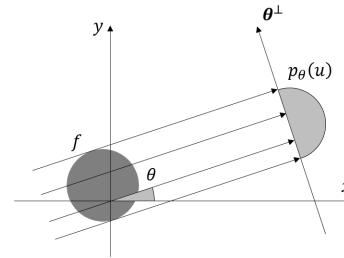


FIGURE 1 – Géométrie d’acquisition. Les intégrales de l’objet le long de lignes parallèles sont mesurées sur un détecteur orthogonal aux rayons.

rection θ (fig. 1) :

$$p_\theta(u) = (R_\theta f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t\theta + u\theta^\perp) dt, \quad (1)$$

où $\theta^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)^\top$. Lorsque Θ décrit un secteur angulaire, on notera R_Θ l’opérateur de projection associé ; p_Θ décrit alors la collection de projections $\{p_\theta\}_{\theta \in \Theta}$. L’adjoint de l’opérateur de projection R_Θ^* est l’opérateur de rétro-projection.

On note D_θ , le filtre rampe monodimensionnel dans la direction θ^\perp ; on rappelle que le filtrage par la rampe correspond à une multiplication par la norme euclidienne dans le domaine de Fourier. Comme précédemment, on notera D_Θ la collection de filtres rampes dans les directions $\theta \in \Theta$.

Lorsque $\Theta = [0, \pi]$ (on n'écrit pas les indices par souci de clarté), le théorème de coupe-projection permet de reconstruire f à partir de ses projections du secteur angulaire Θ via la formule de rétro-projection filtrée [1] : $f = R^* D p$. Le filtrage par filtre rampe est réalisé dans le domaine de Fourier, en extrapolant les projections par zéro et en rendant le signal périodique. Lorsque Θ décrit un secteur angulaire plus petit que $[0, \pi]$, l'application de la formule précédente produit une image $f_\Theta = R_\Theta^* D_\Theta p_\Theta$ correspondant à l'image f , masquée dans le domaine de Fourier par

$$\chi_\Theta(\rho \theta^\perp) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in \Theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2)$$

Enfin, on rappelle que si $\{\Theta_k\}_{k=1, \dots, K}$ forme une partition de $[0, \pi]$, alors par linéarité $f = \sum_{k=1}^K f_{\Theta_k}$.

Mathématiquement, il est strictement équivalent de rétro-projeter d'abord les projections, puis d'appliquer un filtre rampe bidimensionnel [1] ; on note D_{xy} un tel filtre et l'on a alors

$$f = D_{xy} R^* p \quad \text{et} \quad f_\Theta = D_{xy} R_\Theta^* p_\Theta. \quad (3)$$

L'application du filtre après rétro-projection n'est pas privilégiée dans la littérature, car la transformée de Fourier 2D suppose de connaître $R^* p$ sur tout son support, et ce support est infini, de surcroît avec une décroissance lente du signal vers zéro à l'infini.

3 Une nouvelle rétro-projection filtrée

3.1 Reconstruction partielle

On considère un secteur angulaire Θ inclus dans $[0, \pi]$ et l'on suppose qu'il existe un angle $\alpha \in [0, \pi]$ tel que pour tout $\theta \in \Theta$, $\alpha \cdot \theta = \cos(\alpha - \theta) \neq 0$. Un calcul détaillé en Annexe A montre qu'il est possible de remplacer le filtrage bidimensionnel de $R_\Theta^* p_\Theta$ par un filtrage monodimensionnel dans la direction α^\perp ; dans ce cas, il est nécessaire de pondérer les projections *avant* la rétro-projection, et l'on a

$$f_\Theta = D_\alpha R_\Theta^* p_\Theta^{(\alpha)}, \quad \text{où} \quad p_\theta^{(\alpha)} = |\alpha \cdot \theta|^{-1} \cdot p_\theta. \quad (4)$$

L'intérêt de ce résultat est visible sur la fig. 2. En effet, si l'objet à reconstruire est à support compact, les lignes intersectant le support de l'objet dans la direction α^\perp sont toutes à support compact : ainsi, il est possible de définir une grille de reconstruction telle que toutes ces lignes sont intégralement reconstruites, de sorte que le filtrage dans le domaine de Fourier est maintenant possible numériquement.

3.2 Reconstruction sur le demi-cercle

Pour reconstruire l'objet f à partir de ses projections couvrant le demi-cercle $[0, \pi]$, il suffit donc de partitionner $[0, \pi]$ en K secteurs angulaires $\Theta_1, \dots, \Theta_K$, puis de reconstruire chaque f_{Θ_k} suivant l'équation (5) avec un α_k idoine. Par linéarité, on obtient $f = \sum_{k=1}^K f_{\Theta_k}$. En pratique, il est souhaitable que les directions de filtrage soient alignées avec la grille de

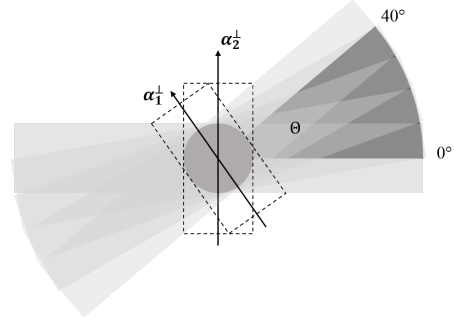


FIGURE 2 – Exemple de reconstruction partielle. Les projections du secteur angulaire $[0^\circ, 40^\circ]$ sont pondérées puis rétro-projetées. Deux directions de filtrage α_1^\perp et α_2^\perp sont dessinées. Dans ces directions, les lignes intersectant le support de l'image (disque gris) sont toutes à support compact, incluses dans les rectangles dessinés en pointillés.

reconstruction, et que les grilles de reconstruction pour chaque Θ_k soient de taille équivalente. Un choix possible est d'utiliser la configuration suivante :

$$\begin{cases} \Theta_1 = [0, \frac{\pi}{4}] & , \quad \alpha_1 = 0, \\ \Theta_2 = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] & , \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \\ \Theta_3 = [\frac{3\pi}{4}, \pi] & , \quad \alpha_3 = \pi. \end{cases} \quad (5)$$

Les directions de filtrage pour Θ_1 et Θ_3 sont les mêmes au signe près, il est donc possible de rétro-projeter ces deux secteurs angulaires ensemble en appliquant le changement de signe à p_{Θ_3} . Qu'il s'agisse des vues latérales ($\Theta_1 \cup \Theta_3$) ou frontales (Θ_2), le support nécessaire pour reconstruire toutes les lignes d'intérêt a la même aire : il s'agit d'un rectangle dont un côté est le diamètre du disque de reconstruction, et l'autre a pour dimension ce même diamètre dilaté d'un facteur $(1 + \sqrt{2})$.

3.3 Lien avec la rectification

L'approche proposée s'interprète également dans le cadre de la géométrie parallèle rectifiée [2, 3]. Rectifier une projection p_θ revient à rétro-projeter p_θ sur un axe prédéfini ; en l'occurrence, p_θ est rétro-projeté sur l'axe $x = 0$ si $\theta \in \Theta_1 \cup \Theta_3$, et sur l'axe $y = 0$ si $\theta \in \Theta_2$. La projection rectifiée s'écrit donc

$$R p_\theta(u) = p_\theta(\lambda u), \quad (6)$$

avec $\lambda = \cos \theta$ ou $\lambda = \sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$. La rectification est essentiellement une étape de ré-alignement des projections selon une direction α_λ^\perp , avec $\alpha_\lambda = 0$ ou $\alpha_\lambda = \frac{\pi}{2}$. L'opération de rétro-projection se résume alors simplement à des copies des projections rectifiées, traduites le long des lignes ou des colonnes de l'image. La translation ne modifie pas l'application du filtre rampe ; en revanche, l'application du facteur d'échelle λ a une influence sur le filtrage, et on peut montrer que

$$D_{\alpha_\lambda}(R p_\theta)(u) = |\lambda| D_\theta p_\theta(\lambda u) = |\lambda| R(D_\theta p_\theta)(u). \quad (7)$$

L'équation (8) montre que la rétro-projection (la rectification) d'une projection filtrée est égale au filtrage *suivant un axe* de la rétro-projection (la rectification) de cette même projection, pondérée par $|\lambda|^{-1}$: il s'agit donc d'un cas spécifique de (5).

3.4 Lien avec la rétro-projection différenciée

Il existe une formule d'inversion directe alternative à la rétro-projection filtrée standard, et qui applique également un filtre monodimensionnel selon une direction fixe dans l'espace bidimensionnel [4]. Cette formule s'appuie sur la décomposition du filtre rampe $D_\theta = (2\pi)^{-1} H_\theta \partial_\theta$, où ∂_θ est un opérateur local (la dérivée monodimensionnelle dans la direction θ^\perp) et H_θ est la transformée de Hilbert monodimensionnelle dans la direction θ^\perp . On peut montrer [4] que lorsque $\Theta = [0, \pi]$

$$R^* \partial p = -2\pi H_{\frac{\pi}{2}} f. \quad (8)$$

Partant de l'équation (9), il suffit d'inverser la transformée de Hilbert sur chaque ligne de la rétro-projection différenciée $R^* \partial p$ pour reconstruire l'objet f . Or le support des lignes d'une telle rétro-projection est *infini* : en pratique, la rétro-projection différenciée étant calculée sur une grille finie, il est impossible d'inverser numériquement la ligne de Hilbert via une transformée de Fourier. Dans le cas où f est garanti d'être à support compact, il est possible d'utiliser d'autres formules d'inversion appelées transformées de Hilbert inverses finies [4, 5].

Suivant le raisonnement utilisé pour la nouvelle méthode de rétro-projection filtrée, on peut également montrer que

$$R_{\Theta}^* \partial_{\Theta} p_{\Theta} = -2\pi H_{\alpha} f_{\Theta}, \quad (9)$$

avec α défini comme dans l'équation (5). Les lignes dans la direction α^\perp sont à support compact, le filtrage de Hilbert par transformée de Fourier est alors immédiat : il s'agit simplement d'un changement de signe dans un demi-plan de Fourier. Comme précédemment, il est maintenant possible de reconstruire deux images, l'une correspondant aux vues frontales, l'autre aux vues latérales, de les filtrer dans deux directions différentes à l'aide de la transformée de Fourier, puis de sommer les résultats.¹

4 Résultats

4.1 Acquisition bien échantillonnée

On simule des projections analytiques de disques et on échantillonne $[0, \pi]$ uniformément avec 300 positions angulaires. Une image est alors reconstruite en utilisant la rétro-projection proposée ici et est comparée à la rétro-projection filtrée standard. Les deux images intermédiaires (nécessitant un support plus large dans une direction) sont présentées fig. 3(a) et 3(b). La somme de ces deux images dans le support central (carré pointillé) donne l'image présentée fig. 3(c). Elle est visuellement identique à la reconstruction par rétro-projection filtrée standard de la fig. 3(d). L'image de différence de la fig. 3(e) confirme que les erreurs dans le disque de reconstruction ne sont due qu'aux interpolations.

1. Un calcul différent est proposé dans [4] : $R_{\Theta}^* \partial_{\Theta} p_{\Theta} = \pi(H_{\theta_2} f - H_{\theta_1} f)$, où $\Theta = [\theta_1, \theta_2]$. En comparaison, la formule (10) semble plus facile à exploiter en pratique.

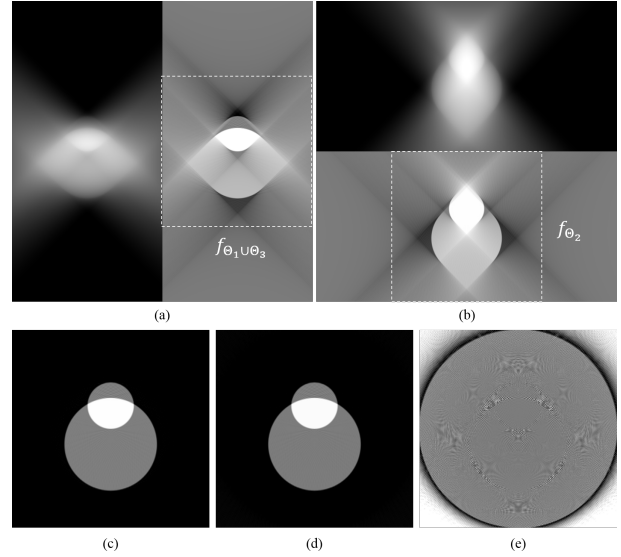


FIGURE 3 – Comparaison de la nouvelle rétro-projection filtrée à la rétro-projection filtrée standard. (a) Rétro-projection des projections latérales pondérées (gauche) et image obtenue après filtrage des colonnes (droite). (b) Rétro-projection des projections frontales pondérées (haut) et image obtenue après filtrage des lignes (bas). (c) Somme des reconstructions précédentes dans le support central dessiné en pointillé. (d) Reconstruction par rétro-projection filtrée standard. (e) Image de différence entre (c) et (d).

4.2 Reconstruction d'une région d'intérêt

On se place dans le cas d'une acquisition tronquée densément échantillonnée angulairement (360 projections), et d'une acquisition non tronquée, mais mal échantillonnée (24 projections). On utilise cette fois-ci la rétro-projection différenciée des deux acquisitions et l'on remplace le centre de la rétro-projection différenciée de l'acquisition mal échantillonnée par celui de l'acquisition tronquée (on rappelle que la troncature n'a aucun effet sur la rétro-projection différenciée au centre). A nouveau, en séparant les secteurs angulaires, un filtrage de Hilbert dans le domaine de Fourier reconstruit l'image.

L'image de référence est la fig. 4(a). Elle a été reprojétée pour générer l'acquisition non tronquée, mal échantillonnée et l'acquisition tronquée bien échantillonnée (dont les rétro-projections filtrées standards sont montrées fig. 4(b) et 4(c) et présentent des artefacts de sous-échantillonnage angulaire ou de troncature). Les lignes de la rétro-projections différenciée ont également été inversées par la formule d'inversion finie proposée dans [5]. L'image reconstruite fig. 4(d) présente des artefacts en lignes dans la région d'intérêt. L'image reconstruite à partir des deux acquisitions via la nouvelle rétro-projection différenciée, présentée fig. 4(e), est qualitativement très proche de l'image de référence dans sa région d'intérêt.

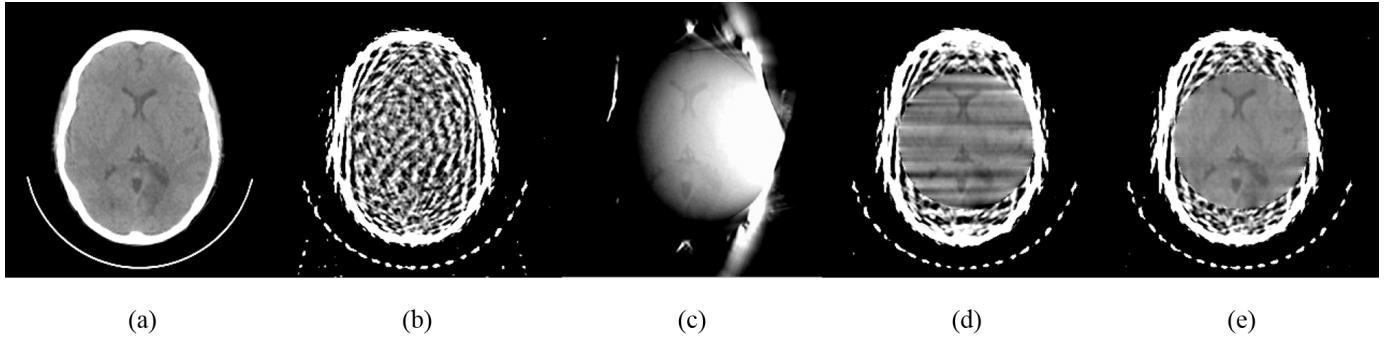


FIGURE 4 – Reconstruction d’une région d’intérêt à partir d’une reconstruction double. (a) Image de référence (coupe scanner). (b) Rétro-projection filtrée standard de 24 projections non tronquées. (c) Rétro-projection filtrée standard de 360 projections tronquées. (d) Inversion finie des lignes de Hilbert [5]. (e) Reconstruction proposée.

5 Discussion et conclusion

Une nouvelle méthode de rétro-projection filtrée a été proposée et permet d’inverser l’ordre des opérations (filtrage et rétro-projection) tout en préservant la qualité de l’image reconstruite. Son adaptation à des schémas alternatifs comme la rétro-projection différenciée permet la reconstruction de région d’intérêt. Le résultat de la fig. 4 montre également qu’un petit a priori « fréquentiel » (au sens où quelques projections non tronquées échantillonnent grossièrement le plan de Fourier) suffit à reconstruire correctement une région d’intérêt [6]. Cette méthode offre une alternative à l’utilisation d’inversions finies de la transformée de Hilbert, qui sont sensibles à l’échantillonnage angulaire et incapables de résoudre le problème de tomographie intérieure [4].

L’intérêt d’un traitement différencié selon des secteurs angulaires pour des reconstructions directes dans l’espace de Fourier est également mentionné dans [7], dans un contexte différent. La rétro-projection y est remplacée par le concept de transformée de Fourier fractionnaire. L’observation que la rétro-projection de données rectifiées se ramène à des translations, calculables dans l’espace de Fourier, brouille également les distinctions entre rétro-projection des projections filtrées, filtrage de la rétro-projection, et inversion directe dans l’espace de Fourier lorsque les données sont rectifiées.

A Annexe : preuve de l’équation (5)

Pour prouver l’équation (5), on écrit :

$$R_{\Theta}^* p_{\Theta}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \int_{\Theta} |\alpha \cdot \boldsymbol{\theta}|^{-1} \cdot p_{\theta}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^{\perp}) d\boldsymbol{\theta}.$$

Le théorème de coupe-projection $\mathcal{F}_1 p_{\theta}(\rho) = \mathcal{F}_2 f(\rho \boldsymbol{\theta}^{\perp})$, où \mathcal{F}_n est la transformée de Fourier nD , donne

$$p_{\theta}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^{\perp}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_2 f(\rho \boldsymbol{\theta}^{\perp}) e^{2i\pi \rho \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^{\perp}} d\rho.$$

Du changement de variables $\boldsymbol{\nu} = \rho \boldsymbol{\theta}^{\perp}$ résulte

$$\begin{aligned} R_{\Theta}^* p_{\Theta}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\perp}|^{-1} \mathcal{F}_2 f(\boldsymbol{\nu}) \chi_{\Theta}(\boldsymbol{\nu}) e^{2i\pi \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu}} d\boldsymbol{\nu} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\perp}|^{-1} \mathcal{F}_2 f_{\Theta}(\boldsymbol{\nu}) e^{2i\pi \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu}} d\boldsymbol{\nu}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$D_{\alpha} R_{\Theta}^* p_{\Theta}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_2 f_{\Theta}(\boldsymbol{\nu}) e^{2i\pi \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu}} d\boldsymbol{\nu} = f_{\Theta}(\mathbf{x}). \quad \square$$

Références

- [1] J. HSIEH, *Computed tomography : principles, design, artifacts, and recent advances*, vol. 114. SPIE press, 2003.
- [2] C. RIDDELL et S. L. BACHARACH, « Variable scale reprojection for iterative reconstruction : Application to PET reconstruction with OSEM », in *IEEE Nuclear Science Symposium*, vol. 3, p. 1647–1651, IEEE, 1999.
- [3] C. RIDDELL et Y. TROUSSET, « Rectification for cone-beam projection and backprojection », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 25, no. 7, p. 950–962, 2006.
- [4] F. NOO, R. CLACKDOYLE et J. D. PACK, « A two-step Hilbert transform method for 2D image reconstruction », *Physics in Medicine and Biology*, vol. 49, no. 17, p. 3903, 2004.
- [5] J. YOU et G. L. ZENG, « Explicit finite inverse hilbert transforms », *Inverse Problems*, vol. 22, no. 3, p. L7, 2006.
- [6] A. RESHEF, C. RIDDELL, Y. TROUSSET, S. LADJAL et I. BLOCH, « Dual-rotation C-arm cone-beam computed tomography to increase low-contrast detection », *Medical Physics*, 2017. A paraître.
- [7] G. BAL et P. MOIREAU, « Fast numerical inversion of the attenuated radon transform with full and partial measurements », *Inverse Problems*, vol. 20, no. 4, p. 1137, 2004.