

Caractérisation d'un signal passe-bande par datation de franchissements de seuils inconnus

Antoine SOULOUMIAC

CEA LIST, Laboratoire Analyse de Données et Intelligence des Systèmes
CEA Saclay, B565 PC192, 91191 Gif-Sur-Yvette, France
antoine.souloumiac@cea.fr

Résumé – L'objectif de cet article est de proposer une variante de la méthode de conversion analogique numérique par datation des instants de franchissement de seuils (CANDIFS) qui soit robuste à une incertitude sur la grille de seuils. On montre que la CANDIFS peut être appliquée en absence de TOUTE connaissance a priori des seuils : les seules mesures disponibles sont donc les temps de franchissement et les numéros des seuils franchis, c'est à dire une combinaison de variables numériques et catégorielles. En effet, sous des hypothèses assez faibles concernant le nombre de seuils, la bande passante et la durée d'observation du signal, on peut reconstruire très précisément le signal analogique à un facteur d'échelle près. Cette indétermination, bien que peu gênante dans beaucoup d'applications, peut néanmoins être levée ultérieurement grâce à la connaissance précise d'un seuil par exemple. La reconstruction, qui revient au calcul de l'intersection de deux sous-espaces, ne requiert que des opérations standards d'algèbre linéaire : décomposition QR et en valeurs singulières (SVD). La qualité de la reconstruction et sa sensibilité à la précision de la mesure des instants de franchissement de seuils est évaluée par des simulations numériques.

Abstract – This article aims at minimizing the constraints on the Level-Crossing Analog-to-Digital Conversion (LC-ADC) analog circuits, in particular the accuracy of the thresholds amplitude. The proposed variant of the LC-ADC technique is shown to be applicable even without ANY knowledge of the thresholds amplitudes: the available measurements are only the thresholds crossing moments and the crossed thresholds indices i.e. a combination of numerical and categorical data. As a matter of fact, under mild assumptions on the number of levels, the signal bandwidth and time of observation, the analog signal can be reconstructed very accurately up to a scale indetermination. This indetermination, that is harmless in many applications, can nevertheless be solved using for instance the knowledge of one threshold amplitude. The reconstruction procedure boils down to the computation of the intersection of two linear subspaces, which only involves standard matrix algorithms: QR and singular value (SVD) decompositions. The reconstruction quality and its sensitiveness to the measurement accuracy of the level crossing moments is evaluated via numerical simulations.

1 Introduction

1.1 Conversion par datation de franchissements

La conversion analogique numérique par datation des instants de franchissement de seuils (CANDIFS) consiste à mesurer les instants auxquels le signal analogique franchit une grille fixe de seuils d'amplitude, alors que, en conversion analogique numérique classique, on mesure l'amplitude d'un signal analogique sur une grille fixe (en général uniforme) d'instants d'échantillonnage. Ce renversement des rôles du temps et de l'amplitude est intéressant car il est plus simple, donc moins coûteux, de mesurer précisément un temps qu'une amplitude. Un circuit analogique de CANDIFS comporte principalement un nombre réduit de générateurs de tension (les seuils), autant de comparateurs et une horloge rapide, ce qui permet une économie de composants et de consommation [5]. Par ailleurs, le faible nombre de seuils permet d'en adapter les amplitudes à l'application : une répartition exponentielle pour couvrir une grande dynamique ou une absence de seuils au voisinage de zéro pour éviter tout échantillonnage tant que le signal n'est pas sorti du niveau du bruit (compression de données).

En revanche, l'échantillonnage inévitablement non-uniforme de la CANDIFS requiert parfois un rééchantillonnage par interpolation sur une grille temporelle uniforme [4, 5] via un algorithme comme le classique ACT [2]. Comparée à la conversion analogique numérique classique, la CANDIFS réduit donc fortement les contraintes sur le circuit analogique, au prix d'une sophistication du traitement numérique ultérieur. Il faut cependant noter que de nombreuses applications pratiques ne nécessitent pas le calcul explicite d'un jeu d'échantillons uniformément répartis temporellement. C'est le cas lorsqu'on ne cherche à extraire du signal analogique que sa puissance, son spectre ou la fraction du signal située dans une sous-bande.

Dans cet article, nous cherchons à réduire au maximum les contraintes sur le circuit analogique de CANDIFS en le rendant robuste à des incertitudes sur l'amplitude des seuils de tension auxquels on compare le signal d'intérêt. Il est en effet coûteux de disposer d'un jeu (même réduit) de tensions connues très précisément tout au long de la durée d'utilisation d'un circuit sans être affecté par la dispersion et le vieillissement des composants électroniques.

Nous supposons donc que les amplitudes des seuils sont tout simplement INCONNUES mais stables pendant des intervalles

de temps courts et explorons l'information disponible au sein des données encore accessibles : les temps de franchissement des seuils et les numéros, ou indices, des seuils franchis. On remarque que l'on utilise un jeu de données mixtes : une donnée numérique (les temps) et une donnée catégorielle (les indices de seuils).

Par ailleurs on doit, comme dans toute méthode de CAN, limiter le nombre de degrés de liberté du signal analogique : on le suppose ici passe-bande. Enfin, la technique que nous proposons ci-après, comme [1, 6], fournit d'abord le spectre du signal analogique puis, mais seulement si cela est nécessaire, calcule des échantillons du signal sur toute grille temporelle requise. Cet article décrit donc autant une méthode d'analyse spectrale que de conversion analogique-numérique.

2 Formulation du problème

2.1 Franchissement de seuils

Le signal analogique d'intérêt, noté $x(t)$, est observé sur un intervalle de temps fini noté $[0, T]$. On note M le nombre de seuils du convertisseur et $y_1, y_2, \dots, y_m, \dots, y_M$ leurs amplitudes (supposées inconnues). Sur l'intervalle de temps $[0, T]$, le signal $x(t)$ franchit un nombre K de fois ces seuils aux instants notés $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots, \tau_K$, c'est à dire que pour chaque instant τ_k il existe un seuil y_m tel que $x(\tau_k) = y_m$.

Formellement, on définit l'application μ de $\{1, 2, \dots, K\}$ dans $\{1, 2, \dots, M\}$ qui à chaque indice de temps k associe l'indice de seuil $\mu(k)$ tel que $x(\tau_k) = y_{\mu(k)}$. Si on note x le vecteur des amplitudes du signal $x(t)$ aux instants de franchissement, alors on a

$$x \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} x(\tau_1) \\ x(\tau_2) \\ \vdots \\ x(\tau_k) \\ \vdots \\ x(\tau_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{\mu(1)} \\ y_{\mu(2)} \\ \vdots \\ y_{\mu(k)} \\ \vdots \\ y_{\mu(K)} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} Cy \quad (1)$$

où C est une matrice $K \times M$ de 0 et de 1 telle que $C(k, m) = 1$ si $m = \mu(k)$ et $C(k, m) = 0$ autrement. Il n'y a qu'un seul 1 sur chaque ligne de C , ses colonnes sont donc orthogonales.

Dans la pratique, on observe le signal sur un intervalle de temps suffisamment long pour que $K > M$; C a donc plus de lignes que de colonnes et est de rang M . Si on note $\text{Span}(C)$ le sous-espace de dimension M engendré par les colonnes de C , alors l'équation (1) se lit simplement comme : $x \in \text{Span}(C)$. On remarque que C est la matrice classiquement associée à une variable catégorielle. On peut à ce stade évaluer la perte d'information due à l'ignorance des amplitudes des seuils : au lieu de connaître exactement le vecteur x on sait seulement qu'il appartient à un certain sous-espace de dimension M . D'une façon assez surprenante, cette connaissance réduite va s'avérer beaucoup plus discriminante que ce que l'on pourrait imaginer de prime abord.

2.2 Signal passe-bande

Le spectre du signal passe-bande $x(t)$ est supposé nul en dehors de la bande de fréquence $[B_1, B_2]$ avec $0 < B_1 < B_2$. Comme on observe ce signal seulement sur un intervalle de temps fini $[0, T]$ on peut le périodiser pour discrétiser son spectre. Il est clair que l'opération de périodisation comporte une multiplication par la fonction créneau $1_{[0, T]}(t)$ qui entraîne un élargissement du spectre (convolué par un sinus cardinal de largeur $1/T$). Mais cet élargissement reste négligeable si T est pris suffisamment grand, ce que nous supposons dans la suite. La bande de fréquence $[B_1, B_2]$ peut d'ailleurs être légèrement élargie pour tenir compte de ce phénomène. Si on néglige cette approximation, on peut donc écrire le signal analogique $x(t)$ comme une somme de fréquences espacées de $1/T$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{n=N} p_n \cos(2\pi f_n t) + q_n \sin(2\pi f_n t) \quad (2)$$

avec $f_n = B_1 + (n - 1)/T$ et $N = \lceil (B_2 - B_1)T \rceil$. L'écart entre fréquences consécutives peut être un peu réduit, nous le ferons dans les simulations.

Si on note $X \stackrel{def}{=} (p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N)^T$ le spectre de $x(t)$ et si on définit la matrice F de taille $K \times 2N$ par

$$F = \begin{pmatrix} \dots & \cos(2\pi f_n \tau_1) & \dots & \sin(2\pi f_n \tau_1) & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \cos(2\pi f_n \tau_k) & \dots & \sin(2\pi f_n \tau_k) & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \cos(2\pi f_n \tau_K) & \dots & \sin(2\pi f_n \tau_K) & \dots \end{pmatrix} \quad (3)$$

et si, enfin, on applique la relation (2) aux instants τ_1, \dots, τ_K , alors on obtient la relation $x = FX$.

Dans la pratique, on choisit un temps d'observation et un nombre de seuils suffisamment grands pour que $K > 2N$; F a donc plus de lignes que de colonnes et s'avère, au vu de nos simulations, de rang $2N$ (bien que parfois assez mal conditionnée). La relation $x = FX$ implique donc en particulier que le vecteur x appartient au sous-espace de dimension $2N$ engendré par les colonnes de F , ce qui s'écrit $x \in \text{Span}(F)$.

2.3 Principe de la méthode proposée

En résumé, le circuit de CANDIFS fournit, premièrement, les indices des seuils franchis $\mu(1), \mu(2), \dots, \mu(K)$ qui permettent de calculer la matrice C et, deuxièmement, les instants de franchissement de seuils $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K$ qui, associés à la connaissance de la bande $[B_1, B_2]$ et du temps d'observation T , permettent de calculer les fréquences f_n et donc la matrice F . Comme le vecteur x appartient aux deux sous-espaces $\text{Span}(C)$ et $\text{Span}(F)$ il appartient à leur intersection

$$x \in \text{Span}(C) \cap \text{Span}(F) \quad (4)$$

Bien entendu cette caractérisation du vecteur x , et donc indirectement du spectre inconnu X et des seuils inconnus y , n'a d'intérêt que si cette intersection est de dimension très faible :

nous ne traitons ici que le cas d'une intersection de dimension 1 mais le cas d'intersections de dimension 2 et plus est aussi très pertinent. Savoir que le spectre X et les amplitudes des seuils y appartiennent à un sous-espace de dimension 1 signifie qu'on les connaît à une indétermination d'échelle près.

Or l'intersection de deux sous-espaces est aisée à calculer numériquement, voir par exemple l'algorithme 12.4.3, page 604 dans [3]. Il suffit de calculer une base orthonormée de chaque sous-espace par décomposition QR de C^1 et de F

$$C = Q_C R_C \text{ et } F = Q_F R_F \quad (5)$$

puis de calculer la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice $Q_F^T Q_C = U \Sigma V^T$ de dimensions $2N \times M$. Les valeurs singulières sont égales aux cosinus des angles principaux entre les deux sous-espaces : les valeurs singulières égales à 1 et les vecteurs singuliers associés correspondent à des angles nuls, c'est à dire à l'intersection recherchée. Dans le cas particulier d'une intersection de dimension 1 seule la plus grande valeur singulière σ_1 atteint 1 alors que toutes les suivantes sont significativement inférieures à 1. Les vecteurs singuliers correspondant u_1 ou v_1 permettent de calculer une base de l'intersection $\text{Span}(C) \cap \text{Span}(F)$, et de conclure que

$$x = \alpha Q_F u_1 = \alpha Q_C v_1 \quad (6)$$

où α est le facteur d'échelle inconnu. Enfin, puisqu'on a par ailleurs $x = FX = Q_F R_F X = Cy = Q_C R_C y$, on obtient

$$X = \alpha R_F^{-1} u_1 \text{ et } y = \alpha R_C^{-1} v_1 \quad (7)$$

Cette indétermination d'échelle peut ensuite être levée grâce, par exemple, à une information a priori sur les amplitudes des seuils y que l'on connaît en général approximativement. On peut minimiser une erreur quadratique entre $\alpha R_C^{-1} v_1$ et les valeurs nominales des seuils. Pour une application métrologique il faut connaître précisément l'amplitude y_k (non nulle) d'un unique seuil et faire $\alpha = y_k / (R_C^{-1} v_1)_k$. Les contraintes sur le circuit analogique ne peuvent être réduites davantage.

2.4 Choix du temps d'observation et du nombre de seuils

Idealement, il faudrait déterminer théoriquement le temps d'observation T et le nombre de seuils M qui garantissent que l'intersection des deux sous-espaces est de dimension 1 mais cette question est difficile. Faute de résultat dans cette direction, nous donnons quelques règles empiriques simples suffisantes en pratique. La période minimale qui compose le signal $x(t)$ est $1/B_1$ et il est naturel d'observer $x(t)$ sur plusieurs périodes. Par ailleurs, il faut choisir T le plus court possible pour minimiser occupation mémoire et complexité. Nous avons constaté empiriquement que $T \approx 10/B_1$ convenait. T ainsi fixé, on règle le nombre de seuils M en fonction du rapport $\beta \stackrel{\text{def}}{=} B_2/B_1$: nous avons choisi dans les simulations $[M, \beta] = [2, 4], [4, 30], [8, 100]$ et $[10, 300]$.

1. La décomposition QR de C est triviale, ses colonnes étant déjà orthogonales R_C est diagonale.

2. Bien entendu, le calcul peut être optimisé en évitant de construire les matrices parcimonieuses C et Q_C et en n'effectuant qu'une SVD partielle.

3 Évaluation des performances par simulation numériques

3.1 Génération des données d'entrée

Le signal analogique est construit comme une somme d'un grand nombre (bien supérieur à $2N$) de sinusoides de fréquences dans $[B_1, B_2]$ et de phases dans $[0, 2\pi]$ tirées aléatoirement. On mesure la largeur de bande par le rapport $\beta = B_2/B_1$ et on pose $B_1 = 1$ Hertz sans perte de généralité. Les amplitudes des seuils sont optimisées manuellement pour couvrir la dynamique du signal avec une répartition exponentielle.

Les instants de franchissements des seuils, c'est à dire ce que mesure le circuit analogique, sont assez délicats à calculer numériquement avec efficacité puisque nous considérons jusqu'à plusieurs milliers de franchissements. Nous avons choisi de lancer en parallèle un grand nombre d'itérations de Newton

$$\tau_k(n+1) = \tau_k(n) - (x(\tau_k(n)) - y_{\mu(k)}) / x'(\tau_k(n)) \quad (8)$$

à partir d'une grille uniforme dans $[0, T]$ de points de départ puis, après quelques dizaines d'itérations, d'éliminer les doublons et les temps qui n'ont pas convergé. Cette méthode rudimentaire³ mais assez rapide en pratique fournit un ensemble $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K$ précis à environ $\delta\tau \stackrel{\text{def}}{=} 10^{-11}$ seconde près (calculs en double précision). Cette précision est ensuite dégradée numériquement entre 10^{-4} et 10^{-7} seconde pour prendre en compte la résolution temporelle limitée de l'horloge.

On utilise la valeur exacte du seuil maximal pour lever l'indétermination d'échelle. Enfin, on calcule la différence entre le signal initial $x(t)$ et le signal reconstruit $\hat{x}(t)$, obtenu en injectant le spectre X de (7) dans l'équation (2).

3.2 Résultats de simulation

La figure 1 illustre la méthode dans un premier contexte qui est tel que l'erreur de reconstruction soit visible : un temps d'observation $T = 8$ s, $M = 2$ seuils, une bande étroite $\beta = 4$, $K = 73$ franchissements de seuil, $N = 29$ fréquences ($K > 2N$) et une résolution de l'horloge $\delta\tau = 10^{-4}$ s. L'écart entre les courbes bleue et rouge est visible vers $t = 7$ s.

Puis on considère des contextes plus réalistes aux figures 2, 3 et 4. L'erreur de reconstruction maximale pour 10 dégradations indépendantes de la résolution est présentée en fonction du temps pour trois valeurs de la résolution : $\delta\tau = 10^{-6}, 10^{-7}$ et 10^{-11} s. L'ordonnée maximale de chaque figure indique la valeur crête du signal analogique. On constate que, malgré des largeurs de bande considérables $\beta = 30, 100, 300$, les dates des franchissements τ_k de $M = 4, 8, 10$ seuils suffisent pour égaler des convertisseurs classiques (flash ou approximations successives par exemple) utilisant des milliers de seuils. La précision de la CANDIFS est contrôlée par la résolution de l'horloge qui détermine aussi la longueur des mots binaires codant les τ_k .

3. Certains franchissements ne sont pas détectés par cette méthode mais cette perte d'information, propre à la simulation, affecte peu les résultats : la méthode semble robuste à la perte d'une partie des franchissements.

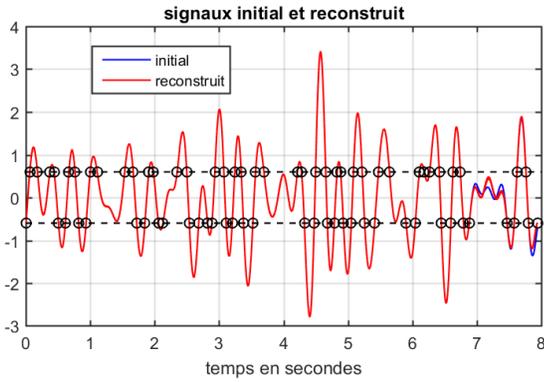


FIGURE 1 – $M = 2$, $B_2 = 4$, $K = 73$, $N = 29$, $\delta\tau = 10^{-4}$ s

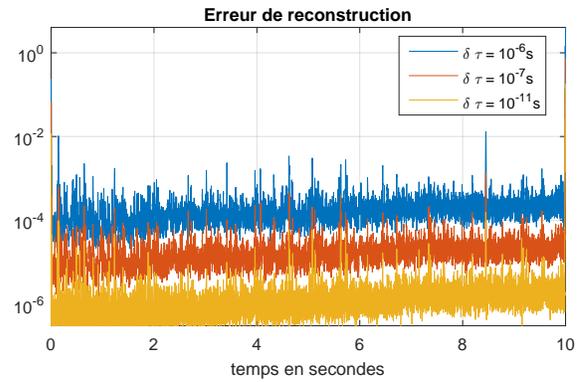


FIGURE 3 – $M = 8$, $B_2 = 100$ Hz, $K = 7423$, $N = 1188$

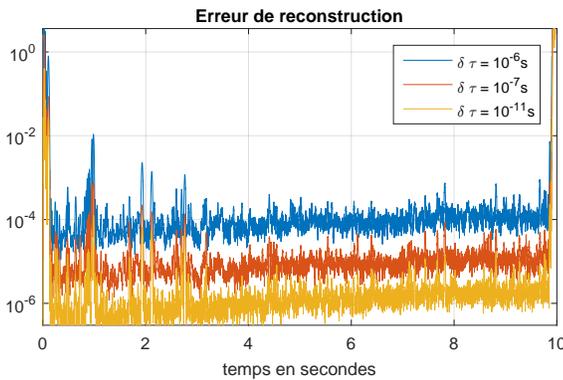


FIGURE 2 – $M = 4$, $B_2 = 30$ Hz, $K = 1214$, $N = 348$

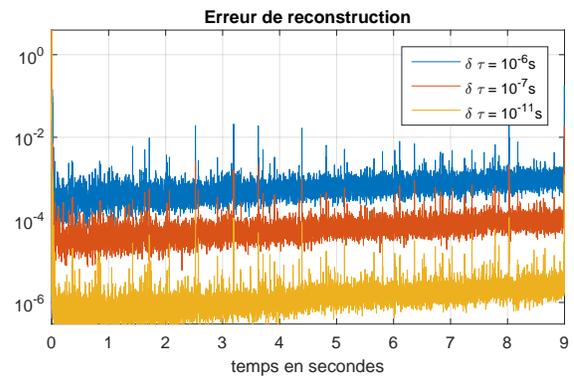


FIGURE 4 – $M = 10$, $B_2 = 300$ Hz, $K = 12656$, $N = 3230$

4 Conclusions et perspectives

Une méthode⁴ de CANDIFS et/ou d'analyse spectrale qui n'utilise aucune connaissance a priori des seuils du convertisseur est proposée et illustrée par des simulations. Des règles empiriques peu contraignantes assurent une reconstruction précise du signal analogique et de son spectre à une indétermination d'échelle près qui est peu pénalisante en pratique. Ces premiers résultats doivent être complétés par une analyse théorique de la dimension de l'intersection des deux sous-espaces pour fournir des conditions, au moins suffisantes, d'identifiabilité. Cet article ne traite que de la CAN de courts intervalles de temps mais il faudrait développer une implantation séquentielle pour une conversion en flux continu. Enfin, la technique proposée peut être étendue à des durées d'observation nettement plus courtes, et donc à des intersections de dimension supérieure à 1 : une nouvelle indétermination (un offset) apparaît avec la dimension 2, et des a priori supplémentaires, comme par exemple la parcimonie du spectre, permettraient de considérer des dimensions encore supérieures.

Références

- [1] S. Kay et R. Sudhaker. *A Zero Crossing-Based Spectrum Analyzer*. IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 34, N. 1, p. 96-104, February 1986.
- [2] H. G. Feichtinger, K. Gröchenig et T. Strohmer. *Efficient Numerical Methods in non-Uniform Sampling Theory*. Numer. Math., Vol. 69, N. 4, p. 423-440, 1995.
- [3] G. Golub et C. Van Loan. *Matrix Computations, 3rd edition*. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [4] N. Sayiner, H. V. Sorensen et T. R. Viswanathan. *A Level-Crossing Sampling Scheme for A/D Conversion*. IEEE Trans. on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing, Vol. 43, N. 4, p. 335-339, April 1996.
- [5] K. Kozmin, J. Johansson et J. Delsing. *Level-Crossing ADC Performance Evaluation Toward Ultrasound Application*. IEEE Trans. on Circuits and Systems I : Regular Papers, Vol. 56, N. 8, p. 1708-1719, August 2009.
- [6] R. Kumaresan et N. Panchal. *Encoding Bandpass Signals Using Zero/Level Crossings : A Model-Based Approach*. IEEE Trans. on Audio, Speech, and Language Processing, Vol. 18, N. 1, p. 17-33, January 2010.

4. Une partie du contenu de cet article a été brevetée.